Université Paris 13, Institut Galilée
Département de Mathématiques
Cours de Mathématiques pour l'Informatique de la Licence d'Informatique (Semestre 4) 2013-2014

Prolégonèmes : Quelques méthodes de raisonnement

1 Raisonnement direct

On procède par substitution d'égalités.

Exemple : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}_*$, $8\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ est un carré.

Preuve[1]: $8\dfrac{n(n+1)}{2}+1 = 4n^2+4n+1 = (2n+1)^2$

2 Raisonnement par disjonction de cas

On sépare les données en différentes classes possibles selon leur comportement (en d'autres termes, on étudie tout les cas possibles). C'est un raisonnement courant en arithmétique.

Exemple : Etude du comportement vers $+\infty$ de la fonction réelle $f_n(x) = x^n \sin x$.

2.0.1 Preuve :

• Si n est strictement positif, toutes les fonctions f_n se comportent de la même manière, elles oscillent entre $-\infty$ et $+\infty$.
• De même si n est strictement négatif, elles tendent vers 0.
• Le cas $n = 0$ termine la partition, dans ce cas, f_0 oscille entre -1 et 1..
Un cas particulier est le

2.1 Raisonnement par examen de tous les éléments

Exemple : On lance deux dés à 6 faces étiquetées de 1 à 6, et l'on additionne les nombres des deux faces supérieures. La probabilité d'obtenir 10 est-elle la même que la probabilité d'obtenir 9 ?

[1] Cette égalité est très utile pour les pavages : elle dit qu'avec 8 triangles formés avec $\dfrac{n(n+1)}{2}$ carreaux, nombres dits triangulaires, placés autour d'un carreau, on forme un carré de longueur $2n+1$.

Preuve : Il y a 36 configurations possibles. Les configurations dont la somme est 10 sont (4,6) , (5,5) et (6,4). Celles dont la somme est 9 sont (3,6) , (4, 5), (5, 4) et (6,3). Donc la probabilité de trouver 9 (1/9) est plus grande que celle de trouver 10 (1/12).

3 Raisonnement par production d'un contre-exemple

Exemple : La propriété suivante est-elle vraie : "deux rectangles de même aire ont même périmètre".

Preuve : Les rectangles de longueurs respectives $4m$ et $2m$ et de largeurs respectives $0,5$ et 1 constituent un contre-exemple.

4 Déduction, Induction et Abduction

4.1 le syllogisme

Le *syllogisme*, terme emprunté au latin *syllogismus*, lui même emprunté au grec ancien et qui signifiait *inférence*, est un raisonnement logique composé de trois propositions, la *majeure*, la *mineure* et la *conclusion*. Le philosophe grec Aristote a été le premier à l'étudier.

Exemples :

```
Tous les hommes sont mortels (Majeure),
 or les Athéniens sont des hommes (mineure),
 donc  les Athéniens sont mortels (conclusion)"

"Tous les hommes sont mortels (Majeure),
or Socrate est un homme (mineure),
donc  Socrate est mortel (conclusion)"
```

Les deux prémisses (dites « Majeure » et « mineure ») sont des propositions données et supposées vraies, le syllogisme permettant de valider la véracité formelle de la conclusion. La proposition majeure est celle qui porte l'implication entre propositions ou l'inclusion entre classes. La mineure attribue une propriété à une entité ou un groupe d'entités.

La forme hypothétique du syllogisme consiste à écrire a majeure sous la forme "Si V est vraie alors W l'est aussi", la mineure sous la forme "U est V", et la conclusion à "Donc U est W".

Le syllogisme fonde le raisonnement mathématique. On le connait aussi sous la forme moderne du *modus ponens*. Sa puissance vient du fait que c'est un schéma de raisonnement, qui s'applique quelque soit le domaine concerné par les propositions traitées et quelque soit la procédure qui permet de décider de la véracité des propositions Majeure et Mineure, qui doit être établie ou acceptée avant la mise en œuvre du syllogisme.

Un raisonnement correct réalisé à partir de données fausses ne permet pas de conclure à la véracité de la conclusion. Par exemple, le mardi 3 décembre 2013, le bulletin météorologique de 8h annonce que "la France est séparée en deux : beau temps au sud de la Loire, mauvais temps au nord de la Loire.". Ce jour-là, à Paris, il a fait très beau. Le raisonnement suivant :

Tous les lieux qui ont beau temps sont situés au sud de la Loire (Prévision),

Or il fait beau à Paris (Fait réel),

donc Paris est au sud de la Loire (Fait faux).

La conclusion est fausse, on conclut naturellement à une erreur de la Prévision. Nous reverrons ce point avec le raisonnement par l'absurde.

L'importance du syllogisme dans le raisonnement mathématique nous invite à étudier ce qu'il advient lorsque l'ordre des trois propositions est modifié.

4.2 Les trois raisonnements canoniques

Considérons les trois assertions, qui constituent l'exemple canonique proposé par Pierce.
:

(a) Les haricots de ce sac sont blancs.
(b) Ces haricots proviennent de ce sac.
(c) Ces haricots sont blancs.

On peut organiser ces trois assertions en six textes de même schéma *X et Y DONC Z*. Mais comme les formes *X et Y DONC Z* et *Y et X DONC Z* ont mêmes sens. Il reste donc trois types à étudier

- (a et b donc c) ou **l'instanciation déductive (syllogisme) aristotélicienne "Barbara"**]
  Les haricots de ce sac sont blancs.
  Ces haricots proviennent de ce sac.
  Donc ces haricots sont blancs.

  Ce raisonnement est valide.

- (b et c donc a) ou **la généralisation inductive**
  Ces haricots proviennent de ce sac.
  Ces haricots sont blancs.
  Donc les haricots de ce sac sont blancs.

  C'est une déduction non valide, car abusive.

- (a et c et donc b)] ou **la généralisation abductive**
  Les haricots de ce sac sont blancs.
  Ces haricots sont blancs.
  Donc ces haricots proviennent de ce sac.

  C'est une déduction non valide en soi, mais, en remplaçant "donc"par "il est possible/probable que", la conclusion peut être vue comme une explication (possible) du résultat. L'abduction sera vue comme un raisonnement dialectique, celui de la meilleure explication possible développée au cours d'un dialogue sur la recherche d'une hypothèse. On peut rapprocher ce raisonnement de celui ci:

Quand il a plu depuis peu, la route est mouillée
De ma fenêtre, je vois la route devant chez moi toute mouillée
Donc il a du pleuvoir
Ce n'est pas la seule explication possible. C'est peut-être le voisin d'en face qui a arrosé son massif de bordure.

L'abduction est une induction vue du côté du sens commun, on prend l'explication la plus plausible.

Aristote connaissait ces trois types de raisonnement, qui ont été revisités par le philosophe américain Charles Sanders Peirce (1931-1958). La déduction est un raisonnement qui part de règles générales hypothèses/règles pour en déduire un cas particulier. Elle est généralement décrite par son prototype, le syllogisme. Induction et abduction sont deux formes de raisonnements qui ont la même racine, partir d'observations spécifiques pour en inférer des règles générales. L'induction est considérée comme un raisonnement statistique, donc abusif. Le troisième, l'abduction – selon Peirce ou la rétroduction selon Aristote, - est considérée comme un raisonnement de plausibilité, « un mélange d'induction et d'hypothèse ».

4.2.1 La chaîne déductive de Stevin (1585) pour prouver que un est un nombre

Un n'était pas considéré comme un nombre mais comme le principe de tous les nombres, c'est-à-dire les nombres entiers ou *absolus*[2].

> (1) La partie est de même matière qu'est son entier, (2) Unité est partie de multitude d'unités, (3) Ergo l'unité est de même manière qu'est la multitude d'unités (4) Mais la matière de multitude d'unités est nombre, (5) Donc la matière d'unité est nombre.

Adhérer à (1), (2) et (4) permet d'affirmer (3) et (5).

5 raisonnement par contraposée

Etant données deux propriétés P et Q. Il est équivalent de démontrer $P \implies Q$ et $\neg P \implies \neg Q$. Ces deux implications sont contraposées l'une de l'autre.

Exemple : Dans les entiers, montrons que si n^2 est pair, alors n est pair.

Preuve : On montre que si n n'est pas pair, donc impair, alors n^2 est impair. La preuve directe est plus longue.

[2] Terme à l'origine du nom de la fonction "valeur absolue" !

6 Le raisonnement par récurrence

Le caractère essentiel du raisonnement par récurrence est qu'il contient, condensé en une formule unique, une infinité de *syllogismes hypothétiques* disposés en cascade :

S_1 La proposition est vraie pour le nombre 1
Or S'il est vrai pour le nombre 1, il est vrai pour le nombre 2
Donc il est vrai pour le nombre 2.

S_2 La proposition est vraie pour le nombre 2
Or S'il est vrai pour le nombre 2, il est vrai pour le nombre 3
Donc il est vrai pour le nombre 3.

S_3 La proposition est vraie pour le nombre 3
Or S'il est vrai pour le nombre 3, il est vrai pour le nombre 4
Donc il est vrai pour le nombre 4, *ad libitum*

La conclusion de chaque syllogisme sert de mineure au suivant. Les majeures de chaque syllogisme peuvent être décrites en une formule générale unique, grâce à la notion de *variable*, "si la proposition est vraie pour le nombre n, elle est vraie pour le nombre $n+1$."

Cette variable permet de passer du particulier au quelconque.

Pour un entier n donné, par exemple 2013, il suffit de prouver 2013 syllogismes pour obtenir le fait que la proposition est vraie pour le nombre 2013. Aussi grand que nous prenions un nombre, nous pourrions finir par l'atteindre, mais nous ne saurions prouver la proposition pour tous les nombres.

Le raisonnement par récurrence consiste à énoncer la mineure du premier syllogisme, et la formule générale qui formule en une fois, grâce à la variable, toutes les majeures. Le raisonnement par récurrence est une méthode qui permet de passer du fini à l'infini.

La démonstration par récurrence procède donc du particulier au général. C'est un type d'induction valide dès que la première mineure l'est, car elle permet de réduire une infinité de vérifications (ce qui est hors de notre portée) en un nombre limité de vérification.

L'induction infinie sur $\mathbb{N}$ est vraie car $\mathbb{N}$ possède une structure particulière, celle de *bon ordre* qui consiste pour $\mathbb{N}$ à posséder une relation $\leq$ qui ordonne la totalité de ses éléments à partir d'un élément planché - 0 - en une chaîne infinie. Les bons ordres sont des cas particuliers d'*ensembles inductifs*, dont on ne peut se passer en informatique.

6.1 Formellement

Rappelons que :

les intervalles de $\mathbb{N}$
Les intervalles bornés de $\mathbb{N}$, soit $a, b, \in \mathbb{N}, a \leq b$, on définit
– l'intervalle fermé $[a, b] = \{n \in \mathbb{N}, a \leq n \leq b\}$
– l'intervalle semi-ouvert à droite $[a, b[= \{n \in \mathbb{N}, a \leq n < b\}$
– l'intervalle semi-ouvert à gauche $]a, b] = \{n \in \mathbb{N}, a < n \leq b\}$

– l'intervalle ouvert $]a, b[= \{n \in \mathbb{N}, a < n < b\}$

$$]a, b[= [a+1, b[= [a, b+1[= [a+1, b+1]$$

Les intervalles non bornés de $\mathbb{N}$, soit $a \in \mathbb{N}$, on définit :
– $[a, \infty[= \{n \in \mathbb{N}, a \leq n\}$
– $]a, \infty[= \{n \in \mathbb{N}, a < n\}$

$$[a, \infty[=]a+1, \infty[$$

Parties s-héréditaires

Soit la fonction $s : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}_* \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array} \right.$. Une partie A de $\mathbb{N}_*$ est dite *s-héréditaire* si elle est stable par s, c'est-à-dire si $s(A) \subset A$.

$s(\{3, 5, 8\}) = \{4, 6, 9\}$; $s([a, b[) = [a+1, b+1[$; $s([a, \infty[= [a+1, \infty[$

Les seules parties héréditaires de $\mathbb{N}$ sont les intervalles infinis. En fait l'une des caractéristiques de $\mathbb{N}$ est

Proposition 6.1 (principe de récurrence) *Si une partie de $\mathbb{N}$ contient 0 et est s-héréditaire alors c'est $\mathbb{N}$ lui-même.*

La propriétés de s-hérédité de $\mathbb{N}$ et l'expression de ses parties s-héréditaires permet de poser

Théorème 6.2 (théorème de récurrence simple) *Soit une propriété qui concerne les nombres entiers naturels. Si l'on peut montrer qu'elle est vraie pour $s(n)$ dès qu'elle est vraie pour n, et si elle est vérifiée pour a, alors elle est alors elle est vraie au moins sur tout l'intervalle $[a, \infty[$.*

En particulier si $a = 0$, la propriété est vraie sur tout $\mathbb{N}$.

Cette propriété est équivalente à ce qui semble être une généralisation

Théorème 6.3 (principe de récurrence forte) *Supposons qu'une propriété est vérifiée pour un entier a. Si l'on peut démontrer pour un entier arbitraire $n \geq p$ que la propriété est vraie pour $s(n)$ dès qu'elle est vraie pour tous les entiers de $[p, n]$, alors elle est vraie sur $[p, \infty[$.*

En particulier si $a = 0$, la propriété est vraie sur tout $\mathbb{N}$.

Exemple : Montrons $\forall n \in \mathbb{N}_*$, la l'égalité

$$P(n) : 2^n > n$$

Preuve par récurrence simple :
• vérifions $P(0)$ [base], soit l'égalité $2^0 = 1 > 0$
• Supposons que $P(n)$ est vraie [hypothèse de récurrence]. Vérifions alors que $P(n+1)$ est aussi vrai.
$2^{n+1} = 2 \times 2^n$. or $2 > 1$ et d'après l'hypothèse de récurrence, $2^n > n$, donc $2 \times 2^n > 1 \times n = n$, ce qui prouve P(n+1).
Conclusion : D'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie sur tout $\mathbb{N}$

7 Raisonnement par l'absurde

Il s'agit de supposer qu'une proposition est vraie et à démontrer que cela conduit à une absurdité. Cette forme de raisonnement est fondée sur le principe du tiers-exclu qui stipule que *toute proposition est soit vraie soit fausse et cela de façon exclusive.*

raisonnement par l'absurde de Stevin pour prouver que l'unité est un nombre

> Si du nombre donné, l'on ne soustrait nul nombre, le nombre demeure. Supposons que un n'est pas nombre. Soit trois le nombre donné, soustrayons lui un, qui n'est pas un nombre. Donc le nombre donné demeure, c'est-à-dire qu'il y restera encore trois, ce qui est absurde.

Exemple : Montrons que $\forall x \in \mathbb{N}, x+1 \neq x+2$.

Preuve : On commence par nier la proposition en posant $\exists x \in \mathbb{N}$ tel que $x+1 = x+2$ alors on aboutit à une absurdité : $1 = 2$ d'où le résultat.

Exemple : Montrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.

Preuve 1 : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel, il s'écrit donc comme quotient de deux entiers strictement positifs p et q, soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ou $q\sqrt{2} = p$. Elevons au carré, nous obtenons $2q^2 = p^2$. Tout carré d'un nombre entier a pour chiffre des unités soit 1, 4, 5, 6, 9. Comme p^2 est pair, il ne peut se terminer que par 4 ou 6, soit $2q^2 = p^2 = 4+10a+100q$ ou $2q^2 = p^2 = 6+10a+100q$ avec $0 \leq a \leq 9$ et $q \in \mathbb{N}$. On en déduit que $q^2 = 2+5a+50q$ ou $q^2 = 3+5a+50q$. Si a est pair, le chiffre des unités de q^2 est soit 2 soit 3, si a est impair, il faut y ajouter 7 et 8. Aucun de ces 4 nombres ne peut être chiffre d'un carré d'un nombre entier. Notre hypothèse conduit à une impossibilité.

Cette preuve fonctionne aussi pour $\sqrt{3}$ mais pas pour $\sqrt{5}$.

Une preuve reposant sur l'existence d'une représentation des rationnels comme quotient de deux entiers premiers entre eux (quotient irréductible) et le lemme de Gauss de l'arithmétique est plus générique.

Preuve 2 : Supposons que $\sqrt{2}$ soit un rationnel, il s'écrit donc comme quotient de deux entiers strictement positifs p et q, soit $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ ou $q\sqrt{2} = p$. Elevons au carré, nous obtenons $2q^2 = p^2$. p^2 et donc p est pair. Posons $p = 2p_1$, $p^2 = 4p_1$, et par conséquent $2q^2 = 4p_1^2$, soit $q^2 = 2p_1^2$. q est donc aussi pair, ce qui contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.

8 Mise en abîme du raisonnement par l'absurde dans $\mathbb{N}$

C'est le principe des boucles d'oreille de la "vache-qui-rit". Le principe est de supposer que si une propriété est vraie pour un nombre entier n_0, alors il existe un nombre strictement plus petit n_1 qui satisfait cette propriété, et ainsi de construire par récurrence une suite infinie (n_i) décroissante possédant la propriété. L'absurdité vient du fait qu'il n'existe pas de chaîne infinie descendante dans N.

Exemple : Démontrons ainsi que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

Preuve 3: Supposons que $\sqrt{2}$ est rationnel, c'est-à-dire qu'il existe un couple $(p, q) \in \mathbb{N}_* \times \mathbb{N}_*$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$.
Alors $2q^2 = p^2$. $2q^2$ est pair donc p^2 et donc p l'est aussi.
Posons $p = 2p_1$, $p^2 = 4p_1$, et par conséquent $2q^2 = 4p_1^2$, soit $q^2 = 2p_1^2$.
En recommençant le même raisonnement, on définit un nouveau couple (p_1, q_1), tels que $p_1 \leq p$ et $q_1 \leq q$ tels que $2q_1^2 = p_1^2$ On construit par récurrence un suite infinie descendante (p_n, q_n) satisfaisant $2q_n^2 = p_n^2$, ce qui est impossible dans $\mathbb{N}$. La supposition est donc fausse.