PRES Sorbonne-Paris Cité.
Université Paris 13
Institut Galilée
Licence Informatique Semestre 4 **feuille TD n° 3**

Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

Exercice 1 – Montrer que $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in Z_*$, l'unicité du couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ n'est plus assurée si l'on remplace la proposition

$$a = b.q + r \quad \textbf{et} \quad 0 \le r < |b|$$

par la proposition

$$a = b.q + r \quad \textbf{et} \quad 0 \le |r| < |b|$$

Exercice 2 – Expliquer comment résoudre les équations de la forme $ax + by = c$ dans $\mathbb{Z}^2$.
Appliquer aux équations

(i) 161x + 368y =115

(ii) 161x + 368y =105

(iii) 161x + 368y = 46

Exercice 3 – Dans un verger, un puits central a pour coordonnées cartésiennes (0,0). Les arbres occupent toutes les coordonnées (a,b) entières. Quels sont les arbres visibles depuis le puits ?

Exercice 4 – Soient $f(X) := X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ un polynôme à une indéterminée X à coefficients entiers $a_i \in \mathbf{Z}$, $\alpha \in \mathbf{Q}$ une racine rationnelle de f, i.e. un nombre rationnel α tel que $f(\alpha) = 0$. On va montrer que $\alpha \in \mathbf{Z}$.

(i) Montrer qu'il existe $r, s \in \mathbf{Z}$ premiers entre eux tels que $\alpha = \frac{r}{s}$.

(ii) Soit p un diviseur premier de s. Montrer que $p \mid r^n$.

(iii) En déduire que $p \mid r$ et conclure.

(iv) Comme corollaire, montrer que $\sqrt[n]{42} \notin \mathbf{Q}$ pour tout $n \ge 2$.

Exercice 5 – Réduction d'une fraction rationnelle $\dfrac{a}{b}$ en éléments simples.

Supposons $b = \Pi_{1\le j\le k} p_j^{n_j}$, avec $p_1, \cdots, p_k$ k entiers premiers distincts et $a \wedge b = 1$. Réduire $\dfrac{a}{b}$ en éléments simples c'est la décomposer en somme d'un entier relatif et de fractions de la forme $\dfrac{r_{i,j}}{p_j^i}$, $1 \le i \le n_j$.

(i) Montrer que si $b = p^n$, l'écriture de a dans la base p permet de conclure.

(ii) Montrer que si $b = \alpha\beta$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$, trouver une solution de $\alpha x + \beta y = a$ permet de conclure.

(iii) En déduire la procédure de décomposition générale.

(iv) appliquer à $\dfrac{259}{90}$