PRES Sorbonne-Paris Cité.
Université Paris 13
Institut Galilée
Licence Informatique Semestre 4
Cours Mathématiques pour l'informatique
feuille TD n° 1

Prolégomènes : $\mathbb{N}$, types de raisonnements

Exercice 1 – Démontrer l'identité de Legendre-Fibonacci en explicitant pas à pas chaque propriété de $\mathbb{N}$ utilisée :

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2$$

Exercice 2 – En supposant connue l'associativité de $\mathbb{N}$, l'existence de son élément neutre, et à partir de l'axiome $a + 1 = 1 + a$, pour tout entier naturel a, montrer que l'addition est commutative dans $\mathbb{N}$.

Exercice 3 – Démontrer l'inégalité $b^n > n$, pour $b \geq 2$

Exercice 4 – A partir de quelle entier n_0, peut-on écrire $2^n > n^2$ pour tout $n > n_0$.

Exercice 5 – Pour $n \geq 1$,

(i) Montrer que $\forall n \in N_*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(ii) En déduire, $\forall n \in N_*$, la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

(iii) Montrer que $\forall n \in N_*$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iv) En déduire, pour $n \geq 2$,

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(k+1) = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$$

(v) Montrer que $\forall n \in N_*$,

$$(\sum_{k=1}^{n} k)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

(vi) En déduire une expression simple de

$$\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Exercice 6 – Démontrer l'identité du binôme[1]

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exercice 7 – Démontrer que

$$b^n - a^n = (b-a) \sum_{k=0}^{n-1} b^{n-1-k} a^k$$

En déduire que

$$\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

Exercice 8 – Démontrer l'égalité, pour $n \geq 1$

$$\prod_{k=1}^{n} (4k-2) = \prod_{k=1}^{n} (n+k)$$

Exercice 9 – Réduire

$$(\sum_{k=0}^{n-1} u_k) + (\sum_{i=1}^{n} u_i)$$

Exercice 10 – Soit une suite (u_n) de $\mathbb{N}$. Comparer

$$S = (\sum_{k=0}^{n-1} u_k)^2 \quad et \quad T = \sum_{k=0}^{n-1} u_k^2$$

Exercice 11 – Soit deux suites (u_n) et (v_n) de $\mathbb{N}$. Comparer

$$S = (\sum_{k=0}^{n-1} u_k)(\sum_{k=0}^{n-1} v_k) \quad et \quad T = (\sum_{k=0}^{n-1} u_k \cdot v_k)$$

1. Si $k \leq n$, on note $\binom{n}{k}$, nommé *coefficient du binôme* ou k *parmi* n l'entier satisfaisant $n! = k!(n-k)!\binom{n}{k}$.

Exercice 12 – On définit la *fonction d'Ackermann* $A : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} A(0,y) &:= y+1 \\ A(x,0) &:= A(x-1,1) \quad \text{pour } x>0 \\ A(x,y) &:= A(x-1, A(x,y-1)) \quad \text{pour } x>0,\ y>0. \end{aligned}$$

Montrer que $A(x,y)$ est bien défini pour tous $x, y \in \mathbf{N}$.

Exercice 13 – Etudier la démonstration suivante, qui prouve que deux nombres quelconques sont égaux :

Soient trois nombres a, b et c strictement positifs tels que $a = b + c$.
$a = b + c \Leftrightarrow a(a-b) = (b+c)(a-b)$,
d'où $a^2 - ab = ab + ac - b^2 - bc \Leftrightarrow a^2 - ab - ac = ab + ac - b^2 - bc - ac \Leftrightarrow a(a-b-c) = b(a-b-c)$,
En simplifiant par $a - b - c$, on obtient $a = b$

Exercice 14 – Etudier la démonstration suivante, dérivée d'un paradoxe proposé par le mathématicien et logicien Alfred Tarski.

Supposons que pour tout paquet P_n de n crayons, nous voulons démontrer la proposition suivante :

$$(p \in P_n \text{ et } q \in P_n) \Rightarrow (\text{p et q ont même couleur})$$

Cette implication est vraie pour n=1.
Supposons qu'elle est vraie pour n, prouvons la pour $n+1$
Soit P_{n+1} un ensemble de $n+1$ crayons notés $p_1, \cdots p_n, p_{n+1}$. Notons P_n le paquet constitué des n crayons $p_1, \cdots p_n$ et Q_n le paquet constitué des n crayons $p_2, p_3 \cdots p_{n+1}$.
D'après l'hypothèse de récurrence, d'une part $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ et d'autre part $p_2 = p_3 = \cdots = p_n = p_{n+1}$, ce qui démontre le théorème par récurrence.

Exercice 15 – le paradoxe du chauve [2]. On arrache un cheveu à la tête d'un homme chevelu. Celui-ci est-il devenu chauve ? Evidemment non. Puis on lui arrache un second cheveu, est-il devenu chauve ? et trois ? ..., et n ?

Montrer que l'application du principe de récurrence conduit à prouver qu'un homme chauve n'est pas chauve. Où réside le paradoxe.

Produire un paradoxe similaire qui prouve qu'un riche n'est pas riche.

2. Paradoxe produit par le Mégarite Eubulide de Milet, au IV° siècle avant l'EC. Ce type de paradoxe est appelé *sorite*.