Cours Mathématiques pour l'informatique L2 Informatique
Examen seconde session 2013

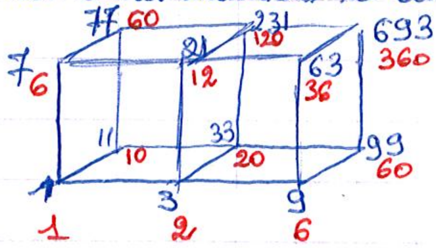
Exercice n° 2

1/ $693 = 3^2 \times 7 \times 11$

$D_{\mathbb{N}}(693) = \{1, 3, 3^2\} \otimes \{1, 7\} \otimes \{1, 11\}$
$= \{1, 3, 9, 7, 21, 63, 11, 33, 99, 77, 231, 693\}$

2 et 3/ $\varphi(1) = 1 \quad \varphi(3) = 2 \quad \varphi(9) = 6$
$\varphi(7) = 6 \quad \varphi(11) = 10$

Les autres indicatrices se calculent sur le diagramme de Hasse : (en rouge)



4/ 693 n'est pas premier donc il existe des diviseurs de zéro non nul dans $\mathbb{Z}/693\mathbb{Z}$, comme $[3]_{693}$ car $3 \times 231 \equiv 0 \ (693)$

5/ $\mathcal{I} = \{x \in \mathbb{N} \mid \exists m_x \geq 0 \quad x = \sum_{k=0}^{m_x} 10^k\}$

a) $x, y \in \mathcal{I}$ et $x < y \Rightarrow m_x < m_y$

$y - x = \sum_{k=0}^{n_y} 10^k - \sum_{k=0}^{n_x} 10^k = \sum_{k=n_x+1}^{n_y} 10^k = 10^{n_x+1} \sum_{k=0}^{n_y-n_x-1} 10^k$

avec $\alpha = n_x + 1 \quad q = \sum_{k=0}^{n_y-n_x-1} 10^k$ car $n_y - n_x - 1 \geq 0$.
donc $q \in \mathcal{I}$.

b) f injective de E dans $F \Rightarrow \# E \leq \# F$
or $E = \mathcal{I}$ est infini et $F = \mathbb{Z}/693\mathbb{Z}$ est fini donc f ne peut être injective.

c) Il existe donc $x, y \in \mathcal{I}$ $x < y$ tel que $f(x) = f(y)$ soit
$[x]_{963} = [y]_{963} \Leftrightarrow x - y \in 963\,\mathbb{Z}$
D'après a) $y - x = 10^\alpha q$ pour un couple $(\alpha, q) \in \mathbb{N} \times \mathcal{I}$
Or $10 \wedge 963 = 1$ donc $10^\alpha \wedge 963 = 1$ d'où par Gauss $q \in 963\,\mathbb{Z}$