

T.D. 7 Tas binomiaux..

Les tas binomiaux sont des structures de données qui ont la même fonction que les tas binaires qui sont utilisés par exemple dans le tri par tas. Comme l'indique le tableau ci-dessous, les complexités des opérations que l'on peut faire avec ces deux structures sont pratiquement identiques sauf dans deux cas : la recherche du minimum et l'union de deux tas.

Opération	Tas binaire	Tas binomial
Insertion	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Minimum	$O(1)$	$O(\log n)$
Extraction	$O(\log n)$	$O(\log n)$
Union	$O(n)$	$O(\log n)$
Suppression	$O(\log n)$	$O(\log n)$

Les tas binomiaux sont sensiblement plus difficiles à implanter, il ne faut donc les utiliser que si l'union de deux tas est une opération fréquente dans l'application que l'on considère. Par exemple, on peut l'utiliser pour implanter l'algorithme de Kruskal pour le problème de l'arbre couvrant de poids minimum.

Un tas binomial est une liste chaînée d'arbres binomiaux.

1 Définition des arbres binomiaux

Un *arbre binomial* B_k est un arbre défini récursivement de la façon suivante :

- B_0 est constitué d'un seul sommet,
- B_k est constitué de deux arbres binomiaux B_{k-1} reliés de la façon suivante : la racine de l'un est le fils le plus à gauche de la racine de l'autre (faire un dessin).

Question 1 : Démontrer les propriétés suivantes :

1. B_k contient 2^k sommets.
2. la hauteur de B_k est k .
3. dans B_k , il y a exactement $\binom{k}{i}$ sommet à la hauteur i .
4. la racine a un degré égal à k et supérieur à tous les degrés des autres sommets, de plus si les fils de la racine sont numérotés de gauche à droite par $k-1, k-2, \dots, 0$, le fils i est la racine de l'arbre binomial B_i .

Un *tas binomial* est un ensemble d'arbre binomiaux qui satisfont les propriétés suivantes :

1. chaque arbre binomial a une structure de tas : l'information portée par un sommet est inférieure ou égale à l'information portée par chacun de ces fils.
2. il y a au plus un arbre binomial dont la racine a un degré donné.

La première propriété indique que le minimum du tas est porté par une des racines des arbres binomiaux.