Solution du T.D. 2 : Tas binomiaux

Institut Galilée - USPN
Structures de données avancées (M1)

Les tas binomiaux sont des structures de données qui ont la même fonction que les tas binaires qui sont utilisés par exemple dans le tri par tas. Comme l'indique le tableau ci-dessous, les complexités des opérations que l'on peut faire avec ces deux structures sont pratiquement identiques sauf dans deux cas : la recherche du minimum et l'union de deux tas.

Opération	Tas binaire	Tas binomial
Insertion	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Minimum	$\mathcal{O}(1)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Extraction	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Union	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
Suppression	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$

Table 1: Comparaison des complexités des tas binaires et binomiaux.

Les tas binomiaux sont sensiblement plus difficiles à implémenter. Il ne faut donc les utiliser que si l'union de deux tas est une opération fréquente dans l'application que l'on considère. Par exemple, on peut les utiliser pour implémenter l'algorithme de Kruskal pour l'arbre couvrant de poids minimum.
Un tas binomial est une liste chaînée d'arbres binomiaux.

1 Définition des arbres binomiaux

Un arbre binomial B_k est un arbre enraciné défini récursivement de la façon suivante :

- B_0 est constitué d'un seul sommet,
- B_k est constitué de deux arbres binomiaux B_{k-1} reliés de la façon suivante : la racine de l'un est le fils le plus à gauche de la racine de l'autre.

Question 1 : Démontrer les propriétés suivantes :

1. B_k contient 2^k sommets.

   Cas de base : B_0 contient $1 = 2^0$ sommet.
   Hypothèse de récurrence (HR) : pour un certain $k \in \mathbb{N}$, tout arbre binomial B_k contient 2^k sommets.
   Induction : B_{k+1} est constitué de deux arbres binomiaux B_k contenant chacun 2^k sommets (HR). Donc il contient $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ sommets. □

2. La hauteur de B_k est k.

   Cas de base : La hauteur de B_0 est 0.
   Hypothèse de récurrence : pour un certain $k \in \mathbb{N}$, la hauteur de tout arbre binomial B_k est k.
   Induction : B_{k+1} est constitué de deux arbres binomiaux B_k, chacun de hauteur k (HR). De plus, la racine du 2e arbre est enfant de la racine du 1er, donc la hauteur de B_{k+1} est $k+1$. □

3. Dans B_k, il y a exactement $\binom{k}{i}$ sommets à la hauteur i.

Cas de base : Dans B_0, il y a 1 sommet à la hauteur 0 et 0 à la hauteur $i > 0$, soit $\binom{0}{i}$ sommet à la hauteur $i \in \mathbb{N}$. Hypothèse de récurrence : pour un certain $k \in \mathbb{N}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$, dans B_k il y a exactement $\binom{k}{i}$ sommets à la hauteur i. Induction : Dans B_{k+1}, dans le B_k à droite de la racine il y a $\binom{k}{i-1}$ sommets à la hauteur $i-1$ dans B_k, qui se retrouvent à la hauteur i dans B_{k+1}. Dans le B_k à la racine il y a $\binom{k}{i}$ sommets à la hauteur i (pas dans l'autre B_k), qui restent à la hauteur i dans B_{k+1}. On a donc $\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}=\binom{k+1}{i}$ sommets à la hauteur i dans B_{k+1}. $\square$

4. La racine a un degré égal à k et supérieur à tous les degrés des autres sommets. De plus, si les fils de la racine sont numérotés de gauche à droite par $k-1, k-2, \ldots, 0$, le fils i est la racine de l'arbre binomial B_i.

Cas de base : la racine de B_0 a un degré égal à 0, il n'y a pas d'autre sommet. Hypothèse de récurrence (HR) : pour un certain $k \in \mathbb{N}$, la racine a un degré égal à k et supérieur à tous les degrés des autres sommets. De plus, si les fils de la racine sont numérotés de gauche à droite par $k-1, k-2, \ldots, 0$, le fils i est la racine de l'arbre binomial B_i. Induction : Dans B_{k+1}, on part d'un B_k et on ajoute un enfant à sa racine donc le degré de cette racine dans B_{k+1} est $k+1$. De plus, par HR, dans le dernier enfant (B'_k) ajouté à B_k, les degrés sont tous $\leq k$ et dans les autres enfants de B_k aussi, donc ils sont tous inférieurs à $k+1$. Enfin, par HR, en numérotant $k, k-1, ..., 0$ les fils de la racine de B_{k+1}, le premier est bien la racine de B_k et les suivants sont les fils $k-1, k-2, \ldots, 0$ de B_k donc le fils i est la racine de l'arbre binomial B_i (HR). $\square$

Un tas binomial est un ensemble d'arbres binomiaux qui satisfont les propriétés suivantes :

1. Chaque arbre binomial a une structure de tas : l'information portée par un sommet est inférieure ou égale à l'information portée par chacun de ses enfants.

2. Il y a au plus un arbre binomial dont la racine a un degré donné.

La première propriété indique que le minimum du tas est porté par une des racines des arbres binomiaux.