Lecture III : Prérequis sur les algèbres

Laurent Poinsot

11 février 2009

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre.**

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \ .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre.**

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) .$$

On dit aussi que A est une R**-algèbre.**

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \ .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \ .$$

On dit aussi que A est une R**-algèbre.**

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.

Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.
Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.
Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \; .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Il arrive bien souvent qu'un module ait une structure multiplicative supplémentaire qui en fait également un anneau. Il suffit de penser aux anneaux de matrices ou de polynômes. La notion d'algèbre lie les structures de modules et d'anneaux ensemble.
Une **algèbre** (associative) sur un anneau commutatif R est un anneau A qui est également un R-module, tel que les multiplications d'anneau et de module sont compatibles au sens où quels que soient $r \in R$, $a, b \in A$,

$$r(ab) = (ra)b = a(rb) \ .$$

On dit aussi que A est une R-**algèbre**.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Lorsque R est un corps, une base de A en tant que R-espace vectoriel est dite **base** de l'algèbre A. La **dimension** de A est alors la dimension du R-espace vectoriel sous-jacent. L'algèbre A sur un anneau quelconque est une **algèbre commutative** si, et seulement si, l'anneau sous-jacent est commutatif.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples

- Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre ;
- $\mathbb{C}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre de dimension deux dont $\{1, i\}$ est une base ;
- L'ensemble des matrices de taille $n \times n$ sur un corps $\mathbb{K}$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension n^2 ;
- L'anneau $R[\mathrm{x}]$ est une algèbre sur l'anneau R, avec comme base $\{\mathrm{x}^i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ($\mathrm{x}^0 := 1$) en tant que R-module libre $R[\{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}]$, et avec la multiplication des polynômes comme multiplication d'algèbre ;
- L'anneau $R[[\mathrm{x}]]$ des séries formelles $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} r_i \mathrm{x}^i$ avec $r_i \in R$ est une R-algèbre avec la multiplication usuelle des séries ;
- Si V est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, alors l'anneau $\mathrm{End}(V)$ des endomorphismes de V est une $\mathbb{K}$-algèbre.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g\in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\displaystyle\sum_{g\in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r,s) \in R^2$ et $(g,h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

Soient R un anneau et G un groupe (en notation multiplicative). L'**anneau de groupe** $R[G]$ consiste en le R-module libre de base G ; ses éléments sont notés $\sum_{g \in G} r_g g$, avec $r_g \in G$, et seulement un nombre fini de r_g non nuls. La multiplication est définie en étendant par distributivité le produit sur les éléments de la base $(rg)(sh) := (rs)(gh)$ pour $(r, s) \in R^2$ et $(g, h) \in G^2$. Si R est un anneau commutatif, l'anneau de groupe $R[G]$ est une R-algèbre appelée l'**algèbre de groupe**.

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) &:= \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1g_2=g} r_{g_1}s_{g_2}\right) g\\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}}s_h\right) g\ .\end{aligned}$$

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1 g_2 = g} r_{g_1} s_{g_2}\right) g$$

$$= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}} s_h\right) g\ .$$

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1g_2=g} r_{g_1}s_{g_2}\right) g = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}}s_h\right) g\ .$$

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) &:= \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1g_2=g} r_{g_1}s_{g_2}\right) g\\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}}s_h\right) g\ .\end{aligned}$$

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1 g_2 = g} r_{g_1} s_{g_2}\right) g$$

$$= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}} s_h\right) g \ .$$

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) := \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1 g_2 = g} r_{g_1} s_{g_2}\right) g$$

$$= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}} s_h\right) g\ .$$

Exemples (suite)

On peut expliciter le produit des éléments de $R[G]$:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{g\in G} r_g g\right)\left(\sum_{g\in G} s_g g\right) &:= \sum_{g\in G}\left(\sum_{(g_1,g_2)\in G^2,\ g_1 g_2 = g} r_{g_1} s_{g_2}\right) g \\ &= \sum_{g\in G}\left(\sum_{h\in G} r_{gh^{-1}} s_h\right) g\ .\end{aligned}$$

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Exemples (suite)

Si M est un monoïde (structure munie d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre bilatère), alors on peut définir de façon analogue au point précédent l'algèbre de groupe $R[M]$ (R étant un anneau commutatif). En particulier, étant donné une indéterminée x sur R, on définit le monoïde $\langle \mathrm{x} \rangle := \{\mathrm{x}^i : i \in \mathbb{N}\}$ (avec x^0 étant l'identité de R) dont le produit est défini par $\mathrm{x}^i \mathrm{x}^j := \mathrm{x}^{i+j}$. $R[\langle \mathrm{x} \rangle]$ n'est en réalité rien d'autre que l'algèbre des polynômes $R[\mathrm{x}]$.

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a + b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soient A et B deux R-algèbres. Une application $f : A \to B$ est un **homomorphisme de R-algèbres** si, et seulement si, f est à la fois un homomorphisme de R-modules et un homomorphisme d'anneaux ; plus explicitement pour tous $r \in R$ et $a, b \in A$:

1. $f(a+b) = f(a) + f(b)$;
2. $f(ra) = rf(a)$;
3. $f(ab) = f(a)f(b)$;
4. $f(1) = 1$

Soit A une R-algèbre. Une **sous-R-algèbre** (ou plus simplement **sous-algèbre**) de A est une partie de A qui est à la fois un sous-module et un sous-anneau de A et qui est une $\mathbb{K}$-algèbre pour ces lois.

Soit A une R-algèbre. Une **sous-R-algèbre** (ou plus simplement **sous-algèbre**) de A est une partie de A qui est à la fois un sous-module et un sous-anneau de A et qui est une $\mathbb{K}$-algèbre pour ces lois.

Soit A une R-algèbre. Une **sous-R-algèbre** (ou plus simplement **sous-algèbre**) de A est une partie de A qui est à la fois un sous-module et un sous-anneau de A et qui est une $\mathbb{K}$-algèbre pour ces lois.

Soit A une R-algèbre. Une **sous-R-algèbre** (ou plus simplement **sous-algèbre**) de A est une partie de A qui est à la fois un sous-module et un sous-anneau de A et qui est une $\mathbb{K}$-algèbre pour ces lois.

Soit A une R-algèbre. Une **sous-R-algèbre** (ou plus simplement **sous-algèbre**) de A est une partie de A qui est à la fois un sous-module et un sous-anneau de A et qui est une $\mathbb{K}$-algèbre pour ces lois.