# Lecture II : Prérequis sur les modules

Laurent Poinsot

15 janvier 2009

Soit $R$ un anneau. Un $R$-**module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un **$R$-module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r+s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m+n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un **$R$-module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un $R$-**module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un $R$-**module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un $R$**-module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un **$R$-module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Soit $R$ un anneau. Un **$R$-module à gauche** est un groupe abélien $M$, noté additivement, sur lequel $R$ agit linéairement ; c'est-à-dire qu'il existe une application de $R \times M$ dans $M$, $(r, m) \mapsto rm$ pour $r \in R$ et $m \in M$, telle que

1. $(r + s)m = rm + sm$ ;
2. $r(m + n) = rm + rn$ ;
3. $(rs)m = r(sm)$ ;
4. $1m = m$

pour $r, s \in R$ et $m, n \in M$.

Un $R$-module peut se voir comme un espace vectoriel sur un anneau plutôt que sur un corps. Les éléments de $R$ sont alors les scalaires, et ceux de $M$, les vecteurs. L'application $(r, m) \to rm$ définie alors la multiplication par les scalaires de $R$.

Un $R$-module peut se voir comme un espace vectoriel sur un anneau plutôt que sur un corps. Les éléments de $R$ sont alors les scalaires, et ceux de $M$, les vecteurs. L'application $(r, m) \to rm$ définie alors la multiplication par les scalaires de $R$.

Un $R$-module peut se voir comme un espace vectoriel sur un anneau plutôt que sur un corps. Les éléments de $R$ sont alors les scalaires, et ceux de $M$, les vecteurs. L'application $(r, m) \to rm$ définie alors la multiplication par les scalaires de $R$.

Un $R$-module peut se voir comme un espace vectoriel sur un anneau plutôt que sur un corps. Les éléments de $R$ sont alors les scalaires, et ceux de $M$, les vecteurs. L'application $(r, m) \to rm$ définie alors la multiplication par les scalaires de $R$.

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de $R$ dans $M$**. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccc} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) \end{array} .$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de $R$ dans $M$**. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccc} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) . \end{array}$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de $R$ dans $M$**. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccc} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) . \end{array}$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de** $R$ **dans** $M$. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccl} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) . \end{array}$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de $R$ dans $M$**. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccl} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) . \end{array}$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de** $R$ **dans** $M$. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccc} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) \end{array} .$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de** $R$ **dans** $M$. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rcl} \rho : \quad R & \to & \mathrm{End}(M) \\ r & \mapsto & \left( \begin{array}{rcl} \rho_r : \quad M & \to & M \\ m & \mapsto & rm \end{array} \right) . \end{array}$$

On peut voir les $R$-modules d'un autre façon : $M$ est un $R$-module si, et seulement si, $M$ est un groupe commutatif équipé d'un homomorphisme d'anneaux $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, appelé **application de structure** ou **représentation de** $R$ **dans** $M$. En effet supposons que $M$ soit un $R$-module, alors on peut définir l'application $\rho$ comme suit

$$\begin{array}{rccl} \rho : & R & \to & \mathrm{End}(M) \\ & r & \mapsto & \left( \begin{array}{rccc} \rho_r : & M & \to & M \\ & m & \mapsto & rm \end{array} \right) \end{array} .$$

Inversement si un groupe abélien $M$ est muni d'une application de structure $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, alors on définit la multiplication par les scalaires de $R$ par

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & \rho(r)(m) . \end{array}$$

Inversement si un groupe abélien $M$ est muni d'une application de structure $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, alors on définit la multiplication par les scalaires de $R$ par

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & \rho(r)(m) . \end{array}$$

Inversement si un groupe abélien $M$ est muni d'une application de structure $\rho : R \to \mathrm{End}(M)$, alors on définit la multiplication par les scalaires de $R$ par

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \to & M \\ (r, m) & \mapsto & \rho(r)(m) \,. \end{array}$$

Il existe une notion correspondante de $R$-module à droite.
Dans la suite, on supposera que les modules sont des modules à gauche.

Il existe une notion correspondante de $R$-module à droite. Dans la suite, on supposera que les modules sont des modules à gauche.

# Exemples



1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples

1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples

1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples

1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples



1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples

1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples



1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples



1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples



1. Un idéal à gauche $I$ d'un anneau $R$ est un $R$-module à gauche. En particulier, $R$ est lui-même un $R$-module ;
2. Tout espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module. Un module (à gauche) sur un corps gauche $\mathbb{D}$ est aussi appelé un $\mathbb{D}$-espace vectoriel (à gauche) ;
3. Tout groupe abélien est un $\mathbb{Z}$-module ;
4. Le produit cartésien $R^n = \underbrace{R \times \cdots \times R}_{n \text{ fois}}$ est de façon naturelle un $R$-module ;
5. L'ensemble $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ sur un anneau $R$ est un $R$-module avec l'addition des matrices. L'action de $R$ sur $\mathcal{M}_n(R)$ est définie, pour $r \in R$ et $M \in \mathcal{M}_n(R)$, par $r \mapsto rM$, où $rM$ dénote la matrice dont l'élément $(i, j)$ est $r$ fois l'élément $(i, j)$ de $M$.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble et $R$ un anneau. Soit $R[E]$ l'ensemble des expressions formelles $\sum_{e \in E} r_e e$ où tous les coefficients $r_e \in R$ - sauf un nombre fini - sont nuls est un $R$-module appelé $R$-**module libre de base** $E$. L'addition est définie par $\sum_{e \in E} r_e e + \sum_{e \in E} s_e e := \sum_{e \in E} (r_e + s_e) e$. Son élément neutre est $0 := \sum_{e \in E} 0e$. La multiplication par les scalaires de $R$ est quant à elle donnée par $r(\sum_{e \in E} r_e e) := \sum_{e \in E} (rr_e) e$.

# Exemples (suite)



Soient $E$ un ensemble et $R$ un anneau. Soit $R[E]$ l'ensemble des expressions formelles $\sum_{e \in E} r_e e$ où tous les coefficients $r_e \in R$ - sauf un nombre fini - sont nuls est un $R$-module appelé $R$-**module libre de base** $E$. L'addition est définie par $\sum_{e \in E} r_e e + \sum_{e \in E} s_e e := \sum_{e \in E} (r_e + s_e) e$. Son élément neutre est $0 := \sum_{e \in E} 0e$. La multiplication par les scalaires de $R$ est quant à elle donnée par $r(\sum_{e \in E} r_e e) := \sum_{e \in E} (r r_e) e$.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble et $R$ un anneau. Soit $R[E]$ l'ensemble des expressions formelles $\sum_{e \in E} r_e e$ où tous les coefficients $r_e \in R$ - sauf un nombre fini - sont nuls est un $R$-module appelé **$R$-module libre de base $E$**. L'addition est définie par $\sum_{e \in E} r_e e + \sum_{e \in E} s_e e := \sum_{e \in E} (r_e + s_e) e$. Son élément neutre est $0 := \sum_{e \in E} 0 e$. La multiplication par les scalaires de $R$ est quant à elle donnée par $r(\sum_{e \in E} r_e e) := \sum_{e \in E} (r r_e) e$.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble et $R$ un anneau. Soit $R[E]$ l'ensemble des expressions formelles $\sum_{e\in E} r_e e$ où tous les coefficients $r_e \in R$ - sauf un nombre fini - sont nuls est un $R$-module appelé **$R$-module libre de base $E$**. L'addition est définie par $\sum_{e\in E} r_e e + \sum_{e\in E} s_e e := \sum_{e\in E}(r_e + s_e)e$. Son élément neutre est $0 := \sum_{e\in E} 0e$. La multiplication par les scalaires de $R$ est quant à elle donnée par $r(\sum_{e\in E} r_e e) := \sum_{e\in E}(rr_e)e$.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble et $R$ un anneau. Soit $R[E]$ l'ensemble des expressions formelles $\sum_{e \in E} r_e e$ où tous les coefficients $r_e \in R$ - sauf un nombre fini - sont nuls est un $R$-module appelé **$R$-module libre de base** $E$. L'addition est définie par $\sum_{e \in E} r_e e + \sum_{e \in E} s_e e := \sum_{e \in E} (r_e + s_e) e$. Son élément neutre est $0 := \sum_{e \in E} 0e$. La multiplication par les scalaires de $R$ est quant à elle donnée par $r(\sum_{e \in E} r_e e) := \sum_{e \in E} (rr_e) e$.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble et $R$ un anneau. Soit $R[E]$ l'ensemble des expressions formelles $\sum_{e \in E} r_e e$ où tous les coefficients $r_e \in R$ - sauf un nombre fini - sont nuls est un $R$-module appelé **$R$-module libre de base** $E$. L'addition est définie par $\sum_{e \in E} r_e e + \sum_{e \in E} s_e e := \sum_{e \in E} (r_e + s_e) e$. Son élément neutre est $0 := \sum_{e \in E} 0e$. La multiplication par les scalaires de $R$ est quant à elle donnée par $r(\sum_{e \in E} r_e e) := \sum_{e \in E} (rr_e) e$.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

# Exemples (suite)



Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

# Exemples (suite)



Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

# Exemples (suite)



Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

# Exemples (suite)



Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

# Exemples (suite)

Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

# Exemples (suite)



Soient $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Notons $R^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $R$. Soient $f, g \in R^E$. On définit $f + g \in R^E$ par $(f + g)(e) := f(e) + g(e)$ pour tout $e \in E$. Soit $r \in R$. On pose $rf \in R^E$ défini par $(rf)(e) := rf(e)$ pour tout $e \in E$. Ainsi équipé, $R^E$ est un $R$-module.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m+n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Soient $M$ et $N$ deux $R$-modules. Une application $f : M \to N$ est un **homomorphisme de $R$-modules** si, et seulement si, pour tous $m, n \in M$, $r \in R$,

1. $f(m + n) = f(m) + f(n)$ ;
2. $f(rm) = rf(m)$.

On dit aussi que $f$ est **$R$-linéaire**. Notons que la composition de deux homomorphismes de $R$-modules est encore un homomorphisme de $R$-modules. Un **endomorphisme de $R$-module** est un homomorphisme d'un $R$-module dans lui-même. On note $\mathrm{End}_R(M)$ l'ensemble des endomorphismes du $R$-module $M$. Il s'agit d'un anneau pour l'addition terme à terme et la composition (l'application identique est alors l'élément neutre de la multiplication). Un homomorphisme $f : M \to N$ qui est également une bijection est un **isomorphisme de $R$-modules** ; $M$ et $N$ sont alors des **modules isomorphes**.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Un sous-ensemble $N$ d'un module $M$ est un **sous-module** (ou **sous-$R$-module**) de $M$ si, et seulement si, $N$ est un sous-groupe additif de $M$ et si $rn \in N$ pour tous $r \in R, n \in N$. Ainsi les sous-$R$-modules d'un anneau $R$ sont précisément ses idéaux à gauche.

Exemple :

Considérons $E$ un ensemble quelconque et $R$ un anneau. Pour tout $e \in E$, soit $\delta_e : E \to R$ qui envoie $e$ sur 1 et tout élément $e' \in E$, tel que $e' \neq e$, sur 0. Considérons $N$ l'ensemble des combinaisons $R$-linéaires (finies) de $\delta_e$ pour $e$ parcourant $E$. Alors $N$ est un sous-module de $R^E$, isomorphe à $R[E]$.

Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de $R$-modules, posons

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & := & \{m \in M : f(m) = 0\} \\ \mathrm{im}(f) & := & f(M) \end{array}$$

le **noyau** et l'**image** de $f$. Il est facile de vérifier que $\ker(f)$ est un sous-module de $M$ et $\mathrm{im}(f)$ un sous-module de $N$.

Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de $R$-modules, posons

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & := & \{m \in M : f(m) = 0\} \\ \mathrm{im}(f) & := & f(M) \end{array}$$

le **noyau** et l'**image** de $f$. Il est facile de vérifier que $\ker(f)$ est un sous-module de $M$ et $\mathrm{im}(f)$ un sous-module de $N$.

Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de $R$-modules, posons

$$\begin{array}{rcl} \ker(f) & := & \{m \in M : f(m) = 0\} \\ \mathrm{im}(f) & := & f(M) \end{array}$$

le **noyau** et l'**image** de $f$. Il est facile de vérifier que $\ker(f)$ est un sous-module de $M$ et $\mathrm{im}(f)$ un sous-module de $N$.

Si $f : M \to N$ est un homomorphisme de $R$-modules, posons

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ker}(f) & := & \{m \in M : f(m) = 0\} \\ \mathrm{im}(f) & := & f(M) \end{array}$$

le **noyau** et l'**image** de $f$. Il est facile de vérifier que $\mathrm{ker}(f)$ est un sous-module de $M$ et $\mathrm{im}(f)$ un sous-module de $N$.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m)\ .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de $m$**, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de $M$**, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) \ .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) \ .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si, quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) \ .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) \ .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m) .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.

En particulier, pour $m \in M$ fixé, le noyau de l'homomorphisme de $R$-modules $\phi_m : R \to M$ donné par $\phi_m(r) := rm$ est un sous-module (c'est-à-dire un idéal à gauche) de $R$. Plus explicitement, ce noyau est $\{r \in R : rm = 0\}$. Cet idéal de $R$ est appelé l'**annulateur de** $m$, et est noté $\mathrm{ann}(m)$. L'intersection des annulateurs de chaque élément de $M$ est appelé l'**annulateur de** $M$, noté $\mathrm{ann}(M)$ :

$$\mathrm{ann}(M) := \bigcap_{m \in M} \mathrm{ann}(m)\ .$$

Ainsi $r \in \mathrm{ann}(M)$ si, et seulement si,quel que soit $m \in M$, $rm = 0$. Un $R$-module $M$ est dit **fidèle** si, et seulement si, $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$, soit en d'autres termes l'unique élément de $r$ qui annule tous les éléments de $m$ est 0.