Lecture I : Prérequis sur les anneaux

Laurent Poinsot

12 février 2009

Plan

1. Objectifs du cours
2. Prérequis sur les anneaux

Plan

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L} b_{n+1} = \beta(n) b_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{L} b_0 = 0 \ .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R} b_n = \alpha(n) b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L} b_{n+1} = \beta(n) b_n \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{L} b_0 = 0 .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R} b_n = \alpha(n) b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L}b_{n+1} = \beta(n)b_n \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{L}b_0 = 0\ .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R}b_n = \alpha(n)b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L} b_{n+1} = \beta(n) b_n \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \mathrm{L} b_0 = 0 \; .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R} b_n = \alpha(n) b_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.
Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.
On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L}b_{n+1} = \beta(n)b_n \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \mathrm{L}b_0 = 0 \ .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R}b_n = \alpha(n)b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.
Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.
On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathtt{L}b_{n+1} = \beta(n)b_n \; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathtt{L}b_0 = 0 \; .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathtt{R}b_n = \alpha(n)b_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathtt{L}b_{n+1} = \beta(n)b_n \;\forall n \in \mathbb{N},\; \mathtt{L}b_0 = 0 \;.$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathtt{R}b_n = \alpha(n)b_{n+1} \;\forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.
Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.
On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathtt{L} b_{n+1} = \beta(n) b_n \ \forall n \in \mathbb{N},\ \mathtt{L} b_0 = 0 \ .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R} b_n = \alpha(n) b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L}b_{n+1} = \beta(n)b_n \; \forall n \in \mathbb{N}, \; \mathrm{L}b_0 = 0 \; .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R}b_n = \alpha(n)b_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Le but de ce cours est d'étudier un cas particulier de système de transition : celui des opérateurs montants et descendants.

Soit V un espace vectoriel de dimension infinie dénombrable sur un corps $\mathbb{K}$. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base de V indicée sur $\mathbb{N}$.

On définit l'**opérateur descendant** L par les transitions :

$$\mathrm{L}b_{n+1} = \beta(n)b_n \, \forall n \in \mathbb{N}, \; \mathrm{L}b_0 = 0 \; .$$

On définit l'**opérateur montant** R par la transition :

$$\mathrm{R}b_n = \alpha(n)b_{n+1} \; \forall n \in \mathbb{N}$$

où $\alpha, \beta : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ sont des applications quelconques.

Par exemple, $V = \mathbb{C}[x]$, $b_n := \frac{x^n}{n!}$, $L := \frac{d}{dx}$.
On peut aussi choisir $b_n := x^n$ et $R : p(x) \mapsto xp(x)$.

Par exemple, $V = \mathbb{C}[\mathrm{x}]$, $b_n := \frac{\mathrm{x}^n}{n!}$, $\mathrm{L} := \frac{d}{d\mathrm{x}}$.

On peut aussi choisir $b_n := x^n$ et $\mathrm{R} : p(\mathrm{x}) \mapsto \mathrm{x}p(\mathrm{x})$.

Par exemple, $V = \mathbb{C}[\mathrm{x}]$, $b_n := \frac{\mathrm{x}^n}{n!}$, $\mathrm{L} := \frac{d}{d\mathrm{x}}$.

On peut aussi choisir $b_n := x^n$ et $\mathrm{R} : p(\mathrm{x}) \mapsto \mathrm{x}p(\mathrm{x})$.

Par exemple, $V = \mathbb{C}[\mathrm{x}]$, $b_n := \frac{\mathrm{x}^n}{n!}$, $\mathrm{L} := \frac{d}{d\mathrm{x}}$.
On peut aussi choisir $b_n := x^n$ et $\mathrm{R} : p(\mathrm{x}) \mapsto \mathrm{x}p(\mathrm{x})$.

Par exemple, $V = \mathbb{C}[x]$, $b_n := \frac{x^n}{n!}$, $\mathrm{L} := \frac{d}{dx}$.
On peut aussi choisir $b_n := x^n$ et $\mathrm{R} : p(x) \mapsto xp(x)$.

Par exemple, $V = \mathbb{C}[\mathrm{x}]$, $b_n := \frac{\mathrm{x}^n}{n!}$, $\mathrm{L} := \frac{d}{d\mathrm{x}}$.
On peut aussi choisir $b_n := x^n$ et $\mathrm{R} : p(\mathrm{x}) \mapsto \mathrm{x}p(\mathrm{x})$.

Le but principal est de démontrer le résultat de combinatoire suivant : tout opérateur sur V peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de $\mathtt{R}^i$ et $\mathtt{L}^j$.

Ce résultat est à lié à un théorème classique d'algèbre, à savoir, le *théorème de densité de Jacobson*, qui affirme que les puissances de $\mathtt{L}$ et de $\mathtt{R}$ forment un anneau dense d'applications dans les endomorphismes de V. Néanmoins le résultat de combinatoire est beaucoup plus précis, car il est constructif : il donne, de façon algorithmique, les approximations successives. Dans ce cas, la combinatoire fait mieux que l'algèbre !

Le but principal est de démontrer le résultat de combinatoire suivant : tout opérateur sur V peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de $\mathtt{R}^i$ et $\mathtt{L}^j$.

Ce résultat est à lié à un théorème classique d'algèbre, à savoir, le *théorème de densité de Jacobson*, qui affirme que les puissances de $\mathtt{L}$ et de $\mathtt{R}$ forment un anneau dense d'applications dans les endomorphismes de V. Néanmoins le résultat de combinatoire est beaucoup plus précis, car il est constructif : il donne, de façon algorithmique, les approximations successives. Dans ce cas, la combinatoire fait mieux que l'algèbre !

Le but principal est de démontrer le résultat de combinatoire suivant : tout opérateur sur V peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de $\mathtt{R}^i$ et $\mathtt{L}^j$.
Ce résultat est à lié à un théorème classique d'algèbre, à savoir, le *théorème de densité de Jacobson*, qui affirme que les puissances de $\mathtt{L}$ et de $\mathtt{R}$ forment un anneau dense d'applications dans les endomorphismes de V. Néanmoins le résultat de combinatoire est beaucoup plus précis, car il est constructif : il donne, de façon algorithmique, les approximations successives. Dans ce cas, la combinatoire fait mieux que l'algèbre !

Le but principal est de démontrer le résultat de combinatoire suivant : tout opérateur sur V peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de $\mathtt{R}^i$ et $\mathtt{L}^j$.
Ce résultat est à lié à un théorème classique d'algèbre, à savoir, le *théorème de densité de Jacobson*, qui affirme que les puissances de $\mathtt{L}$ et de $\mathtt{R}$ forment un anneau dense d'applications dans les endomorphismes de V. Néanmoins le résultat de combinatoire est beaucoup plus précis, car il est constructif : il donne, de façon algorithmique, les approximations successives. Dans ce cas, la combinatoire fait mieux que l'algèbre !

Le but principal est de démontrer le résultat de combinatoire suivant : tout opérateur sur V peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de $\mathtt{R}^i$ et $\mathtt{L}^j$.
Ce résultat est à lié à un théorème classique d'algèbre, à savoir, le *théorème de densité de Jacobson*, qui affirme que les puissances de $\mathtt{L}$ et de $\mathtt{R}$ forment un anneau dense d'applications dans les endomorphismes de V. Néanmoins le résultat de combinatoire est beaucoup plus précis, car il est constructif : il donne, de façon algorithmique, les approximations successives. Dans ce cas, la combinatoire fait mieux que l'algèbre !

Le but principal est de démontrer le résultat de combinatoire suivant : tout opérateur sur V peut s'écrire comme une combinaison linéaire infinie de $\mathtt{R}^i$ et $\mathtt{L}^j$.
Ce résultat est à lié à un théorème classique d'algèbre, à savoir, le *théorème de densité de Jacobson*, qui affirme que les puissances de $\mathtt{L}$ et de $\mathtt{R}$ forment un anneau dense d'applications dans les endomorphismes de V. Néanmoins le résultat de combinatoire est beaucoup plus précis, car il est constructif : il donne, de façon algorithmique, les approximations successives. Dans ce cas, la combinatoire fait mieux que l'algèbre !

Bien que ce résultat combinatoire soit vraie dans toute sa généralité, nous nous bornerons en fait au cas où V est l'espace des polynômes, $\mathtt{L}$ est la dérivation formelle et $\mathtt{R}$ l'opérateur de multiplication par la variable $\mathtt{x}$.

Dans ce cours, nous aurons besoin des notions d'anneaux, de modules et d'algèbres qui seront appelées.

Commençons immédiatement par les rappels sur les anneaux.

Bien que ce résultat combinatoire soit vraie dans toute sa généralité, nous nous bornerons en fait au cas où V est l'espace des polynômes, $\mathtt{L}$ est la dérivation formelle et $\mathtt{R}$ l'opérateur de multiplication par la variable $\mathtt{x}$.

Dans ce cours, nous aurons besoin des notions d'anneaux, de modules et d'algèbres qui seront appelées.

Commençons immédiatement par les rappels sur les anneaux.

Bien que ce résultat combinatoire soit vraie dans toute sa généralité, nous nous bornerons en fait au cas où V est l'espace des polynômes, $\mathtt{L}$ est la dérivation formelle et $\mathtt{R}$ l'opérateur de multiplication par la variable $\mathtt{x}$.
Dans ce cours, nous aurons besoin des notions d'anneaux, de modules et d'algèbres qui seront appelées.
Commençons immédiatement par les rappels sur les anneaux.

Un **anneau** R est un ensemble avec deux opérations binaires, appelées **addition** et **multiplication**, tel que

1. R muni de la loi d'addition est un groupe abélien ;
2. La multiplication est associative, *i.e.*, $(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in R$;
3. Il existe un élément distingué $1 \in R$ tel que $1x = x1 = x$ pour tout $x \in R$;
4. La propriété de distributivité est valide dans R : $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$ pour tous $x, y, z \in R$.

Un **anneau** R est un ensemble avec deux opérations binaires, appelées **addition** et **multiplication**, tel que

1. R muni de la loi d'addition est un groupe abélien ;
2. La multiplication est associative, *i.e.*, $(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in R$;
3. Il existe un élément distingué $1 \in R$ tel que $1x = x1 = x$ pour tout $x \in R$;
4. La propriété de distributivité est valide dans R : $x(y + z) = xy + xz$ et $(x + y)z = xz + yz$ pour tous $x, y, z \in R$.

Un **anneau** R est un ensemble avec deux opérations binaires, appelées **addition** et **multiplication**, tel que

1. R muni de la loi d'addition est un groupe abélien ;
2. La multiplication est associative, *i.e.*, $(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in R$;
3. Il existe un élément distingué $1 \in R$ tel que $1x = x1 = x$ pour tout $x \in R$;
4. La propriété de distributivité est valide dans R : $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$ pour tous $x, y, z \in R$.

Un **anneau** R est un ensemble avec deux opérations binaires, appelées **addition** et **multiplication**, tel que

1. R muni de la loi d'addition est un groupe abélien ;
2. La multiplication est associative, *i.e.*, $(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in R$;
3. Il existe un élément distingué $1 \in R$ tel que $1x = x1 = x$ pour tout $x \in R$;
4. La propriété de distributivité est valide dans R : $x(y + z) = xy + xz$ et $(x + y)z = xz + yz$ pour tous $x, y, z \in R$.

Un **anneau** R est un ensemble avec deux opérations binaires, appelées **addition** et **multiplication**, tel que

1. R muni de la loi d'addition est un groupe abélien ;
2. La multiplication est associative, *i.e.*, $(xy)z = x(yz)$ pour tous $x, y, z \in R$;
3. Il existe un élément distingué $1 \in R$ tel que $1x = x1 = x$ pour tout $x \in R$;
4. La propriété de distributivité est valide dans R : $x(y+z) = xy + xz$ et $(x+y)z = xz + yz$ pour tous $x, y, z \in R$.

L'élément $1 \in R$ est appelé l'**identité**, ou **élément neutre** de l'anneau R. Nous dénoterons toujours l'élément neutre pour l'addition à l'aide du chiffre "0". R est un **anneau commutatif** si, et seulement si, $xy = yx$ pour tous $x, y \in R$. Dans la suite nous ne supposerons pas que les anneaux sont commutatifs.

L'élément $1 \in R$ est appelé l'**identité**, ou **élément neutre** de l'anneau R. Nous dénoterons toujours l'élément neutre pour l'addition à l'aide du chiffre "0". R est un **anneau commutatif** si, et seulement si, $xy = yx$ pour tous $x, y \in R$. Dans la suite nous ne supposerons pas que les anneaux sont commutatifs.

L'élément $1 \in R$ est appelé l'**identité**, ou **élément neutre** de l'anneau R. Nous dénoterons toujours l'élément neutre pour l'addition à l'aide du chiffre "0". R est un **anneau commutatif** si, et seulement si, $xy = yx$ pour tous $x, y \in R$.

Dans la suite nous ne supposerons pas que les anneaux sont commutatifs.

L'élément $1 \in R$ est appelé l'**identité**, ou **élément neutre** de l'anneau R. Nous dénoterons toujours l'élément neutre pour l'addition à l'aide du chiffre "0". R est un **anneau commutatif** si, et seulement si, $xy = yx$ pour tous $x, y \in R$. Dans la suite nous ne supposerons pas que les anneaux sont commutatifs.

Remarque

Il est possible de remplacer l'axiome (1) de la définition des anneaux par la propriété plus générale

(1') R muni de la loi d'addition est un groupe ;

Néanmoins la classe des objets ainsi obtenus ne change pas. En d'autres termes, si R est un anneau (au sens où (1') est vérifié), alors le groupe additif R est commutatif (et donc R satisfait (1)).

Remarque

Il est possible de remplacer l'axiome (1) de la définition des anneaux par la propriété plus générale

(1') R muni de la loi d'addition est un groupe ;

Néanmoins la classe des objets ainsi obtenus ne change pas. En d'autres termes, si R est un anneau (au sens où (1') est vérifié), alors le groupe additif R est commutatif (et donc R satisfait (1)).

Remarque

Il est possible de remplacer l'axiome (1) de la définition des anneaux par la propriété plus générale

(1') R muni de la loi d'addition est un groupe ;

Néanmoins la classe des objets ainsi obtenus ne change pas. En d'autres termes, si R est un anneau (au sens où (1') est vérifié), alors le groupe additif R est commutatif (et donc R satisfait (1)).

Remarque

Il est possible de remplacer l'axiome (1) de la définition des anneaux par la propriété plus générale

(1') R muni de la loi d'addition est un groupe ;

Néanmoins la classe des objets ainsi obtenus ne change pas. En d'autres termes, si R est un anneau (au sens où (1') est vérifié), alors le groupe additif R est commutatif (et donc R satisfait (1)).

Remarque

Il est possible de remplacer l'axiome (1) de la définition des anneaux par la propriété plus générale

(1') R muni de la loi d'addition est un groupe ;

Néanmoins la classe des objets ainsi obtenus ne change pas. En d'autres termes, si R est un anneau (au sens où (1') est vérifié), alors le groupe additif R est commutatif (et donc R satisfait (1)).

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).

Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R. Dans ce cas, $(a+b)+(b+a)=a+(b+b)+a=a+[(1+1)b]+a=a+a=(1+1)a=0$. Donc $a+b=-(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a\in R$, $a=-a$ puisque $a+a=(1+1)a=0$. Il en résulte donc que $a+b=b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R.
Dans ce cas, $(a+b)+(b+a)=a+(b+b)+a=a+[(1+1)b]+a=a+a=(1+1)a=0$. Donc $a+b=-(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a\in R$, $a=-a$ puisque $a+a=(1+1)a=0$. Il en résulte donc que $a+b=b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R.
Dans ce cas, $(a+b)+(b+a) = a+(b+b)+a = a+[(1+1)b]+a = a+a = (1+1)a = 0$. Donc $a+b = -(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a+a = (1+1)a = 0$. Il en résulte donc que $a+b = b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1 + 1 = 0$ dans R.
Dans ce cas, $(a + b) + (b + a) = a + (b + b) + a = a + [(1 + 1)b] + a = a + a = (1 + 1)a = 0$. Donc $a + b = -(b + a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a + a = (1 + 1)a = 0$. Il en résulte donc que $a + b = b + a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R.
Dans ce cas, $(a+b)+(b+a)=a+(b+b)+a=a+[(1+1)b]+a=a+a=(1+1)a=0$. Donc $a+b=-(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a=-a$ puisque $a+a=(1+1)a=0$. Il en résulte donc que $a+b=b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R.
Dans ce cas, $(a+b)+(b+a) = a+(b+b)+a = a+[(1+1)b]+a = a+a = (1+1)a = 0$. Donc $a+b = -(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a+a = (1+1)a = 0$. Il en résulte donc que $a+b = b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R. Dans ce cas, $(a+b)+(b+a)=a+(b+b)+a=a+[(1+1)b]+a=a+a=(1+1)a=0$. Donc $a+b=-(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a=-a$ puisque $a+a=(1+1)a=0$. Il en résulte donc que $a+b=b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R.
Dans ce cas, $(a+b)+(b+a)=a+(b+b)+a=a+[(1+1)b]+a=a+a=(1+1)a=0$. Donc $a+b=-(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a\in R$, $a=-a$ puisque $a+a=(1+1)a=0$. Il en résulte donc que $a+b=b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1 + 1 = 0$ dans R.
Dans ce cas, $(a + b) + (b + a) = a + (b + b) + a = a + [(1 + 1)b] + a = a + a = (1 + 1)a = 0$. Donc $a + b = -(b + a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a + a = (1 + 1)a = 0$. Il en résulte donc que $a + b = b + a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R. Dans ce cas, $(a+b)+(b+a) = a+(b+b)+a = a+[(1+1)b]+a = a+a = (1+1)a = 0$. Donc $a+b = -(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a+a = (1+1)a = 0$. Il en résulte donc que $a+b = b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1 + 1 = 0$ dans R.
Dans ce cas, $(a + b) + (b + a) = a + (b + b) + a = a + [(1 + 1)b] + a = a + a = (1 + 1)a = 0$. Donc $a + b = -(b + a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a + a = (1 + 1)a = 0$. Il en résulte donc que $a + b = b + a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1 + 1 = 0$ dans R.
Dans ce cas, $(a + b) + (b + a) = a + (b + b) + a = a + [(1 + 1)b] + a = a + a = (1 + 1)a = 0$. Donc $a + b = -(b + a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a + a = (1 + 1)a = 0$. Il en résulte donc que $a + b = b + a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R. Dans ce cas, $(a+b)+(b+a)=a+(b+b)+a=a+[(1+1)b]+a=a+a=(1+1)a=0$. Donc $a+b=-(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a=-a$ puisque $a+a=(1+1)a=0$. Il en résulte donc que $a+b=b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Preuve

Soit R un anneau au sens généralisé (c'est-à-dire (1') est satisfait plutôt que (1)).
Supposons dans un premier temps que $1+1=0$ dans R. Dans ce cas, $(a+b)+(b+a) = a+(b+b)+a = a+[(1+1)b]+a = a+a = (1+1)a = 0$. Donc $a+b = -(b+a)$. Par ailleurs pour tout $a \in R$, $a = -a$ puisque $a+a = (1+1)a = 0$. Il en résulte donc que $a+b = b+a$ et R vérifie ainsi (1) ;

Supposons maintenant que $1 + 1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a] + [(1+1)b] \\ &= (a+a) + (b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)] + [1(a+b)] \\ &= (a+b) + (a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a + a + b + b = a + b + a + b\ .$$

Supposons maintenant que $1 + 1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a] + [(1+1)b] \\ &= (a+a) + (b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)] + [1(a+b)] \\ &= (a+b) + (a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a + a + b + b = a + b + a + b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a]+[(1+1)b] \\ &= (a+a)+(b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)]+[1(a+b)] \\ &= (a+b)+(a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b = a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a] + [(1+1)b] \\ &= (a+a) + (b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)] + [1(a+b)] \\ &= (a+b) + (a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b = a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1 + 1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a] + [(1+1)b] \\ &= (a+a) + (b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)] + [1(a+b)] \\ &= (a+b) + (a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a + a + b + b = a + b + a + b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1\neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a]+[(1+1)b]\\ &= (a+a)+(b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)]+[1(a+b)]\\ &= (a+b)+(a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b=a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a]+[(1+1)b]\\ &= (a+a)+(b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)]+[1(a+b)]\\ &= (a+b)+(a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b = a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a] + [(1+1)b] \\ &= (a+a) + (b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)] + [1(a+b)] \\ &= (a+b) + (a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b = a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a] + [(1+1)b] \\ &= (a+a) + (b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)] + [1(a+b)] \\ &= (a+b) + (a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b = a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1 \neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a]+[(1+1)b] \\ &= (a+a)+(b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)]+[1(a+b)] \\ &= (a+b)+(a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b = a+b+a+b\ .$$

Supposons maintenant que $1+1\neq 0$. D'après la règle de distributivité, nous avons d'une part

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [(1+1)a]+[(1+1)b]\\ &= (a+a)+(b+b)\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}(1+1)(a+b) &= [1(a+b)]+[1(a+b)]\\ &= (a+b)+(a+b)\ .\end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a

$$a+a+b+b=a+b+a+b\ .$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{lll} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$
\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,.
\end{array}
$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a \,.
\end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,.
\end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a \,.
\end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,.
\end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{lrcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{lll} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$
\begin{array}{llll}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,.
\end{array}
$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,.
\end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{lrcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a \,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a \,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl}
 & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\
\Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\
\Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\
\Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\
\Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,.
\end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{lll} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Soit maintenant a' (resp. b') l'opposé de a (resp. b) pour l'addition (un tel élément existe puisque R est un groupe pour l'addition d'après (1')). On a donc en particulier $a' + a = a + a' = 0$ et $b' + b = b + b' = 0$. D'après ce que l'on a vu précédemment, on a

$$\begin{array}{rlcl} & a' + (a + a + b + b) & = & a' + (a + b + a + b) \\ \Leftrightarrow & (a' + a) + (a + b + b) & = & (a' + a) + (b + a + b) \\ \Leftrightarrow & a + b + b & = & b + a + b \\ \Rightarrow & (a + b + b) + b' & = & (b + a + b) + b' \\ \Leftrightarrow & a + b & = & b + a\,. \end{array}$$

Exemples

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n ;
3. $R[\mathrm{x}]$, anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans un anneau R ;
4. L'anneau $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau R, avec l'addition et la multiplication usuelles des matrices et la matrice identité de taille $n \times n$ comme identité ;
5. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes d'un groupe abélien G (avec l'addition terme à terme et la composition des endofonctions comme multiplication).

Exemples

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n ;
3. $R[\mathrm{x}]$, anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans un anneau R ;
4. L'anneau $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau R, avec l'addition et la multiplication usuelles des matrices et la matrice identité de taille $n \times n$ comme identité ;
5. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes d'un groupe abélien G (avec l'addition terme à terme et la composition des endofonctions comme multiplication).

Exemples

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n ;
3. $R[\mathrm{x}]$, anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans un anneau R ;
4. L'anneau $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau R, avec l'addition et la multiplication usuelles des matrices et la matrice identité de taille $n \times n$ comme identité ;
5. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes d'un groupe abélien G (avec l'addition terme à terme et la composition des endofonctions comme multiplication).

Exemples

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n ;
3. $R[\mathrm{x}]$, anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans un anneau R ;
4. L'anneau $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau R, avec l'addition et la multiplication usuelles des matrices et la matrice identité de taille $n \times n$ comme identité ;
5. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes d'un groupe abélien G (avec l'addition terme à terme et la composition des endofonctions comme multiplication).

Exemples

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n ;
3. $R[\mathrm{x}]$, anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans un anneau R ;
4. L'anneau $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau R, avec l'addition et la multiplication usuelles des matrices et la matrice identité de taille $n \times n$ comme identité ;
5. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes d'un groupe abélien G (avec l'addition terme à terme et la composition des endofonctions comme multiplication).

Exemples

1. $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$;
2. L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ des entiers modulo n ;
3. $R[\mathrm{x}]$, anneau des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans un anneau R ;
4. L'anneau $\mathcal{M}_n(R)$ des matrices de taille $n \times n$ à coefficients dans l'anneau R, avec l'addition et la multiplication usuelles des matrices et la matrice identité de taille $n \times n$ comme identité ;
5. L'anneau $\mathrm{End}(G)$ des endomorphismes d'un groupe abélien G (avec l'addition terme à terme et la composition des endofonctions comme multiplication).

Un **endomorphisme d'anneaux** est une application f d'un anneau R dans un anneau S tel que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; *i.e.*, f est un homomorphisme de groupes (abéliens), et en particulier $f(0) = 0$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$ (on dit aussi que f **préserve les identités**).

Notons bien que la propriété (3) n'est nullement une conséquence de (1) et (2). Par exemple l'homomorphisme de groupes abéliens $f : R \to R \times R$ donné par $f(x) = (x, 0)$ vérifie (1) et (2) mais pas (3).

Un **endomorphisme d'anneaux** est une application f d'un anneau R dans un anneau S tel que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; *i.e.*, f est un homomorphisme de groupes (abéliens), et en particulier $f(0) = 0$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$ (on dit aussi que f **préserve les identités**).

Notons bien que la propriété (3) n'est nullement une conséquence de (1) et (2). Par exemple l'homomorphisme de groupes abéliens $f : R \to R \times R$ donné par $f(x) = (x, 0)$ vérifie (1) et (2) mais pas (3).

Un **endomorphisme d'anneaux** est une application f d'un anneau R dans un anneau S tel que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; *i.e.*, f est un homomorphisme de groupes (abéliens), et en particulier $f(0) = 0$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$ (on dit aussi que f **préserve les identités**).

Notons bien que la propriété (3) n'est nullement une conséquence de (1) et (2). Par exemple l'homomorphisme de groupes abéliens $f : R \to R \times R$ donné par $f(x) = (x, 0)$ vérifie (1) et (2) mais pas (3).

Un **endomorphisme d'anneaux** est une application f d'un anneau R dans un anneau S tel que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; *i.e.*, f est un homomorphisme de groupes (abéliens), et en particulier $f(0) = 0$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$ (on dit aussi que f **préserve les identités**).

Notons bien que la propriété (3) n'est nullement une conséquence de (1) et (2). Par exemple l'homomorphisme de groupes abéliens $f : R \to R \times R$ donné par $f(x) = (x, 0)$ vérifie (1) et (2) mais pas (3).

Un **endomorphisme d'anneaux** est une application f d'un anneau R dans un anneau S tel que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; *i.e.*, f est un homomorphisme de groupes (abéliens), et en particulier $f(0) = 0$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$ (on dit aussi que f **préserve les identités**).

Notons bien que la propriété (3) n'est nullement une conséquence de (1) et (2). Par exemple l'homomorphisme de groupes abéliens $f : R \to R \times R$ donné par $f(x) = (x, 0)$ vérifie (1) et (2) mais pas (3).

Un **endomorphisme d'anneaux** est une application f d'un anneau R dans un anneau S tel que

1. $f(x+y) = f(x) + f(y)$; *i.e.*, f est un homomorphisme de groupes (abéliens), et en particulier $f(0) = 0$;
2. $f(xy) = f(x)f(y)$;
3. $f(1) = 1$ (on dit aussi que f **préserve les identités**).

Notons bien que la propriété (3) n'est nullement une conséquence de (1) et (2). Par exemple l'homomorphisme de groupes abéliens $f : R \to R \times R$ donné par $f(x) = (x, 0)$ vérifie (1) et (2) mais pas (3).

La composition d'homomorphismes d'anneaux est encore un homorphisme d'anneaux. Un **endomorphisme d'anneau** est un homomorphisme d'un anneau dans lui-même. Un **isomorphisme** d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux $f : R \to S$ qui est bijectif.

La composition d'homomorphismes d'anneaux est encore un homorphisme d'anneaux. Un **endomorphisme d'anneau** est un homomorphisme d'un anneau dans lui-même. Un **isomorphisme** d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux $f : R \to S$ qui est bijectif.

La composition d'homomorphismes d'anneaux est encore un homorphisme d'anneaux. Un **endomorphisme d'anneau** est un homomorphisme d'un anneau dans lui-même. Un **isomorphisme** d'anneaux est un homomorphisme d'anneaux $f : R \to S$ qui est bijectif.

Un sous-ensemble S d'un anneau R est un **sous-anneau** si, et seulement si, S est clos pour l'addition et la multiplication et contient la même identité que R. Un sous-ensemble I de R est un **idéal à gauche** de R si, et seulement si, I est un sous-groupe du groupe additif de R et si $ri \in I$ dès que $i \in I$ et $r \in R$; les notions d'idéaux à droite et bilatère sont définis de façon similaires.

Un sous-ensemble S d'un anneau R est un **sous-anneau** si, et seulement si, S est clos pour l'addition et la multiplication et contient la même identité que R. Un sous-ensemble I de R est un **idéal à gauche** de R si, et seulement si, I est un sous-groupe du groupe additif de R et si $ri \in I$ dès que $i \in I$ et $r \in R$; les notions d'idéaux à droite et bilatère sont définis de façon similaires.

Un sous-ensemble S d'un anneau R est un **sous-anneau** si, et seulement si, S est clos pour l'addition et la multiplication et contient la même identité que R. Un sous-ensemble I de R est un **idéal à gauche** de R si, et seulement si, I est un sous-groupe du groupe additif de R et si $ri \in I$ dès que $i \in I$ et $r \in R$; les notions d'idéaux à droite et bilatère sont définis de façon similaires.

Un sous-ensemble S d'un anneau R est un **sous-anneau** si, et seulement si, S est clos pour l'addition et la multiplication et contient la même identité que R. Un sous-ensemble I de R est un **idéal à gauche** de R si, et seulement si, I est un sous-groupe du groupe additif de R et si $ri \in I$ dès que $i \in I$ et $r \in R$; les notions d'idéaux à droite et bilatère sont définis de façon similaires.

Un sous-ensemble S d'un anneau R est un **sous-anneau** si, et seulement si, S est clos pour l'addition et la multiplication et contient la même identité que R. Un sous-ensemble I de R est un **idéal à gauche** de R si, et seulement si, I est un sous-groupe du groupe additif de R et si $ri \in I$ dès que $i \in I$ et $r \in R$; les notions d'idéaux à droite et bilatère sont définis de façon similaires.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de** R. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche**. Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de** R. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche**. Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de R**. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche**. Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de** R. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche**. Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de** R. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche**. Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de** R. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche.** Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Un **diviseur de zéro** dans un anneau R est un élément $r \in R$ pour lequel il existe un élément $s \neq 0$ de R tel que $rs = 0$. Un élément $r \in R$ est appelé une **unité** de R, et est dit **inversible**, si, et seulement si, il existe $s \in R$ tel que $rs = sr = 1$. Notons que l'ensemble des éléments inversibles d'un anneau R forme un groupe pour la multiplication, appelé **groupe des unités de** R. Un anneau tel que $1 \neq 0$ et tel que chaque élément non nul est inversible est appelé un **corps gauche**. Si la multiplication est en outre commutative, alors c'est un **corps**.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et n le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle n la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier n n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et n le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle n la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier n n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et n le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle n la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier n n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et n le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle n la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier n n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et *n* le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle *n* la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier *n* n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et *n* le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle *n* la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier *n* n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et *n* le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle *n* la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier *n* n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et *n* le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = 0$. On appelle *n* la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier *n* n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

Soit $\mathbb{K}$ un corps et *n* le plus petit entier pour lequel $\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n\ fois} = 0$. On appelle *n* la **caractéristique** de $\mathbb{K}$. On dit que $\mathbb{K}$ est de **caractéristique** 0 si aucun tel entier *n* n'existe. Il est facile de montrer que la caractéristique de n'importe quel corps est soit 0 soit un entier premier. Par exemple, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des corps de caractéristique 0. Un corps de caractéristique 0 contient nécessairement $\mathbb{Q}$ (plus précisémment un corps isomorphe à $\mathbb{Q}$). Dans la suite quand on parlera de corps de caractéristique zéro, vous pourrez penser à $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sans danger. Dans ce cours : dire que $\mathbb{K}$ *est un corps de caractérstique zéro* est équivalent à $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.