Travaux dirigés n^o 3 : Algèbre de Boole

Les composants électroniques d'un ordinateur manipulent des données binaires via des circuits logiques. Ces circuits effectuent des opérations élémentaires sur les bits ; des opérations logiques telles que la conjonction (et), la disjonction (ou), la négation (non) ou encore le XOR (ou-exclusif). Les exercices de ces travaux dirigés constituent une bref rappel d'algèbre de Boole (ou algèbre booléenne) permettant de mettre en œuvre les opérations de logique binaire.

1 Exercice n^o 1

Donner les tables de vérité des opérateurs logiques *et*, *ou*, *non* et *xor*.

2 Exercice n^o 2

Montrer comment l'opérateur *et* peut être obtenu à partir des opérateurs *ou* et *non*. De même pour l'opérateur *ou* avec les opérateurs *et* et *non*.

3 Exercice n^o 3

On note respectivement les opérateurs *ou*, *et*, *xor* et *non* par " $+$ ", " $\cdot$ ", " $\oplus$ " et " $\bar{\ }$ ". Montrer à l'aide de tables de vérité que $A \oplus B = (\overline{A} \cdot B) + (A \cdot \overline{B})$ et que $A \oplus B = (A + B) \cdot (\overline{A} + \overline{B})$.

Rappels

Les *lois de De Morgan* permettent de transformer une conjonction en une disjonction (et réciproquement) via la négation.

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B} \tag{1}$$

et

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}\ . \tag{2}$$

Parmi les règles de calcul logique importantes il y a aussi les règles suivantes.

1. *Règle de double-négation*
$$\overline{\overline{A}} = A\ . \tag{3}$$
2. *Règles de commutativité*
$$A \# B = B \# A \tag{4}$$
pour $\# = \cdot$ ou $\# = +$;
3. *Règles de distributivité*
$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C) \tag{5}$$
et
$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)\ . \tag{6}$$

4. *Règles d'associativité*
$$A\#(B\#C) = (A\#B)\#C \tag{7}$$
pour $\# = \cdot$ ou $\# = +$;
5. *Règles d'idempotence*
$$A\#A = A \tag{8}$$
pour $\# = \cdot$ ou $\# = +$.

Toute expression booléenne peut être écrite sous une forme particulière.

1. *Forme normale conjonctive* (FNC) : Une expression logique est en FNC si et seulement si elle est une conjonction d'une ou plusieurs disjonctions d'un ou plusieurs littéraux. Par exemple, $(A + \overline{B} + \overline{C}) \cdot (\overline{D} + E + F)$;
2. *Forme normale disjonctive* (FND) : Une expression logique est en FND si et seulement si elle est une disjonctions d'une ou plusieurs conjonctions d'un ou plusieurs littéraux. Par exemple, $(\overline{A} \cdot \overline{B}) + B + (\overline{C} \cdot D \cdot E)$;

Rappelons qu'un *littéral* est une variable booléenne (une lettre) ou la négation d'une variable.

4 Exercice n^o 4

Démontrer les deux dernières règles (associativité et idempotence) à l'aide d'une table de vérité.

5 Exercice n^o 5

Écrire l'expression $\overline{A + (\overline{B} \cdot C)}$ sous forme normale conjonctive et puis sous forme normale disjonctive.

6 Exercice n^o 6

Montrer que les deux règles d'associativité sont duales, *i.e.*, montrer qu'à partir de la règle d'associativité de l'opérateur *ou*, on peut déduire, en utilisant les règles précédentes (excepté l'associativité de l'opérateur *et*), la règle d'associativité de l'opérateur *et* (et inversement).

7 Exercice n^o 7

Écrire les expressions suivantes sous forme normale conjonctive puis sous forme normale disjonctive. (Pour la dernière formule, vous vous contenterez de donner sa FND.)

1. $\overline{A \oplus B}$;
2. $(\overline{A} \cdot B) + (\overline{A} \cdot B)$;
3. $(A + \overline{B}) \cdot (A + \overline{B})$;
4. $A + (A \cdot B)$;
5. $A \cdot (A + B)$;
6. $(\overline{A} \cdot B) + \overline{(A + \overline{B} + C + D)}$;
7. $A + (B \cdot \overline{C}) + ((\overline{A} \cdot \overline{(B \cdot \overline{C})}) \cdot ((A \cdot D) + B))$.