Série de Fourier

Exercice 1
Soit f la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = x$ sur $]-\pi, \pi]$.

1. Montrer que $Sf(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}\sin nx}{n}$. (On ne s'intéresse pas ici à la convergence de Sf.)
2. Montrer que pour tout $x \in]-\pi, \pi[$, $Sf(x) = x$ (convergence simple).
3. Qu'en est-il de la convergence simple de la série Sf en $x = \pi$?
4. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 2
Soit f 2π-périodique, impaire, définie par $f(x) = 1$ sur $]0, \pi[$ et $f(n\pi) = 0$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

1. Représenter f.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x)$.
3. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{2n+1} = \dfrac{\pi}{4}$.
4. Montrer que $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2} = \dfrac{\pi^2}{8}$.
5. En déduire que[1] $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$ et que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2} = -\dfrac{\pi^2}{12}$.

Exercice 3
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par $f(x) = |\cos(x)|$.

1. Calculer les coefficients de Fourier réels de f.
2. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$.

Exercice 4
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire et vérifiant

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}$$

sur $]0, \pi]$.

1. Préciser la convergence de la série de Fourier réelle de f.
2. Calculer la série de Fourier réelle de f.
3. En déduire la convergence et la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.
4. Calculer[2] $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$.

---

1. bis.
2. ter.

Exercice 5
Soit la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-périodique définie par $f(x) = e^x$ pour $x \in]-\pi, \pi]$.

1. Calculer les coefficients de Fourier complexes de f.
2. En déduire la valeur des sommes
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$$
et
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Exercice 6
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction paire, 2π-périodique, définie par $f(x) = 4x^2 - \pi^2$ si $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $f(x) = 8x\pi - 3\pi^2 - 4x^2$ sinon.

1. Montrer que f est de classe C^1 et exprimer sa dérivée.
2. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction f.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.