# Outils Mathématiques - Chapitre VI : Transformée de Laplace

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

# Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Intégrales multiples.
- Chap. VI : Transformée de Laplace.
- Chap. VII : Série de Fourier.
- Chap. VIII : Transformée de Fourier.
- Chap. IX : Transformée en Z.

# Table des matières

# Systèmes dynamiques temporels

La transformation de Laplace est particulièrement adaptée pour l'étude de la dynamique de systèmes physiques supposés dans un état connu à un certain instant, que l'on peut toujours prendre comme origine des temps.

Si on note $f$ la quantité physique d'intérêt, la question est ici de résoudre l'équation décrivant l'évolution de la grandeur $f$ en fonction du temps, et d'en obtenir l'expression $f(t)$ à un instant $t$ postérieur à celui pris pour origine des temps.

Dans les problèmes d'évolution temporelle, un état initial étant donné (à un instant pris conventionnellement comme origine des temps, $t = 0$), l'objectif est donc d'obtenir la fonction $f(t)$ à $t > 0$. Dans ces conditions, la fonction $f$ à $t < 0$ n'est pas définie, ou plus précisément, on se moque de savoir ce qu'elle vaut. C'est pourquoi il est usuel (et conventionnel) de la considérer nulle. Par exemple considérons un oscillateur harmonique à l'équilibre (position d'équilibre, vitesse nulle). S'il reçoit un choc à un certain instant ($t = 0$), son abscisse (et sa vitesse) vont par la suite osciller dans le temps et seront devenues non identiquement nulles.

# La transformée de Laplace pour quoi ?

La transformée de Laplace permet de passer d'un système d'évolution temporel à un système complexe (c'est-à-dire dépendant d'une variable complexe) lequel, parfois, est plus aisé à résoudre.

La transformée de Laplace étant inversible, si on a trouvé une solution au problème associé en la variable complexe, alors on obtient (par inversion) une solution au problème de départ décrit comme fonction du temps.

Le fait que le problème soit souvent plus simple à résoudre une fois la transformée de Laplace appliquée tient à ce que l'opération de dérivation se traduit, grossièrement, en une opération de multiplication par la variable complexe.

Partant d'un système différentiel à résoudre, on obtient, via la transformée de Laplace, un problème algébrique.

# Fonctions causales

Dans toute la suite, la transformée de Laplace sera définie exclusivement pour des fonctions nulles pour $t < 0$. De telles fonctions seront dites causales.

Notons toutefois que ce n'est pas toujours la variable temporelle qui nous intéresse : si on étudie le mouvement d'une particule confinée dans le demi-espace $\mathbb{R}_+$, toute grandeur relative à cette particule sera une fonction de l'abscisse $x$, nulle pour tout $x < 0$.

Néanmoins on notera toujours par $t$ la variable dont dépendront les fonctions étudiées.

# Table des matières

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ et à valeurs réelles ou complexes.

Si $\lim\limits_{R \to +\infty} \int_a^R f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge, ce que l'on note

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{R \to +\infty} \int_a^R f(t)dt.$$

On dit également que $f$ est intégrable.

L'intégrale est dite absolument convergente si $\int_a^{+\infty} |f(t)|dt$ converge. On dit également que $f$ est absolument intégrable.

**Théorème**

Si l'intégrale est absolument convergente, alors elle est convergente.

# Quelques propriétés

## Théorème

Soit $f$ à valeurs positives. L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge si, et seulement si, il existe un nombre $M$ tel que $\displaystyle\int_a^{R} f(t)dt \leq M$ quel que soit $R$. Dans ce cas, $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq M$.

## Théorème de comparaison

Soient $f$ et $g$ deux fonctions à valeurs positives définies sur $[a; +\infty[$ et telles que $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \geq a$.

- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = +\infty$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt = +\infty$.
- Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge, alors il en est de même de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ et $\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$.

# Table des matières

# Définition de la transformée de Laplace

La transformation de Laplace est une transformation intégrale qui associe une fonction d'une variable complexe à une fonction $f$, ce que l'on note parfois

$$F = \mathcal{L}(f) \text{ ou encore } f \xrightarrow{\mathcal{L}} F.$$

Si $f$ est une fonction à valeurs réelles ou complexes, d'une variable réelle $t$, sa transformée de Laplace (si elle existe) est la fonction $F$ définie par

$$F(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt$$

où $z$ est une variable complexe.

La transformation de Laplace est l'opération $\mathcal{L}$ qui permet de transformer $f$ en $F$.

# Fonctions causales

On remarque immédiatement que $F = \mathcal{L}(f)$ ne dépend que des valeurs de $f$ pour $t \geq 0$.

La transformée de Laplace concerne donc les phénomènes transitoires : avant une certaine date il n'y a rien, puis le phénomène physique se produit.

En prenant cet instant comme origine des temps, on peut donc bien entendu supposer que la fonction $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et vaut 0 identiquement sur $]-\infty; 0[$. On dit alors que $f$ est une fonction causale.

**Exemple**

La fonction échelon unité de Heaviside $\mathcal{U}$ telle que $\mathcal{U}(t) = 0$ pour tout $t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

**Remarque**

La fonction $f\mathcal{U} : t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ est causale quelle que soit la fonction $f$.

# Domaine de définition (1/6)

Donnons-nous une fonction causale $f$ et considérons
$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}dt.$

La toute première question à régler est de savoir dans quelles circonstances l'intégrale ci-dessus existe.

## Définition

Une fonction $f$ est dite à croissance au plus exponentielle quand il existe des nombres réels $M \geq 0, a \geq 0$ et $r$ tels que pour tout $t \geq a$,

$$|f(t)| \leq Me^{rt}.$$

(Autrement dit, au voisinage de $+\infty$, $|f|$ ne croît pas plus vite que l'exponentielle d'une fonction linéaire.)

# Domaine de définition (2/6)

## Définition

Une fonction objet est une fonction $f$ d'une variable réelle $t$ et à valeurs réelles ou complexes telles que

1. $f$ est causale,
2. $f$ est continue par morceaux sur $[0; +\infty[$ (nombre fini de points de discontinuité sur tout intervalle de longueur finie, et limite à gauche, sauf en 0, et à droite aux discontinuités),
3. $f$ est à croissance au plus exponentielle.

# Domaine de définition (3/6)

## (Contre-)Exemples

- Les fonctions $t \mapsto e^t \mathcal{U}(t)$, $t \mapsto \cos(\omega t)\mathcal{U}(t)$, $t \mapsto \sin(\omega t)\mathcal{U}(t)$ et $t \mapsto t^n \mathcal{U}(t)$, $n \in \mathbb{N}$, sont toutes des fonctions objets (rappelons qu'à l'infini, la fonction exponentielle l'emporte sur n'importe quelle fonction puissance positive).

- La fonction $t \mapsto e^{t^2} \mathcal{U}(t)$ n'est pas une fonction objet.

# Domaine de définition (4/6)

**Théorème**

Si $f$ est une fonction objet (telle que $|f(t)| \leq Me^{rt}$ pour tout $t \geq a$),

alors sa transformée de Laplace est absolument convergente pour tout $z$ tel que $\Re(z) > r$.

# Domaine de définition (5/6)

## Preuve

On doit montrer que $\int_0^R |f(t)e^{-zt}|dt$ admet une limite finie quand $R \to +\infty$ dès que $\Re(z) > r$.

On a $\int_0^R |f(t)e^{-zt}|dt = \int_0^a |f(t)||e^{-zt}|dt + \int_a^R |f(t)||e^{-zt}|dt$ (pour $R$ suffisamment grand). Posons $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Donc $|e^{-zt}| = |e^{-xt}||e^{-iyt}| = e^{-xt}$. Puis $\int_a^R |f(t)e^{-zt}|dt = \int_a^R |f(t)|e^{-xt}dt \leq \int_a^R Me^{(r-x)t}dt = M[\frac{e^{(r-x)t}}{r-x}]_a^R = \left(\frac{M}{r-x}\right)(e^{(r-x)R} - e^{(r-x)a})$.

Or $r - x < 0$ implique que $\lim_{R\to+\infty} e^{(r-x)R} = 0$, ce qui montre que $\int_a^{+\infty} |f(t)|e^{-xt}dt$ converge quand $x > r$.

# Domaine de définition (6/6)

## Preuve (suite et fin)

Comme par ailleurs $\int_0^a |f(t)||e^{-zt}|dt = \int_0^a |f(t)|e^{-xt}dt$ existe pour tout $x$, puisque $t \mapsto |f(t)|e^{-xt}$ est continue – sauf éventuellement en un nombre fini de points – et que l'intervalle sur lequel on intègre est compact (la fonction est donc intégrable au sens de Riemann), il en résulte que

$$\int_0^{+\infty} |f(t)e^{-zt}|dt = \int_0^a |f(t)|e^{-xt}dt + \lim_{R\to+\infty} \int_a^R |f(t)|e^{-xt}dt$$

converge pour tout $\Re(z) = x > r$. □

# Abscisse de convergence

Supposons que $f$ soit une fonction objet.

Alors d'après la preuve du théorème précédent il existe des réels $r$ pour lesquels l'intégrale $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}dt$ converge vers une limite finie.

On note

$$a(f) = \inf\{\, r \in \mathbb{R} \colon \int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}dt \text{ converge vers une limite finie} \,\}$$

où la borne inférieure est considérée dans la droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\, \pm\infty \,\}$, et $a(f)$ s'appelle l'abscisse de convergence de $f$.

En particulier, $a(f) = -\infty$ si, et seulement si, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}dt$ converge vers une limite finie.

On note que $a(f) \neq +\infty$ dès que $f$ est une fonction objet.

# Remarque

Supposons que pour un réel $r_1$ on ait $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-r_1 t}dt = +\infty$. Alors quel que soit $r_2 < r_1$, $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-r_2 t}dt = +\infty$.

En effet, $r_2 < r_1$ équivaut à $-r_2 > -r_1$ de sorte que $e^{-r_2 t} > e^{-r_1 t}$ et donc la divergence de $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-r_1 t}dt$ entraîne celle de $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-r_2 t}\mathrm{dt}$.

Il découle de cela que si pour un réel $r$ on a $\int_0^{+\infty} |f(t)|e^{-rt}dt = +\infty$, alors nécessairement $r \geq a(f)$.

Soit $f$ une fonction objet.

D'après ce qui précède sa transformée de Laplace $\mathcal{L}(f)$ est définie sur $\{ z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > a(f) \}$.

Plus précisément, l'intégrale $\mathcal{L}(f)(z)$ est absolument convergente pour tout $z$ complexe tel que $\Re(z) > a(f)$.

# Exemple

Considérons la fonction échelon unité $\mathcal{U}$ de Heaviside. C'est bien sûr une fonction objet.

Calculons son abscisse de convergence $a(\mathcal{U})$. Pour tout $r > 0$, $\int_0^{+\infty} e^{-rt} dt = \left[ -\frac{e^{-rt}}{r} \right]_0^{t \to +\infty} = \frac{1}{r}$. Il en résulte donc que $a(\mathcal{U}) = 0$ (en effet, l'intégrale précédente ne converge pas pour $r = 0$ par exemple).

Calculons maintenant sa transformée de Laplace : $\mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt} dt = \left[ -\frac{e^{-zt}}{z} \right]_0^{t \to +\infty} = \frac{1}{z}$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > 0$.

# Exemple (1/2)

Considérons la fonction $f(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$. C'est une fonction objet (elle est causale, continue sur $[0, +\infty[$ et à croissance au plus exponentielle puisque $|f(t)| \leq 1 \leq e^t$ pour tout $t \geq 0$).

Évaluons son abscisse de convergence :
$$\int_0^R |f(t)|e^{-rt}dt \leq \int_0^R e^{-rt}dt = \left[-\frac{e^{-rt}}{r}\right]_0^R = \frac{1}{r}(1 - e^{-rR}) \xrightarrow[R\to+\infty]{} \frac{1}{r}$$
pour tout $r > 0$. On a donc $a(f) \leq 0$. Mais sin n'est pas absolument intégrable donc $a(f) = 0$.

# Exemple (2/2)

Calculons sa transformée de Laplace :
$\displaystyle\int_0^R \sin(t)e^{-zt}dt = \left[-\cos(t)e^{-zt}\right]_{t=0}^{t=R} - \int_0^R \cos(t)ze^{-zt}dt$ (par IPP avec $u = e^{-zt}$ et $v' = \sin(t)$ de sorte que $v = -\cos(t)$)
$\displaystyle= -\cos(R)e^{-zR} + 1 - [\sin(t)ze^{-zt}]_{t=0}^{t=R} - \int_0^R \sin(t)z^2e^{-zt}dt$ (par IPP avec $v' = \cos(t)$ donc $v = \sin(t)$ et $u = ze^{-zt}$ donc $u' = -z^2e^{-zt}$) pour $\Re(z) > 0$.

Donc
$$(1+z^2)\int_0^R \sin(t)e^{-zt}dt = 1 - \cos(R)e^{-zR} - \sin(R)ze^{-zR} \xrightarrow[R\to+\infty]{} 1.$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(f)(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ pour tout complexe $z$ tel que $\Re(z) > 0$.

# Table des matières

# Continuité et limite

**Théorème (admis)**

La transformée de Laplace d'une fonction objet $f$ est continue sur $\{ z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > a(f) \}$.

De plus $\lim\limits_{|z| \to +\infty} \mathcal{L}(f)(z) = 0$ (avec $\Re(z) > a(f)$).

# Linéarité

## Proposition

Soient $f$ et $g$ deux fonctions objets, et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Alors $\alpha f$ est une fonction objet d'abscisse de convergence $a(\alpha f) = a(f)$ si $\alpha \neq 0$ et $-\infty$ si $\alpha = 0$. De plus $\mathcal{L}(\alpha f) = \alpha \mathcal{L}(f)$ sur $\{ z \in \mathbb{C} \colon z > a(f) \}$ (afin que le membre de droite ait un sens).

De plus $f + g$ est aussi une fonction objet d'abscisse de convergence $a(f+g) = \max\{ a(f), a(g) \}$ si $f \neq -g$, et $a(f+g) = -\infty$ si $f = -g$. De plus $\mathcal{L}(f+g) = \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g)$ sur $\{ z \in \mathbb{C} \colon z > \max\{ a(f), a(g) \} \}$.

# Preuve

Découle de la linéarité de l'intégrale. $\square$

# Transformée de Laplace de la dérivée

**Proposition (admise)**

Soit $f$ une fonction objet admettant une limite à droite en 0 notée $f(0^+)$, dérivable sur $]0;+\infty[$ et telle que $f'\mathcal{U}$ soit aussi une fonction objet.

Alors

$$\mathcal{L}(f')(z) = z\mathcal{L}(f)(z) - f(0^+)$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > \max\{\, a(f), a(f') \,\}$.

# Exemple

On a vu que $\mathcal{L}(f)(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ pour $f(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$ et $z$ tel que $\Re(z) > 0$.

Calculons $\mathcal{L}(f')$ : On a $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \sin(0) = 0$ et $f'(t) = \cos(t)\mathcal{U}(t)$ sur $]0;+\infty[$ qui est aussi une fonction objet.

On en déduit que $\mathcal{L}(f')(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$.

# Transformée de Laplace des dérivées d'ordre supérieur

## Proposition (admise)

Si $f$ est $n$ fois dérivable sur $]0;+\infty[$, $f, f', \cdots, f^{(n)}$ sont toutes des fonctions objets et que les limites à droite $f(0^+), f'(0^+), \cdots, f^{(n-1)}(0^+)$ existent, alors

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(z) = z^n \mathcal{L}(f)(z) - z^{n-1} f(0^+) - z^{n-2} f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+)$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > \max\{\, a(f), \cdots, a(f^{(n)}) \,\}$.

# Dérivation de la transformée de Laplace

## Proposition (admise)

Soit $f$ une fonction objet.

Alors $M_n(f) \colon t \mapsto t^n f(t)$ est aussi une fonction objet pour tout $n \in \mathbb{N}$ et possède la même abscisse de convergence que $f$ (c'est-à-dire $a(M_n(f)) = a(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

De plus $\mathcal{L}(f)$ est une fonction holomorphe (donc en particulier indéfiniment dérivable) dans le demi-plan $\Re(z) > a(f)$ et

$$\mathcal{L}(M_n(f))(z) = (-1)^n (\mathcal{L}(f))^{(n)}(z).$$

## Exemple

$\mathcal{L}(M_1(f))(z) = -\mathcal{L}(f)'(z)$ et $\mathcal{L}(M_2(f))(z) = \mathcal{L}(f)''(z)$.

# Transformée de Laplace d'une primitive

## Proposition (admise)

Soit $f$ une fonction objet.

La primitive $F\colon t \mapsto \int_0^t f(s)ds$ de $f$ qui s'annule en 0 est une fonction objet, et on a

$$\mathcal{L}(F)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f)(z)$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > \max\{\,0, a(f)\,\}$.

# Amortissement (ou modulation)

**Proposition**

Soient $f$ une fonction objet et $\alpha \in \mathbb{C}$.

Alors la fonction $g\colon t \mapsto f(t)e^{-\alpha t}$ est aussi une fonction objet et on a

$$\mathcal{L}(f)(z+\alpha) = \mathcal{L}(g)(z)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(z) > a(f) - \Re(\alpha)$.

### Preuve

On a $\int_0^{+\infty} g(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-(z+\alpha)t}dt = \mathcal{L}(f)(z+\alpha)$ pour $z$ tel que $\Re(z+\alpha) > a(f)$. $\square$

# Exemples

1. Calculons la transformée de Laplace de $g(t) = e^{-\alpha t}\mathcal{U}(t)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

   D'après la proposition précédente, $\mathcal{L}(g)(z) = \mathcal{L}(\mathcal{U})(z+\alpha) = \dfrac{1}{z+\alpha}$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > -\Re(\alpha)$.

2. Calculons la transformée de Laplace de $g(t) = t^n e^{-\alpha t}\mathcal{U}(t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

   On sait que $M_n(\mathcal{U})(t) = t^n\mathcal{U}(t)$ est une fonction objet d'abscisse de convergence 0 et que $\mathcal{L}(M_n(\mathcal{U}))(z) = (-1)^n(\mathcal{L}(\mathcal{U}))^{(n)}(z)$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > 0$. Or $\mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \dfrac{1}{z}$ de sorte que
   $(\mathcal{L}(\mathcal{U}))^{(n)}(z) = \dfrac{(-1)^n n!}{z^{n+1}}$.

   Il en résulte finalement que $\mathcal{L}(M_n(\mathcal{U}))(z) = (-1)^n\dfrac{(-1)^n n!}{z^{n+1}} = \dfrac{n!}{z^{n+1}}$ et donc $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{n!}{(z+\alpha)^{n+1}}$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > -\Re(\alpha)$.

# Retard (ou translation)

**Proposition**

Soit $f$ une fonction objet et $\tau$ un réel positif.

Alors $g\colon t \mapsto f(t-\tau)$ est également une fonction objet et on a

$$\mathcal{L}(g)(z) = e^{-\tau z}\mathcal{L}(f)(z)$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > a(f)$.

### Preuve

On a $\int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-zt}dt = \int_{-\tau}^{+\infty} f(s)e^{-z(s+\tau)}ds$ (par le changement de variables $s = t - \tau$, et donc $ds = dt$) $= e^{-\tau z}\int_0^{+\infty} f(s)e^{-zs}ds$ (car $f(s) = 0$ pour tout $s < 0$) $= e^{-\tau z}\mathcal{L}(f)(z)$. □

### Remarque

En général le résultat précédent est faux pour $\tau < 0$ sauf si $t \mapsto f(t-\tau)$ est encore causale.

# Exemple

Calculons $\mathcal{L}(g)(z)$ pour $g(t) = \mathcal{U}(t - \tau)$ et $\tau \geq 0$.

Puisque $\mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \dfrac{1}{z}$, $\Re(z) > 0$, on en déduit immédiatement que $\mathcal{L}(g)(z) = \dfrac{e^{-\tau z}}{z}$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > 0$.

# Changement d'échelle (ou dilatation)

**Proposition**

Soit $f$ une fonction objet et soit $\mu$ un réel strictement positif.

Alors la fonction $g : t \mapsto f(\mu t)$ est aussi une fonction objet et on a

$$\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{\mu}\mathcal{L}(f)(\frac{z}{\mu})$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > \mu a(f)$.

**Preuve**

On a $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(\mu t)e^{-zt}dt = \int_0^{+\infty} f(s)e^{-z\frac{s}{\mu}}\frac{1}{\mu}ds$ (par le changement de variables $s = \mu t$ et donc $ds = \mu dt$) $= \dfrac{1}{\mu}\mathcal{L}(f)(\dfrac{z}{\mu})$ pour tout complexe $z$ tel que $\Re(\dfrac{z}{\mu}) > a(f)$. $\square$

# Conjugaison

## Proposition

Soit $f$ une fonction objet.

Alors la fonction $\bar{f} : t \mapsto \overline{f(t)}$ est également une fonction objet, et

$$\mathcal{L}(\bar{f})(z) = \overline{\mathcal{L}(f)(\bar{z})}$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > a(f)$.

### Preuve

$$\mathcal{L}(\bar{f})(z) = \int_0^{+\infty} e^{-zt}\overline{f(t)}dt = \overline{\left(\int_0^{+\infty} e^{-\bar{z}t} f(t)dt\right)} = \overline{\mathcal{L}(f)(\bar{z})}.$$

□

# Transformée de Laplace d'un produit de convolution

## Définition

Soient $f$ et $g$ deux fonctions objets. On définit leur produit de convolution $f * g$ par

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds = \int_{0}^{t} f(t-s)g(s)ds$$

(car $f$ et $g$ sont causales).

## Proposition

Soient $f$ et $g$ deux fonctions objets.

Alors $f * g$ est également une fonction objet, $a(f * g) \leq \max\{\, a(f), a(g) \,\}$ et

$$\mathcal{L}(f * g)(z) = \mathcal{L}(f)(z)\ \mathcal{L}(g)(z)$$

pour tout $z$ tel que $\Re(z) > \max\{\, a(f), a(g) \,\}$.

## (Esquisse de la) Preuve

On a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(f * g)(z) &= \int_0^{+\infty} (f * g)(t) e^{-zt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(t-s) g(s) ds \; e^{-zt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} g(s) \int_0^{+\infty} f(t-s) e^{-zt} dt \; ds \\
&= \int_0^{+\infty} g(s) e^{-zs} \mathcal{L}(f)(z) ds \\
&\quad \text{(par la propriété du retard, } s \geq 0\text{)} \\
&= \mathcal{L}(f)(z) \; \mathcal{L}(g)(z).
\end{aligned}
$$

$\square$

# Table des matières

# Transformée de Laplace inverse

On admet que si deux fonctions possèdent la même transformée de Laplace, alors elles sont égales sauf éventuellement aux points où elles ne sont pas continues (il n'y a donc au plus qu'un nombre fini de tels points).

Par contre deux fonctions continues admettant la même transformée de Laplace sont nécessairement égales.

Nous disposons néanmoins du résultat suivant qui est admis (mais qui n'est pas très utile en pratique).

**Théorème (admis)**

Soit $g$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{ z \in \mathbb{C} \colon \Re(z) > a \}$ et qui satisfait l'inégalité

$$|g(z)| \leq \frac{Ke^{-M\Re(z)}}{(1+|z|)^2}.$$

Alors il existe une unique fonction objet $f$ avec $a(f) = a$, continue, et telle que

$$\mathcal{L}(f)(z) = g(z)$$

pour $\Re(z) > a(f)$.

Cette fonction est donnée par

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{D_b} g(z) e^{zt} dz$$

où $D_b$ est la droite verticale du plan complexe des points d'abscisse $b$ pour $b > a$ (et on peut montrer que $f$ ne dépend pas du choix de $b$ pourvu que $b > a$).

# Remarque

En pratique on n'utilise pas la définition intégrale de la transformée de Laplace inverse donnée dans le théorème précédent.

Il est plus utile, pour retrouver une fonction objet continue, à partir de sa transformée de Laplace, de connaître un certain nombre de transformées de Laplace de base et d'utiliser la linéarité de la transformée de Laplace inverse, c'est-à-dire que si on note $\mathcal{L}^{-1}$ la transformation inverse, alors $\mathcal{L}^{-1}(\alpha f + g) = \alpha\mathcal{L}^{-1}(f) + \mathcal{L}^{-1}(g)$.

## Exemple

Soit la fonction $g(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z+2)}$. Déterminons la fonction objet continue $\mathcal{L}^{-1}(g)$.

La décomposition en éléments simples nous donne
$$\frac{1}{(z-1)(z+2)} = \frac{1}{3}\frac{1}{(z-1)} - \frac{1}{3}\frac{1}{(z+2)}.$$

On sait que $\dfrac{1}{z}$ correspond à la transformée de Laplace de $\mathcal{U}$. On en déduit donc (par la règle de modulation) que $z \mapsto \dfrac{1}{(z-1)}$ est celle de $t \mapsto e^t\mathcal{U}(t)$ pour tout $z$ tel que $\Re(z) > 1$, et $z \mapsto \dfrac{1}{(z+2)}$ est celle de $t \mapsto e^{-2t}\mathcal{U}(t)$ (valable pour $\Re(z) > -2$).

Il en résulte par linéarité que la transformée de Laplace inverse de $g$ est égale à $t \mapsto \dfrac{1}{3}(e^t - e^{-2t})\mathcal{U}(t)$.

# Table des matières

# Formulaire des transformées de Laplace usuelles

Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

| $f(t)$ | $\mathcal{L}(f)(z)$ | Abscisse de convergence |
|---|---|---|
| $\mathcal{U}(t)$ | $\frac{1}{z}$ | 0 |
| $t^n\mathcal{U}(t),\ n \in \mathbb{N}$ | $\frac{n!}{z^{n+1}}$ | 0 |
| $e^{-\alpha t}\mathcal{U}(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $\frac{1}{z+\alpha}$ | $-\Re(\alpha)$ |
| $\sin(\omega t)\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{\omega}{\omega^2+z^2}$ | 0 |
| $\cos(\omega t)\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{z}{\omega^2+z^2}$ | 0 |
| $\sinh(\omega t)\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{\omega}{z^2-\omega^2}$ | $\lvert\omega\rvert$ |
| $\cosh(\omega t)\mathcal{U}(t), \omega \in \mathbb{R}$ | $\frac{z}{z^2-\omega^2}$ | $\lvert\omega\rvert$ |
| $e^{-\alpha t}\sin(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $\frac{\omega}{(z+\alpha)^2+\omega^2}$ | $-\Re(\alpha)$ |
| $e^{-\alpha t}\cos(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $\frac{z+\alpha}{(z+\alpha)^2+\omega^2}$ | $-\Re(\alpha)$ |
| $e^{-\alpha t}\sinh(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $\frac{\omega}{(p+\alpha)^2-\omega^2}$ | $\lvert\omega\rvert - \Re(\alpha)$ |
| $e^{-\alpha t}\cosh(\omega t)\mathcal{U}(t),\ \omega \in \mathbb{R},\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $\frac{z+\alpha}{(z+\alpha)^2-\omega^2}$ | $\lvert\omega\rvert - \Re(\alpha)$ |

# Propriétés de la transformation de Laplace

Soient $f, g$ deux fonctions objets, et notons $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$, $G(z) = \mathcal{L}(g)(z)$.

| Propriété | Fonction objet | Transformée de Laplace |
|---|---|---|
| Linéarité | $f(t) + \alpha g(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $F(z) + \alpha G(z)$ |
| Translation | $f(t-\tau), \tau \geq 0$ | $e^{-\tau z} F(z)$ |
| Amortissement | $e^{-\alpha t} f(t),\ \alpha \in \mathbb{C}$ | $F(z+\alpha)$ |
| Changement d'échelle | $f(\mu t),\ \mu > 0$ | $\frac{1}{\mu} F(\frac{z}{\mu})$ |
| Conjugaison | $\overline{f(t)}$ | $\overline{F(\bar{z})}$ |
| Dérivation (de la fonction objet) | $f'(t)$ | $zF(z) - f(0^+)$ |
| Dérivation (de la transformée de Laplace) | $tf(t)$ | $-F'(z)$ |
| Intégration | $\int_0^t f(s)ds$ | $\frac{1}{z} F(z)$ |
| Produit de convolution | $(f * g)(t)$ | $F(z)G(z)$ |