Outils Mathématiques - Chapitre V : Intégrales multiples

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Intégrales multiples.
- Chap. VI : Transformée de Laplace.
- Chap. VII : Série de Fourier.
- Chap. VIII : Transformée de Fourier.
- Chap. IX : Transformée en Z.

Table des matières

Objectif du chapitre

L'objectif de ce cours est de présenter tous les éléments pour comprendre et mettre en œuvre la formule de Stokes (et celle de Green) dans des calculs relatifs à la description de situations physiques.

Il est possible de considérer des intégrales de fonctions réelles de plusieurs variables, les intégrales multiples (doubles, triples), lesquelles peuvent être interprétées (dans les cas favorables) grâce au théorème de Fubini, comme une succession d'intégrales simples de fonctions d'une seule variable.

Dans ce chapitre sont introduits un certain nombre de types différents d'intégrales : les intégrales curvilignes, les intégrales doubles, triples, et les intégrales de surface.

La formule de Green fait le pont entre les intégrales doubles et les intégrales curvilignes, alors que la formule de Stokes connecte les intégrales de surface et les intégrales curvilignes.

Table des matières

Remarque

Pour définir rigoureusement les divers types d'intégrales "multiples", il faut introduire un certain nombre de notions techniques (sur les courbes, les ouverts et les surfaces) concernant essentiellement la régularité des objets employés.

Mais puisque l'objectif est d'apprendre à calculer des intégrales multiples dans le cadre de situations physiques, dans lesquelles *de facto* les hypothèses de régularité sont satisfaites, dans les exercices nous ne nous étendrons donc pas sur celles-ci.

Courbes

Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$.

- On dit que Γ est une courbe simple s'il existe un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et une fonction continue $\gamma \colon I \to \mathbb{R}^n$ (γ est une paramétrisation de Γ) tels que
  - $\gamma(I) = \Gamma$,
  - Si $t_1, t_2 \in I$, $t_1 \neq t_2$, et au moins un des t_i est dans l'intérieur de I, alors $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ (en particulier, γ est injective sur l'intérieur de I).
- Une courbe simple est dite fermée si I est fermé et borné (donc de la forme $[a, b]$) et $\gamma(a) = \gamma(b)$.
- On dit que Γ est une courbe régulière s'il existe une paramétrisation $\gamma \colon [a, b] \to \Gamma$ de classe C^1 et telle que $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(\gamma_1'(t))^2 + \cdots + (\gamma_n'(t))^2} \neq 0$ (norme euclidienne) quel que soit $t \in [a, b]$ (avec $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$).
- Γ est régulière par morceaux s'il existe une subdivision $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{N+1} = b$, et $\gamma \colon [a, b] \to \Gamma$ tels que γ est continue sur $[a, b]$, dérivable sur chaque $[a_i, a_{i+1}]$ et sa dérivée γ' y est continue et non nulle.

Exemples

- Soit $I = [a, b]$ et $u \in C^1(I; \mathbb{R}^n)$. Alors $\Gamma = \{ (x, u(x)) \colon x \in I \}$ est une courbe simple régulière.

- Le cercle unité $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1 \}$ est une courbe simple fermée régulière. (Il suffit de choisir $I = [0, 2\pi]$ et $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.)

Notions de topologie

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$.

- On dit qu'un ensemble K est convexe si quels que soient $t \in [0,1]$, $x, y \in K$, $tx + (1-t)y \in K$ (autrement dit quels que soient $x, y \in K$, le segment de droite, noté $[x, y]$, joignant x à y est contenu dans K).
- K est connexe s'il n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints.
- K est dit connexe par arcs si pour tous $x, y \in K$, il existe une application continue $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ telle que $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ et $\gamma([a, b]) \subseteq K$.
- On dit que K est un domaine s'il est à la fois ouvert et connexe par arcs.
- Soit $n = 2$. On dit que K est simplement connexe s'il est connexe par arcs et s'il ne contient pas de "trous". Plus généralement, pour n quelconque, K est simplement connexe si deux courbes simples contenues dans K et partageant les mêmes extrémités peuvent toujours être continûment déformées de l'une en l'autre sans sortir de K (par exemple, $\mathbb{R}^3 \setminus \{ (0,0,0) \}$ est simplement connexe).

Convexe $\Rightarrow$ simplement connexe $\Rightarrow$ connexe par arcs $\Rightarrow$ connexe.

Exemples

- Tous les intervalles, bornés ou non, fermés, ouverts ou semi-fermées, de $\mathbb{R}$ sont convexes.
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (0,0) \}$ n'est ni convexe, ni simplement connexe ($(0,0)$ est un "trou"), par contre il est connexe par arcs.
- L'ensemble $\mathbb{R}^2 \setminus \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = 0,\ x \leq 0 \}$ (plan fendu) n'est pas convexe. Il est par contre simplement connexe.
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{ (0,0,0) \}$ n'est pas convexe mais il est simplement connexe.
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x = 0 = y \}$ n'est ni convexe ni simplement connexe. Il est connexe par arcs.
- $\overline{\{ (x, \sin \frac{1}{x}) \colon x \in]0,1] \}} \subseteq \mathbb{R}^2$ est connexe mais non connexe par arcs.

Table des matières

Définitions

- Soit $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ une courbe simple régulière paramétrée par $\gamma\colon [a,b] \to \Gamma$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \cdots, \gamma_n(t))$. On note $\gamma'(t) = (\gamma_1'(t), \cdots, \gamma_n'(t))$ et $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\gamma_i'(t))^2}$ la norme euclidienne de $\gamma'(t)$.
- Soit $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ une fonction continue. L'intégrale (curviligne) de f le long de Γ est définie par $\int_\Gamma f d\ell = \int_a^b f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$.
- Si Γ est une courbe simple régulière par morceaux, avec une subdivision $a = a_1 < \cdots < a_{N+1} = b$ de l'intervalle $[a,b]$, et $f\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors on étend la définition précédente en posant $\int_\Gamma f d\ell = \sum_{i=1}^{N} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t))\|\gamma'(t)\|dt$.
- La longueur de la courbe est obtenue en prenant f constante égale à 1.

Extension aux champs de vecteurs

Les définitions précédentes s'étendent au cas d'une fonction $f : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ par

$$\int_\Gamma f \cdot d\ell = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = \int_a^b \sum_{i=1}^n f_i(\gamma(t))\gamma_i'(t) dt$$

où $f(x_1, \cdots, x_n) = (f_1(x_1, \cdots, x_n), \cdots, f_n(x_1, \cdots, x_n))$ (le point "$\cdot$", ci-dessus dans le membre de droite de la première égalité, désigne bien sûr le produit scalaire).

Si Γ est une courbe simple régulière par morceaux, avec une subdivision $a = a_1 < \cdots < a_{N+1} = b$ de l'intervalle $[a, b]$,

$$\int_\Gamma f \cdot d\ell = \sum_{i=1}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Table des matières

Intégrale simple

Rappelons que l'intégrale simple de la fonction réelle f entre les points a et b est l'aire, comptée algébriquement, de la surface comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $y = f(x)$ et les droites verticales $x = a$ et $x = b$.

Quand il s'agit d'une fonction constante, disons de valeur K, la valeur de l'intégrale est donc bien sûr $K(b - a)$.

De là on passe facilement au cas d'une fonction en escalier, en découpant l'intervalle en un nombre fini de morceaux.

Il est beaucoup moins évident de le faire pour une fonction quelconque; l'idée est de l'approcher par au-dessus et par en-dessous par des fonctions en escalier, et de passer à la limite (lorsque c'est possible).

Rappelons que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est intégrable.

On veut généraliser à deux dimensions la situation précédente.

Cela se complique non seulement parce que la fonction à intégrer possède deux variables, mais aussi parce que le domaine sur lequel on intègre est plus compliqué qu'un intervalle fermé borné.

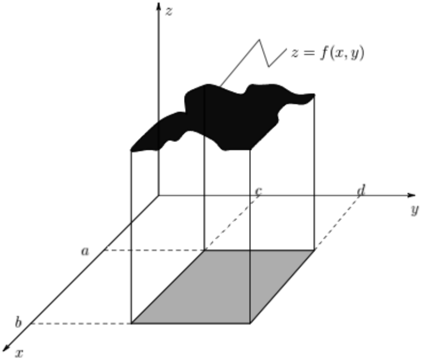
Le plus simple consiste à substituer l'intervalle d'intégration par un rectangle, mais ce n'est pas toujours suffisant puisqu'il est parfois nécessaire d'avoir des cercles.

Commençons par le plus simple, puis généralisons.

Intégrales d'une fonctions de deux variables sur un rectangle

Soit $f(x,y)$ une fonction réelle de deux variables réelles (par exemple $(x,y) \mapsto x^2 + 2xy$ ou $(x,y) \mapsto \cos(xy)$).

On va intégrer la fonction $f(x,y)$ sur le rectangle R défini par $a < x < b$ et $c < y < d$ de sorte que l'intégrale double $\iint_R f(x,y)dxdy$ représente le volume sous le graphe de la fonction (ainsi pour une fonction constante, l'intégrale doit être $K(b-a)(d-c)$) et vérifie des propriétés identiques à l'intégrale simple (linéarité, positivité).



Intégrales d'une fonctions de deux variables sur un rectangle

Pour définir $\iint_R f(x,y)dxdy$ pour une fonction $f(x,y)$ plus complexe qu'une fonction constante, il s'agit de procéder en trois étapes, données brièvement.

1ère étape : on subdivise le rectangle R en sous-rectangles de petites tailles, i.e., on découpe le rectangle en tranches verticales et horizontales.

2ème étape : on intègre des fonctions en escalier sur ces rectangles.

3ème étape : une fonction f, disons positive, définie sur un rectangle est intégrable si, pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier g, h telle que $g(x,y) < f(x,y) < h(x,y)$ pour tout $(x,y) \in R$, et $\iint_R h(x,y)dxdy - \iint_R g(x,y)dxdy < \epsilon$.

Dans ce cas on a $\sup_{g<f} \iint_R g(x,y)dxdy = \inf_{h>f} \iint_R h(x,y)dxdy$, et la valeur commune est prise comme définition pour $\iint_R f(x,y)dxdy$.

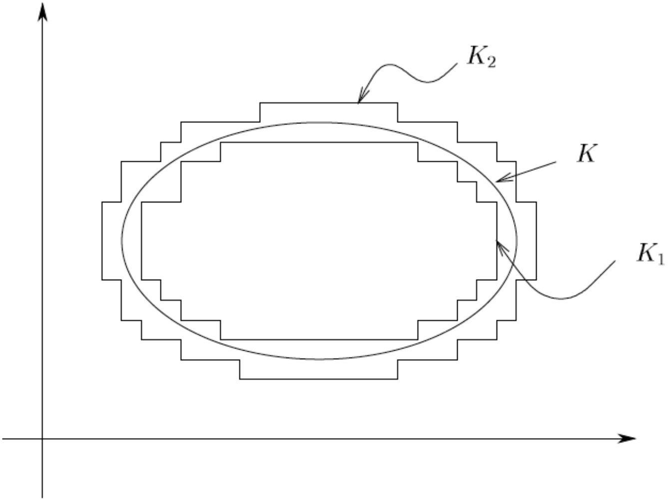
Intégrales d'une fonctions de deux variables sur un rectangle

Théorème (admis)

Toute fonction continue sur un rectangle est intégrable.

Domaine quarrable

Une partie bornée K du plan est quarrable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie K_1 constituée de petits rectangles de côtés parallèles aux axes, et une partie K_2 également constituée de petits rectangles de côtés parallèles aux axes, tels que $K_1 \subseteq K \subseteq K_2$ et tels que l'aire de $K_2 \setminus K_1$ soit inférieure à ϵ.



Remarques

Aire d'un domaine quarrable

Si K est quarrable, il a une aire bien définie, qui est la limite commune des aires de K_1 et de K_2 lorsque ϵ tend vers 0.

Généralisations

On peut donner la même définition en dimension trois (avec des parallélépipèdes de côtés parallèles aux axes), et même en dimension quelconque (en dimension trois, on parle de volume plutôt que d'aire, et en dimension quelconque, on parle de mesure).

Théorème (admis)

Une fonction continue sur un domaine quarrable est intégrable.

Théorème de Fubini

Mais comment calcule-t-on une telle intégrale ?

On peut le faire par encadrement à l'aide de fonctions en escalier comme pour les intégrales simple. Cependant il y a des méthodes plus utiles (au moins dans les cas que nous rencontrerons) basées sur le théorème de Fubini.

Théorème de Fubini

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy.$$

Calcul effectif sur un domaine plus général

On suppose que $K = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon a \leq x \leq b,\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x) \}$ où $h_1, h_2 \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que pour tout $x \in [a, b]$, $h_1(x) \leq h_2(x)$.

On a alors la modification suivante du théorème de Fubini :

Théorème de Fubini (cas général)

$$\iint_K f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

Bien sûr, si $K = \{ (x, y) \colon c \leq y \leq d,\ g_1(y) \leq x \leq g_2(y) \}$, alors il existe une formule analogue, obtenue en échangeant x et y...

Fonctions à variables séparées

Si $f(x,y) = g(x)h(y)$ et g, h sont toutes deux des fonctions absolument intégrables sur un segment $[a,b]$, alors

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)dxdy = \left(\int_a^b g(x)dx\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right).$$

Intégrales triples

On peut tout refaire à l'identique, sauf que c'est plus long à écrire : on prend des cubes, on calcule des volumes, on définit des domaines cubables, etc.

Le point essentiel est que, de la même façon, les fonctions continues sur des domaines cubables sont intégrables, et, surtout, que les intégrales triples peuvent se calculer par trois intégrations simples successives, avec des bornes constantes si on intègre sur un parallélépipède aux côtés parallèles aux axes, et variables dans le cas général, comme on l'a vu avant.

Les dimensions supérieures à trois se traitent de façon identique. Il n'y a pas de difficultés théoriques supplémentaires même si, bien entendu, les calculs peuvent devenir bien plus compliqués.

Exemple d'intégrale sur un compact de $\mathbb{R}^3$

Soit $K = \{\, (x, y, z) \colon (x, y) \in K_1,\ c(x, y) \leq z \leq d(x, y) \,\}$ où K_1 est un compact, $c, d \colon K_1 \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues telles que $c(x, y) \leq d(x, y)$ dès que $(x, y) \in K_1$.

Soit f intégrable sur K. Alors

$$\iiint_K f(x, y, z) dxdydz = \iint_{K_1} \left(\int_{c(x,y)}^{d(x,y)} f(x, y, z) dz \right) dxdy.$$

Dans le cas particulier où f est constante sur K de valeur 1, on obtient le volume de K :

$$\iint_{K_1} (d(x, y) - c(x, y))\, dxdy.$$

Table des matières

Matrice jacobienne et jacobien

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction quelconque, $(x, y) \mapsto (f_1(x, y), f_2(x, y))$.

On appelle matrice jacobienne de f en (x_0, y_0) la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Le Jacobien de f (en (x_0, y_0)) est alors le déterminant de sa matrice jacobienne (en (x_0, y_0)).

Le jacobien décrit de quelle façon l'application considérée dilate les volumes. Il y a deux applications principales :

1. si le jacobien est non nul en un point, alors l'application f est localement une bijection;
2. la formule de changement de variables, expliquée dans ce qui suit.

Changement de variable en dimension un

On connait la formule de dérivation d'une fonction composée

$$(F \circ \phi)'(t) = (F'(\phi(t))\phi'(t) \ .$$

Si on pose $F' = f$, on en déduit que, si toutes les fonctions considérées sont, disons, de classe C^1, l'on a la formule de changement de variables :

$$\int_a^b f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)dx.$$

Cette formule se vérifie immédiatement, puisque les deux intégrales, par la formule fondamentale du calcul différentiel et intégral, valent $F(\phi(b)) - F(\phi(a))$.

Si ϕ est une bijection sur le domaine considéré, on a

$$\int_{\phi^{-1}(c)}^{\phi^{-1}(d)} f(\phi(t))\phi'(t)dt = \int_c^d f(x)dx.$$

Changement de variable en dimension deux et plus

Soit ϕ une bijection de $\phi^{-1}(K)$ sur K, et soit $\det J_\phi$ son jacobien. On a

$$\iint_K f(x,y)dxdy = \iint_{\phi^{-1}(K)} f(\phi(u,v))|\det J_\phi(u,v)|dudv.$$

La même formule existe en dimension supérieure à deux (bien sûr il faut étendre la définition de la matrice jacobienne pour des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$).

Exemples

1. Coordonnées polaires dans le plan : $\phi\colon]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}^2$, $(r,\theta)\mapsto(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$, est un C^1-difféomorphisme (bijection de classe C^1 ainsi que sa réciproque) sur son image. Il envoie le rectangle $[r_1,r_2]\times[\theta_1,\theta_2]$ sur une portion de couronne. On a $\det J_\phi(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$.

2. Coordonnées cylindriques dans l'espace : $\phi\colon]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $(r,\theta,z)\mapsto(x,y,z)=(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$, est un C^1-difféomorphisme sur son image. On a $\det J_\phi(r,\theta,z)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=r$.

Table des matières

Définition

On dit que $U \subseteq \mathbb{R}^2$ est un domaine régulier s'il existe $U_0, U_1, \cdots, U_m \subseteq \mathbb{R}^2$ des ouverts bornés tels que

- $\overline{U_i} \subseteq U_0$, $i = 1, \cdots, m$.
- $\overline{U_i} \cap \overline{U_j} = \emptyset$, $i \neq j$, $i, j = 1, \cdots, m$.
- $U = U_0 \setminus \bigcup_{i=1}^{m} \overline{U_i}$.
- ∂U_i est une courbe simple fermée régulière par morceaux pour $i = 0, \cdots, m$.

On dit que $\partial U = \partial U_0 \cup \partial U_1 \cup \cdots \cup \partial U_m$ est orientée positivement si le sens de parcours sur chacun des ∂U_i, $i = 0, \cdots, m$, laisse le domaine U à gauche.

Remarque

$\overline{U}$ est un compact à bord régulier...

Théorème de Green

Lien entre intégrale curviligne et intégrale double

Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine régulier dont le bord ∂U est orienté positivement.

Soit $f \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R}^2)$. (On pose $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$.)

Alors,

$$\iint_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy = \int_{\partial U} f \cdot d\ell.$$

Table des matières

Surfaces

Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$. On dit que Σ est une surface régulière s'il existe un domaine $K \subseteq \mathbb{R}^2$ tel que ∂K (la frontière) soit une courbe simple fermée régulière par morceaux et $\sigma \colon \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ (σ est appelée paramétrisation régulière de Σ) tels que

- $\sigma \in C^1(\overline{K}, \mathbb{R}^3)$ (on pose $\sigma(u,v) = (\sigma_1(u,v), \sigma_2(u,v), \sigma_3(u,v))$, $(u,v) \in \overline{K}$),
- $\sigma(\overline{K}) = \Sigma$ et σ est injective dans $\overline{K}$,
- si les vecteurs dérivées partielles de σ, $\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)$, satisfont $\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0) \neq 0$ en tout point $(u_0, v_0) \in \overline{K}$,

  autrement dit $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma_3}{\partial v} - \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \sigma_3}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial v} - \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma_3}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma_2}{\partial v} - \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial u}\dfrac{\partial \sigma_1}{\partial v} \end{pmatrix} \neq 0.$

Bord d'une surface

Le bord $\partial\Sigma$ d'une surface régulière Σ est $\sigma(\partial K)$.

Remarque

- On peut montrer que le vecteur normal unité $\dfrac{\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)}{\|\dfrac{\partial \sigma}{\partial u}(u_0, v_0) \wedge \dfrac{\partial \sigma}{\partial v}(u_0, v_0)\|}$ est indépendant (au signe près) du choix de la paramétrisation σ.
- De même, le bord $\partial\Sigma$ est indépendant du choix de la paramétrisation σ.

On note $\upsilon_\Sigma(u_0, v_0)$ un vecteur normal unité en (u_0, v_0). L'application $\upsilon_\Sigma : (u, v) \mapsto \upsilon_\Sigma(u, v)$ est appelé champ de normales unitaires. Une surface est dite orientable si elle possède un champ de normales unitaires continu. Une telle surface Σ est parcouru dans le sens direct si un observateur se déplaçant sur $\partial\Sigma$ et ayant son regard dirigé dans le sens de la normale υ laisse la surface à sa gauche.

Remarque

Il existe des surfaces plus générales, dites surfaces régulières par morceaux, essentiellement des objects connexes par arcs et constituées d'une union finie de surfaces régulières.

Celles-ci peuvent être utilisées de façon identique aux surfaces régulières dans les calculs d'intégrales à suivre.

Dans le cadre de ce cours, il n'y a aucun danger à les manipuler comme des surfaces régulières, ce que nous ferons sans précaution aucune.

L'unique différence est que le bord d'une surface régulière par morceaux peut être vide.

Exemples

- Graphe d'une fonction : Soit $U \subseteq \mathbb{R}^2$ un domaine (ouvert connexe par arcs) tel que ∂U soit une courbe simple fermée régulière. Soit $f \in C^1(\overline{U}; \mathbb{R})$. Alors $\Sigma := \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \overline{U},\ f(x, y) = z \,\}$ est une surface régulière et orientable. Son bord est donné par $\partial\Sigma = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x, y) \in \partial U,\ f(x, y) = z \,\}$.

- La sphère unité : $\Sigma = \{\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$. C'est une surface régulière (par morceaux). Son bord $\partial\Sigma$ est vide. Une paramétrisation est obtenue en prenant $U =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ et $\sigma \colon \overline{U} \to \Sigma$, $\sigma(\theta, \varphi) = (\cos\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\varphi)$.

Définition

Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière, avec $\sigma\colon (u,v) \in \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation, et $f\colon \Sigma \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

On définit l'intégrale de surface

$$\iint_\Sigma f ds = \iint_K f(\sigma(u,v)) \| \frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v} \| du dv.$$

La définition précédente est indépendante du choix de la paramétrisation.

En prenant f constante de valeur 1, on obtient l'aire $\iint_\Sigma ds$ de Σ.

Intégrale de surface pour un champ de vecteurs

Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière, avec $\sigma\colon (u,v) \in \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ une paramétrisation, et $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$ une fonction continue.

On définit l'intégrale de surface (dans la direction $\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}$)

$$\iint_\Sigma f \cdot ds = \iint_K \left(f(\sigma(u,v)) \cdot (\frac{\partial \sigma}{\partial u} \wedge \frac{\partial \sigma}{\partial v}) \right) dudv.$$

Cette définition est indépendante (au signe près) du choix de la paramétrisation.

Rotationnel

Soit $f \in C^1(U; \mathbb{R}^3)$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Posons $f(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), f_3(x, y, z))$.

On définit, pour $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3) \in U$, le rotationnel de f par

$$rot\ f(\vec{x}) = (\frac{\partial f_3}{\partial x_2}(\vec{x}) - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}(\vec{x}), \frac{\partial f_1}{\partial x_3}(\vec{x}) - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}(\vec{x}), \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x})).$$

Théorème de Stokes

Lien entre intégrale de surface et intégrale curviligne

Soit $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ une surface régulière et orientable.

Soit $f : \Sigma \to \mathbb{R}^3$, $\vec{x} \mapsto (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$, telle que $f_i \in C^1(U; \mathbb{R})$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^3$ contenant $\Sigma \cup \partial\Sigma$.

Alors

$$\iint_{\Sigma} (rot\ f) \cdot ds = \int_{\partial\Sigma} f \cdot d\ell.$$

Rappelons que $\partial\Sigma = \sigma(\partial K)$ où $K \subseteq \mathbb{R}^2$ est un domaine (ouvert et simplement connexe), $\sigma : \overline{K} \to \mathbb{R}^3$ est une paramétrisation de Σ et ∂K est une courbe simple fermée régulière. Soit $\gamma : [a, b] \to \partial K$ une paramétrisation de ∂K. Alors $\partial\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ est une courbe simple régulière paramétrée par $\sigma \circ \gamma : [a, b] \to \partial\Sigma$.