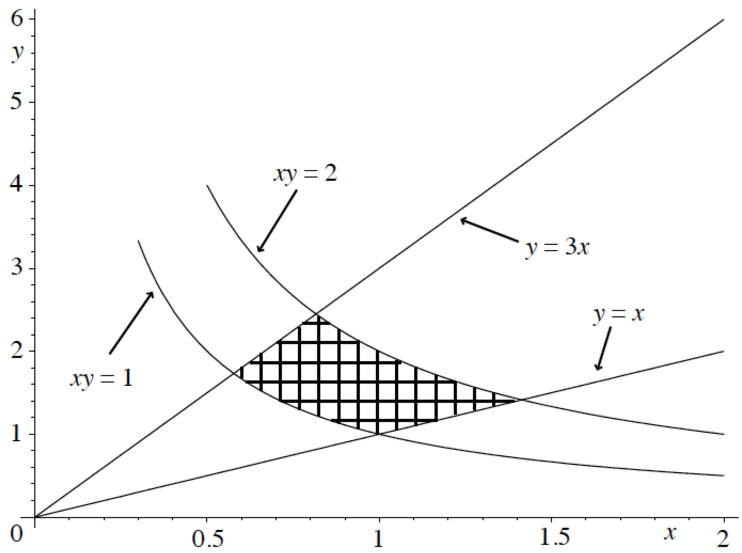
EA1 - Outils Mathématiques — Année 2015-2016

Chapitre 5 - Travaux Dirigés (Corrigés)

Intégrales multiples

Exercice 1

Considérons le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ constitué des points (x, y) tels que $1 \leq xy \leq 4$ et $x \leq y \leq 3x$, soit $D = \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < x, y,\ 1 \leq xy \leq 4,\ 1 \leq \frac{y}{x} \leq 3 \,\}$, comme illustré dans la figure suivante.



L'objectif est ici d'évaluer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)dxdy$.

1. Considérons le changement de variables $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$. Quelle est l'image R de D par ce changement de variable ?
2. Évaluer le jacobien de ce changement de variables.
3. Calculer l'intégrale double à l'aide du changement de variables.

Solution 1

1. Bien sûr $R = [1, 4] \times [1, 3]$.
2. On observe que $x = u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}$ et $y = u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}$. Soit alors $\phi(u, v) = (x, y) = (\underbrace{u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}}_{\phi_1(u,v)}, \underbrace{u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}}}_{\phi_2(u,v)})$.

   On a donc
   $$J_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_1}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial \phi_2}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$
   On a $\det J_\phi = \frac{1}{2}v^{-1} \neq 0$.
3. Il résulte des questions précédentes que
   $$\begin{aligned} \iint_D (x^2+y^2)dxdy &= \iint_R ((u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}})^2 + (u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}})^2)\tfrac{1}{2}v^{-1}dudv \\ &= \iint_R \tfrac{1}{2}(uv^{-2} + u)dudv \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 \left(\int_1^3 (uv^{-2}+u)dv\right) du \\ &= \tfrac{1}{2}\int_1^4 [-uv^{-1} + uv]_{v=1}^{v=3} du \\ &= \tfrac{4}{3}\int_1^4 udu \\ &= \tfrac{4}{3}[\tfrac{u^2}{2}]_1^4 \\ &= 10. \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 2

1. Calculer la longueur du cercle unité (en utilisant une intégrale curviligne).
2. Calculer $\int_\Gamma f d\ell$ quand $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2}$ et $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 2y = x^2,\ x \in [0, 1] \}$
3. Calculer $\int_\Gamma f \cdot d\ell$ quand $f(x, y) = (x^2, 0)$ et $\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon y = \cosh x,\ x \in [0, 1] \}$.

Solution 2

1. On écrit $\Gamma = \{ \gamma(t) \colon t \in [0, 2\pi] \}$ pour une paramétrisation $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$. Donc $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ et $\|\gamma'(t)\| = 1$. La longueur de Γ est donnée par $\int_\Gamma d\ell = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$.
2. Une paramétrisation de la courbe est donnée par $\gamma(t) = (t, \frac{t^2}{2})$, $t \in [0, 1]$. Alors, comme $\gamma'(t) = (1, t)$, on trouve
$$\int_\gamma f d\ell = \int_0^1 \sqrt{t^2 + 4(\frac{t^2}{2})^2}\ \sqrt{1 + t^2} dt = \int_0^1 t(1 + t^2) dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$
3. Dans ce cas on peut prendre $\gamma(t) = (t, \cosh t)$ de sorte que $\gamma'(t) = (1, \sinh t)$. On a donc
$$\int_\Gamma f \cdot d\ell = \int_0^1 (t^2, 0) \cdot (1, \sinh t) dt = \frac{1}{3}.$$

Exercice 3

Calculer $\int_{\Gamma_i} f \cdot d\ell$ quand $f(x, y) = (xy, y^2 - x)$ et $\Gamma_1 = \{ (t, t) \colon 0 \leq t \leq 1 \}$, $\Gamma_2 = \{ (t, e^t) \colon 0 \leq t \leq 1 \}$ et $\Gamma_3 = \{ (\sqrt{t}, t^2) \colon 1 \leq t \leq 2 \}$

Solution 3

1. Dans ce cas comme $\gamma_1(t) = (t, t)$, $\gamma_1'(t) = (1, 1)$ et donc on trouve immédiatement
$$\int_{\Gamma_1} f \cdot d\ell = \int_0^1 (t^2, t^2 - t) \cdot (1, 1) dt = \int_0^1 (2t^2 - t) dt = \frac{1}{6}.$$
2. On choisit $\gamma_2(t) = (t, e^t)$ donc $\gamma_2'(t) = (1, e^t)$ et ainsi
$$\int_{\Gamma_2} f \cdot d\ell = \int_0^1 (te^t, e^{2t} - t) \cdot (1, e^t) = \int_0^1 e^{3t} dt = \frac{1}{3}(e^3 - 1).$$
3. Dans ce dernier cas on écrit $\gamma_3(t) = (\sqrt{t}, t^2)$ et donc $\gamma_3'(t) = (\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t)$. Puis,
$$\begin{aligned} \textstyle\int_{\Gamma_3} f \cdot d\ell &= \textstyle\int_1^2 (t^2\sqrt{t}, t^4 - \sqrt{t}) \cdot (\frac{1}{2\sqrt{t}}, 2t) dt \\ &= \textstyle\int_1^2 (\frac{1}{2}t^2 + 2t^5 - 2t\sqrt{t}) dt \\ &= \tfrac{689}{30} - \tfrac{16}{5}\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 4

Soient $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1 \}$ et $f(x, y) = (y^2, x)$. Vérifier le théorème de Green.

Solution 4
Calculons tout d'abord l'intégrale double $\iint_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy$. On a $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = 1 - 2y$. En effectuant le changement de variables $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on obtient par le théorème de Fubini,

$$\iint_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (1 - 2r\sin\theta) r dr d\theta = \pi.$$

Calculons maintenant $\int_{\partial U} f \cdot d\ell$. On pose $\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$, et on a alors

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} f \cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} (\sin^2\theta, \cos\theta) \cdot (-\sin\theta, \cos\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2\theta \; d\theta - \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \; d\theta \\
&\quad (\sin^3 \text{ est impaire et } 2\pi\text{-périodique, donc } \int_0^{2\pi} \sin^3\theta \; d\theta = 0) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 2\theta \; + 1) d\theta \\
&= [\sin 2\theta + \tfrac{\theta}{2}]_0^{2\pi} \\
&= \pi.
\end{aligned} \tag{3}$$

(Rappelons que $cos^2 x = \frac{1}{2}(\cos 2x \; + 1)$ puisque $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$.)

Exercice 5
Vérifier le théorème de Green pour $U = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 < 1 \}$ et $f(x, y) = (xy, y^2)$.

Solution 5
Calculons tout d'abord l'intégrale double $\iint_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy$. On a $\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = -x$. On passe ensuite en coordonnées polaires $x = r\cos t$, $y = r\sin t$ et le jacobien de la transformation est égal à r. On a alors

$$\iint_U \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (-r\cos t) r dr dt = 0.$$

Calculons ensuite $\int_{\partial U} f \cdot d\ell$ que l'on obtient, si ∂U est paramétré par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$, par

$$\begin{aligned}
\int_{\partial U} f \cdot d\ell &= \int_0^{2\pi} (\cos t \sin t, \sin^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\
&= \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin^2 t + \cos t \sin^2 t) dt \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{4}$$

Exercice 6
Calculer l'aire de $\Sigma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \}$.

Solution 6
On définit $\sigma(\theta, \varphi) = (R\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$ et $K =]0, 2\pi[\times]0, \pi[$. On a $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi} = -R^2\sin\varphi(\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$ et donc $\|\frac{\partial\sigma}{\partial\theta} \wedge \frac{\partial\sigma}{\partial\varphi}\| = R^2\sin\varphi$. L'aire est alors donnée par

$$\iint_\Sigma ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} R^2 \sin\varphi d\theta d\varphi = 2\pi R^2 \int_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi = 4\pi R^2.$$

Exercice 7
Calculer $\iint_\Sigma f ds$ où $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ et $\Sigma = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1, \; 0 \leq z \leq 1 \}$.

Solution 7

On définit $\sigma(\theta, z) = (\cos\theta, \sin\theta, z)$ et $U =]0, 2\pi[\times]0, 1[$. On trouve $\dfrac{\partial\sigma}{\partial\theta}\wedge\dfrac{\partial\sigma}{\partial z} = (\cos\theta, \sin\theta, 0)$, ce qui donne $\|\dfrac{\partial\sigma}{\partial\theta} \wedge \dfrac{\partial\sigma}{\partial z}\| = 1$. Le résultat souhaité est donc

$$\begin{array}{rcl} \iint_\Sigma f ds & = & \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2z) d\theta dz \\ & = & 2\pi \int_0^1 (1 + 2z) dz \\ & = & 4\pi. \end{array} \tag{5}$$