

Outils Mathématiques - Chapitre IV : Résidus et applications

Laurent Poinot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air



Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- **Chap. IV : Résidus et applications.**
- Chap. V : Intégrales multiples.
- Chap. VI : Transformée de Laplace.
- Chap. VII : Série de Fourier.
- Chap. VIII : Transformée de Fourier.
- Chap. IX : Transformée en Z.

Table des matières

- 1 Séries de Laurent
- 2 Classification des singularités isolées
- 3 Théorème des résidus
- 4 Application au calcul d'intégrales

Définition

On appelle **série de Laurent** toute série de fonctions de terme général $z \mapsto a_n(z - z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, pour un nombre complexe z_0 fixé.

Une telle série est donc de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}}_{\text{partie principale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n}_{\text{partie régulière}}.$$

Convergence

Soit ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n}z^n$ et soit R celui de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_nz^n$. Posons $r = 1/\rho$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ converge dans $|z - z_0| > r$.

De sorte que la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ est convergente dans la couronne $C(z_0; r, R) = \{z \in \mathbb{C} : r < |z - z_0| < R\}$.

Holomorphie des séries de Laurent

Bien sûr $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est holomorphe dans $D(z_0; R)$

et $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n}$ l'est dans $|z - z_0| > r$ (rappelons que si f est holomorphe dans U , alors $z \mapsto f(1/z)$ l'est dans $\{z \in \mathbb{C}^* : 1/z \in U\}$).

Il en résulte que $z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ est holomorphe dans la couronne $C(z_0; r, R)$.

Développement en série de Laurent

Théorème (admis)

Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C(z_0; r, R)$ centrée en z_0 .

Alors f admet un développement en série de Laurent dans $C(z_0; r, R)$ et ce développement est unique.

Cela signifie qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On peut montrer que pour chaque entier n , $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$, et

en particulier $a_{-1} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} f(u) du$, où γ est un circuit simple, orienté dans le sens direct, tracé dans $C(z_0; r, R)$.

Table des matières

- 1 Séries de Laurent
- 2 Classification des singularités isolées**
- 3 Théorème des résidus
- 4 Application au calcul d'intégrales

Définition

Un nombre complexe z_0 est appelé **singularité isolée** d'une fonction f si celle-ci est holomorphe dans un **disque ouvert époiné** $D(z_0; R) \setminus \{z_0\}$, mais pas nécessairement en z_0 .

Objectif

On se propose d'étudier le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée.

Soit alors f une fonction holomorphe dans une couronne $C(z_0; r, R)$ et supposons que z_0 soit une singularité isolée de f .

Soit $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f dans $C(z_0; r, R)$.

Trois cas, s'excluant mutuellement, peuvent se produire.

1er cas : Fausse singularité

Supposons que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$, autrement dit la partie principale est nulle.

Dans ce cas f se prolonge par continuité en z_0 en posant $f(z_0) = a_0$, et ce prolongement est holomorphe au voisinage de z_0 (comme somme d'une série entière).

Exemple

Soient $f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$ et $z_0 = 0$.

On a $e^z - 1 - z = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ sur \mathbb{C} tout entier, de sorte que

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+2)!} \text{ sur } \mathbb{C}^*.$$

Or la série entière admet $+\infty$ comme rayon de convergence, donc elle converge également en $z = 0$ où elle vaut $\frac{1}{2}$.

Exemple

Étudions $f(z) = 1/z$ au point $z_0 = 1$.

$$\text{On a } \frac{1}{z} = \frac{1}{1 + (z - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n \text{ pour tout } 0 < |z - 1| < 1.$$

Or la série entière converge pour $|z - 1| < 1$. On en déduit que $z_0 = 1$ est une fausse singularité (c'est même un point d'holomorphie de f).

2nd cas : Pôles

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{-n} = 0$ pour tout $n > m$ et $a_{-m} \neq 0$, autrement dit la partie principale n'admet qu'un nombre fini de termes non nuls.

On dit alors que z_0 est un pôle d'ordre m . Si $m = 1$ (respectivement, 2, 3), on dit que z_0 est un pôle simple (respectivement, double, triple).

Dans ce cas, la partie principale est une fonction rationnelle (mais pas nécessairement la fonction f).

Si z_0 est un pôle, alors $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, et la fonction $(z - z_0)^m f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe g au voisinage de z_0 telle que $g(z_0) \neq 0$.

Cela revient aussi à dire que $f - \sum_{k=1}^m \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$ admet une fausse singularité en z_0 .

Exemples

- ① Soient $f(z) = 1/z$ et $z_0 = 0$.

Le développement de Laurent de f en z_0 est trivialement $1/z$ de sorte que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de f .

- ② Soient $f(z) = \frac{1}{z^2 + z}$ et $z_0 = 0$.

$$\text{On a } f(z) = \frac{1}{z(z+1)} = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} = \frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ pour tout}$$

$$0 < |z| < 1.$$

Il s'ensuit que $z_0 = 0$ est un pôle simple de f .

3ème cas : Singularité essentielle

Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_{-n} \neq 0$.

On dit que z_0 est une **singularité essentielle**.

On peut montrer que dans ce cas que f n'est pas bornée au voisinage de z_0 et que $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| \neq +\infty$.

Exemples

① $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = 0$.

On a pour tout $z \neq 0$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!z^n}$ de sorte que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle.

② $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$, $z_0 = 1$. On a pour tout $z \neq 1$,

$$\begin{aligned} f(z) &= z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} = ((z-1) + 1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!(z-1)^{2n-2}} + \frac{2}{n!(z-1)^{2n-1}} + \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} \right) = \\ &= (z-1)^2 + 2(z-1) + 2 + \frac{2}{(z-1)} + \frac{3}{2(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \dots = \\ &= (z-1)^2 + 2(z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \frac{2}{n!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} \right). \end{aligned}$$

On peut en déduire que 1 est une singularité essentielle.

Application : Règle de l'Hôpital

Soient deux fonctions f et g holomorphes en z_0 telles que $f(z_0) = 0$ et g possède un zéro simple en z_0 (i.e., $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$).

Alors,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Preuve

Puisque f est holomorphe en z_0 , elle admet un développement de Taylor

$$f(z) = \underbrace{f(z_0)}_{=0} + (z - z_0) \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-1} \right) = \\ (z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)f_1(z).$$

De même on obtient une expression $g(z) = (z - z_0)g'(z_0) + (z - z_0)g_1(z)$.

Puisque $f_1(z_0) = 0 = g_1(z_0)$ et $g'(z_0) \neq 0$, on en déduit que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f'(z_0) + f_1(z)}{g'(z_0) + g_1(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$



Autres singularités (1/2)

Commençons par quelques notions sur les fonctions trigonométriques complexes. On peut définir les fonctions entières suivantes :

$$\begin{aligned}\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} , \\ \sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} , \\ \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} , \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}\tag{1}$$

On peut montrer que l'on a $\cosh z = (1/2)(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = (1/2)(e^z - e^{-z})$, $\cos z = (1/2)(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\sin z = (1/2i)(e^{iz} - e^{-iz})$. Bien entendu, $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$, $\cos' z = -\sin z$ and $\sin' z = \cos z$. On a des formules de passage : $\cos z = \cosh iz$, $\cosh z = \cos iz$, $\sin z = -i \sinh iz$, $\sinh z = -i \sin iz$.

Autres singularités (2/2)

Les zéros de la fonction \sin sont exactement les zéros réels $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

La fonction $f(z) = \frac{1}{\sin(1/z)}$ est donc holomorphe sur

$$\mathbb{C} \setminus (\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^* \} \cup \{0\}).$$

On peut montrer qu'il y a un pôle en tout point de la forme $1/k\pi$ de sorte que zéro est un point d'accumulation de points singuliers isolés : ce n'est ni un point d'holomorphie, ni un point singulier isolé (la fonction f ne saurait être holomorphe dans un disque époinché centré en 0). Nous n'envisageons pas ce cas dans le cadre de ce cours.

Remarque

On s'intéresse à la fonction $\frac{\sin z}{z}$, laquelle est holomorphe dans \mathbb{C}^* .

De plus $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin'(z)}{1} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = \cos 0 = 1$ (par la règle de L'Hôpital, puisque \sin et la fonction identique dz sont dérivables et s'annulent toutes deux en 0). Il en résulte que 0 est une fausse singularité.

Bon à savoir

- 1 Soit f une fonction holomorphe en z_0 . Alors son développement de Taylor coïncide avec son développement de Laurent en z_0 . Donc $\text{Res}(f, z_0) = 0$.
- 2 Soient U un ouvert, $z_0 \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui est holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$. Soit $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Supposons que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in U \setminus \{z_0\}$. Alors z_0 est une **fausse singularité** de f (et donc $\text{Res}(f, z_0) = 0$). En effet, g , holomorphe, admet un développement en série de Taylor, en tout $z \in U$, donc notamment en z_0 : $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$. Ce développement correspond donc au développement en série de Laurent de f en z_0 (par unicité), qui ne comporte pas de partie principale. Ce cas s'applique par exemple à la fonction $f(z) = \frac{(z - z_0)^d}{(z - z_0)^e Q(z)}$ où $0 < e \leq d$ et Q est un polynôme ne s'annulant pas en z_0 .
- 3 Soit $f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^d Q(z)}$ avec P, Q deux polynômes ne s'annulant pas en z_0 . En particulier $\frac{P}{Q}$ est holomorphe en z_0 , donc admet un développement de Taylor en z_0 , de sorte que
$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^d} \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_0}{(z - z_0)^d} + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^{n-d}$$
 et $a_0 = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} \neq 0$. Donc z_0 est un **pôle d'ordre d** .

Table des matières

- 1 Séries de Laurent
- 2 Classification des singularités isolées
- 3 Théorème des résidus**
- 4 Application au calcul d'intégrales

Définition

Le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe autour d'une singularité isolée z_0 s'appelle le **résidu de f en z_0** et se note $\text{Res}(f, z_0)$.

Exemple

Soient $f(z) = \frac{e^z - 1}{z^4}$ et $z_0 = 0$.

Le développement en série de Laurent de f en $z_0 = 0$ est

$$f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z} + \frac{1}{24} + \frac{z}{120} + \dots$$

$$\text{Donc } \text{Res}(f, 0) = \frac{1}{6}.$$

Méthode de calcul du résidu en un pôle d'ordre m

Si z_0 est un pôle d'ordre m de f , alors on peut écrire :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \text{ avec } g \text{ holomorphe au voisinage de } z_0$$

et $\text{Res}(f, z_0)$ apparaît alors comme le coefficient du terme $(z - z_0)^{m-1}$ dans le développement en série entière de g c'est-à-dire :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Autrement dit
$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} ((z - z_0)^m f(z))$$
$$= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{(m-1)}} ((z - z_0)^m f(z)) \Big|_{z=z_0}.$$

En particulier : si z_0 est un pôle simple de f alors
$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

Remarque

On peut calculer plus rapidement le résidu d'un pôle simple dans le cas particulier suivant :

Si $f = \frac{P}{Q}$ avec P, Q holomorphes au voisinage de z_0 et si $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Exemples

- ① $f(z) = \frac{1}{z^2}$. Alors $z_0 = 0$ est un pôle double de f et donc

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = 0.$$

- ② $f(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{2}{z}$. Alors $z_0 = 0$ est visiblement un pôle triple de f , et

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(z^3 f(z)) = 2. \quad (\text{On aurait pu directement tirer de l'écriture de } f \text{ que } a_{-1} = 2.)$$

- ③ $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$. On sait déjà que 0 est un pôle simple et

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z+1} = 1.$$

Théorème des résidus

Les résidus permettent le calcul d'intégrales curvilignes grâce au théorème suivant.

Théorème des résidus

Soient U un ouvert du plan complexe et f une fonction holomorphe dans $U \setminus S$ (f n'est holomorphe en aucun point de S) où $S \subseteq U$ est un ensemble fini de singularités isolées de f .

Soit K un compact à bord régulier contenu dans U dont la frontière n'intersecte pas U (on suppose que son bord ∂K est orienté dans le sens direct).

Soient z_1, \dots, z_m les éléments de S appartenant à l'intérieur de K .

Alors

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Remarque

Les points d'holomorphie de f sont exclus de S puisque f n'est, par hypothèse, holomorphe en aucun point de S .

Preuve (1/2)

On peut directement évacuer le cas où S n'a aucun point à l'intérieur de K , puisque dans ce cas cela se réduit à la première formule de Cauchy (cf. Chap. III).

Supposons donc qu'il y a des éléments z_1, \dots, z_m de S appartenant à l'intérieur de K . On considère alors le compact K' obtenu à partir de K en lui retirant des disques ouverts $D(z_k; \epsilon_k)$ (de rayons $\epsilon_k > 0$ suffisamment petits) centrés en z_k , $k = 1, \dots, m$. On considère également des circuits simples γ'_k parcourant une fois dans le sens direct le cercle $|z - z_k| = \epsilon_k$, $k = 1, \dots, m$.

On obtient donc un compact à bord K' dont le bord, supposé orienté directement, est constitué de celui de K ainsi que de $((\gamma'_k)^{\text{op}})_{k=1}^m$.

Puisque f est holomorphe dans $U \setminus S$ et que $K' \subseteq U \setminus S$, il en résulte, par la première formule de Cauchy que

$$\int_{\partial K} f(z) dz - \sum_{k=1}^m \int_{\gamma'_k} f(z) dz = \int_{\partial K'} f(z) dz = 0.$$

Preuve (2/2)

Il reste donc à évaluer $\sum_{k=1}^m \int_{\gamma'_k} f(z) dz$.

Par hypothèse f admet un développement $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(k)(z - z_k)^n$ en série de Laurent dans un disque époiné centré en z_k pour chaque $k = 1, \dots, m$.

Or $\int_{\gamma'_k} a_n(k)(z - z_k)^n dz = 0$ pour tout $n \neq -1$ et

$$\int_{\gamma'_k} a_{-1}(k)(z - z_k)^{-1} dz = 2i\pi a_{-1}(k) = 2i\pi \operatorname{Res}(f, z_k).$$

On peut intervertir la somme et l'intégrale (convergence normale, donc absolue) et intégrer terme à terme la série de Laurent, ce qui conduit à

$$\int_{\partial K} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}(f, z_k).$$

Table des matières

- 1 Séries de Laurent
- 2 Classification des singularités isolées
- 3 Théorème des résidus
- 4 Application au calcul d'intégrales**

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt$$

Soit $R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule en aucun point du cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ (donc pour aucun point e^{it} , $t \in [0, 2\pi]$, i.e., $Q(\cos(t), \sin(t)) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$).

On se ramène à l'intégration d'une fonction holomorphe f sur le circuit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ puisque si on pose $f(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right)$ on a, compte tenu que $\gamma'(t) = ie^{it}$,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \int_{\gamma} f(z) dz = 2i\pi \sum \text{Res}(f, z_0)$$

où la somme porte sur les pôles z_0 de f appartenant à $D(0; 1)$, par le théorème des résidus.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \quad (1/2)$$

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle sans pôle réel et telle que $\deg Q \geq \deg P + 2$. (La seconde condition assure que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$ existe par comparaison à la fonction $\frac{1}{x^2}$.)

Soit $r > 0$ et considérons le circuit γ_r composé du demi-cercle supérieur α_r de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct puis du segment de l'axe réel $[-r, r]$ parcouru dans le sens croissant.

On peut supposer r suffisamment grand pour que l'ensemble E des pôles de F dans le demi-plan ouvert supérieur $\{z: \Im(z) > 0\}$ soit contenu dans l'intérieur de γ_r .

D'après le théorème des résidus,

$$\int_{\gamma_r} F(z) dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} \text{Res}(F, z_0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx \quad (2/2)$$

On a également

$$\int_{\gamma_r} F(z)dz = \int_{-r}^{+r} F(x)dx + \int_{\alpha_r} F(z)dz.$$

Puisque $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ est convergente, on a bien sûr

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} F(x)dx.$$

Comme $\deg P \leq \deg Q - 2$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} zF(z) = 0$, c'est-à-dire que pour $\epsilon > 0$, il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $|z| \geq \nu$, $|zF(z)| < \epsilon$.

Donc $\left| \int_{\alpha_r} F(z)dz \right| \leq \int_0^\pi |F(re^{it})rie^{it}| dt \leq \pi\epsilon$ pour r suffisamment grand.

Cela conduit à $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_r} F(z)dz = 0$ de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} \text{Res}(F, z_0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}^* \quad (1/3)$$

Soit $F = \frac{P}{Q}$ une fonction rationnelle telle que $\deg Q \geq 1 + \deg P$ et sans pôle réel.

Si $\deg Q > 1 + \deg P$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx$ converge. Si

$\deg Q = 1 + \deg P$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx$ n'est pas absolument

convergente, mais sa valeur principale de Cauchy $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} F(x)e^{i\omega x} dx$ existe.

Soit $f(z) = F(z)e^{iz\omega}$. La fonction f possède les mêmes pôles que F .

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}^* \quad (2/3)$$

1er cas : Supposons que $\omega > 0$

On intègre encore f le long de γ_r qui se décompose en α_r puis $[-r, r]$.

Soit E l'ensemble des pôles de F situés dans le demi-plan ouvert supérieur. Lorsque r est assez grand, le théorème des résidus nous donne :

$$\int_{\gamma} F(z)e^{i\omega z} dz = \int_{-r}^{+r} F(t)e^{it\omega} dt + \int_{\alpha_r} F(z)e^{i\omega z} dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} \text{Res}(f, z_0).$$

Par ailleurs on peut montrer que $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{\alpha_r} F(z)e^{i\omega z} dz = 0$ (le fait que $\omega > 0$ est important) de sorte qu'en passant à la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} \text{Res}(f, z_0).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx, \omega \in \mathbb{R}^* \quad (3/3)$$

2nd cas : Supposons que $\omega < 0$

Si F est à valeurs réelles, alors on se ramène au cas précédent par conjugaison

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\omega x} dx.$$

Si F prend des valeurs complexes, alors on intègre $f(z) = F(z)e^{i\omega z}$ le long du circuit γ_r composé du demi-cercle inférieur α_r de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct puis du segment de l'axe réel $[-r, r]$ parcouru dans le sens décroissant (pour assurer que le bord du demi-disque inférieur soit orienté dans le sens direct).

Pour des raisons identiques au cas précédent, on obtient par le théorème des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x} dx = -2i\pi \sum_{z_0 \in E} \text{Res}(f, z_0)$$

où E désigne l'ensemble des pôles de F (et donc de f) dans le demi-plan ouvert inférieur $\{z: \Im(z) < 0\}$.

Le signe négatif qui apparaît ici provient de l'orientation du chemin parcourant $[-r, r]$.