

Intégrales curvilignes et primitives

Exercice 1

Soient $f(z) = z^2$, et γ_1, γ_2 respectivement le demi-cercle supérieur de rayon 1 centré en l'origine et γ_2 le cercle de rayon 1 centré en l'origine, tous deux parcourus dans le sens trigonométrique. Calculer $\int_{\gamma_i} f(z)dz$, $i = 1, 2$. En déduire $\int_{\gamma_3} f(z)dz$ où γ_3 est le demi-cercle inférieur de rayon 1 centré en l'origine parcouru dans le sens direct.

Exercice 2

Soit γ un cercle parcouru une fois dans le sens trigonométrique. Discuter en fonction du cercle la valeur de l'intégrale

$$\int_{\gamma} \frac{\cos(2z)}{z} dz.$$

Exercice 3

Soit $\gamma = 2 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z+2}}{(z-2)^3} dz.$$

Exercice 4

Soit $\gamma = \pi/2 + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{z^2 \sin z}{(z - \pi/2)^2} dz.$$

Exercice 5

Calculer

1. $\int_{\gamma} (z^2 + 1)dz$, où γ parcourt une fois le segment $[1, 1 + i]$ de 1 vers $1 + i$.
2. $\int_{\gamma} \Re(z^2)dz$, où γ parcourt une fois le cercle unité.
3. $\int_{\gamma} \Re(z^2)dz$, où γ parcourt le segment horizontal de i à $i + 1$ une fois.

Exercice 6

Déterminer la valeur des intégrales :

1. $\int_{\gamma} \frac{3z^2 + 2z + \sin(z+1)}{(z-2)^2} dz$ où γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle $|z-2| = 1$.
2. $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(z+2)} dz$ et γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle $|z| = 1$.

Exercice 7

Calculer

$$\int_{\gamma} \frac{e^{z^2}}{(z-1)^2(z^2+4)} dz$$

dans les cas suivants

1. γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle de centre 1 et de rayon 1.
2. γ parcourt une fois dans le sens direct le cercle de centre $2i$ et de rayon 1.