Outils Mathématiques - Chapitre I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Table des matières

Objectifs

Le but de ce cours est de présenter les bases de l'analyse complexe qui seront utiles pour

1. l'aérodynamique et la mécanique des fluides,
2. la résolution d'équations différentielles (par exemple, les équations de diffusion de la chaleur),
3. le traitement et l'analyse du signal (décomposition fréquentielle des signaux, essentiellement pour les radars).

Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Intégrales multiples.
- Chap. VI : Transformée de Laplace.
- Chap. VII : Série de Fourier.
- Chap. VIII : Transformée de Fourier.
- Chap. IX : Transformée en Z.

Table des matières

Topologie du plan complexe

Rappelons que le plan complexe $\mathbb{C}$, vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, est isomorphe à $\mathbb{R}^2$: une base (la “base canonique”) est donnée par $\{1, i\}$.

Une bijection est donnée par $(x, y) \mapsto x + iy$ et sa fonction réciproque $z \mapsto (\Re(z), \Im(z))$.

Par ailleurs le module $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$ induit une distance

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

qui fait de $\mathbb{C}$ un espace métrique.

On note pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R \in [0, +\infty]$, $D(z_0; R) = \{ z \colon |z - z_0| < R \}$ le disque ouvert centré en z_0 et de rayon R (avec $D(z_0; +\infty) = \mathbb{C}$ par convention), et $\overline{D}(z_0; R) = \{ z \colon |z - z_0| \leq R \}$ le disque fermé.

En tant qu'espaces métriques, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ (avec la distance euclidienne habituelle) sont homéomorphes. Dans la suite, les termes d'ouverts, fermés, voisinages, adhérence, frontière feront réfèrence à la métrique de $\mathbb{C}$. U désigne un ouvert quelconque de $\mathbb{C}$.

Définition : Fonction holomorphe

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction complexe. Pour $z_0 \in U$, si

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, alors on note $f'(z_0)$ cette limite, que l'on appelle le nombre dérivé de f en z_0.

Si $f'(z_0)$ existe pour tout $z_0 \in U$, alors la fonction f est dite holomorphe dans U. Et f est dite holomorphe en z_0 s'il existe un voisinage de z_0 dans lequel f est holomorphe.

Une fonction holomorphe dans $\mathbb{C}$ tout entier est appelée fonction entière.

En détail :

Dire que $f'(z_0)$ existe revient à demander que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

pour tout $z \in D(z_0; r) \setminus \{ z_0 \} \subseteq U$.

Dans ce cas, on dit aussi que f est dérivable (au sens complexe) en z_0.

Dire que f est holomorphe en z_0 revient à dire qu'il existe un voisinage $V \subseteq U$ de z_0 tel que pour tout $z \in V$, f est dérivable en z (et non pas que en z_0 !).

Définition : Dérivée

Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U.

On peut alors définir sur U une nouvelle fonction, appelée dérivée complexe, ou plus simplement dérivée, de f, et notée f' ou $\frac{df}{dz}$, laquelle, bien sûr, à tout point $z_0 \in U$ associe le nombre dérivé $f'(z_0)$ de f en ce point.

Autrement dit, $f'(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} \left(\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)$ pour chaque $z_0 \in U$.

(Contre-)Exemple

- La fonction $f : z \mapsto z^2$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et $f'(z_0) = 2z_0$.
- La fonction $f : z \mapsto \overline{z}$ n'est nulle part dérivable.
- La fonction $f : z \mapsto |z|^2$ est dérivable en 0 mais n'est pas holomorphe en 0.

Table des matières

Proposition

Si $f : U \to \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in U$, alors elle est continue en z_0.

Preuve

Dire que f est dérivable en z_0 revient à dire que pour h suffisamment proche de zéro, $f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + |h|\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \to 0} \epsilon(h) = 0$.

On en déduit immédiatement que f est continue en z_0. $\square$

Proposition

Soient f, g deux fonctions holomorphes dans U, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f+g$, λf, fg, $\dfrac{f}{g}$ (à la condition que g ne s'annule en aucun point de U) et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f^n (pour $n < 0$, il faut de surcroît supposer que f ne s'annule pas sur U) sont holomorphes dans U, et leurs dérivées sont

- $(f+g)' = f' + g'$.
- $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{(f'g - fg')}{g^2}$.
- $(f^n)' = nf^{n-1}f'$.

On retrouve par conséquent les formules usuelles du calcul des dérivées.

Proposition

Soient $f \colon U \to \mathbb{C}$ et $g \colon V \to \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes respectivement dans U et dans V, et telles que $f(U) \subseteq V$.

Alors $g \circ f \colon U \to \mathbb{C}$ est holomorphe dans U, et sa dérivée est $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Table des matières

Fonctions polynomiales

• Les fonctions constantes sont entières et de dérivées nulles en tout point.

• La fonction identique $z \mapsto z$ est entière et sa dérivée est la fonction constante égale à 1.

• À partir de ces fonctions, on obtient par additions et multiplications l'holomorphie dans $\mathbb{C}$ de toutes les fonctions f qui s'écrivent sous la forme suivante

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$$

où n est un entier naturel et où $a_0, \cdots, a_n$ sont des nombres complexes. Une telle fonction est dite fonction polynôme ou fonction polynomiale. La dérivée de f est donnée pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$f'(z) = 0, \text{ si } n = 0$$

et

$$f'(z) = \sum_{i=1}^{n} i a_i z^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j, \text{ si } n > 0.$$

Unicité de la représentation d'une fonction polynomiale

L'ensemble des fonctions de $\mathbb{C}$ dans lui-même est bien sûr un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de façon évidente.

On constate que la fonction polynomiale f du transparent précédent est une combinaison linéaire de fonctions $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

L'écriture de f (comme combinaison linéaire) est alors unique à la condition que les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$, soient $\mathbb{C}$-linéairement indépendantes, i.e., si $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sont tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$, alors tous les a_i sont nuls.

Or cela est vrai (preuve par récurrence sur n) :

Proposition

Soit f une fonction polynomiale non identiquement nulle. Alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ (le degré) et un unique $(n+1)$-tuple $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ (les coefficients) tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, et $a_n \neq 0$

Fonctions rationnelles

On appelle fonction rationnelle toute fonction f de la forme g/h où g et h sont deux fonctions polynomiales, h étant supposée en outre non identiquement nulle (i.e., non représentée par le polynôme nul).

La fonction f est alors définie et holomorphe dans le complémentaire de l'ensemble des zéros de h (lequel est un ouvert).

Sa dérivée est donc donnée par la formule

$$f' = \frac{g'h - gh'}{h^2} \ .$$

Il en résulte que la dérivée d'une fonction rationnelle est rationnelle.

Remarque

On a d'emblée l'ensemble de définition maximum en prenant une représentation irréductible pour la fonction rationnelle f, c'est-à-dire dans laquelle g et h sont premiers entre eux.

Rappelons que deux polynômes sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont les constantes non nulles; en particulier deux polynômes premiers entre eux ne possèdent pas de zéro commun – sinon ils auraient un diviseur commun de degré 1.

Table des matières

Il existe sur $\mathbb{C}$ deux structures évidentes d'espace vectoriel :

- d'une part, en tant que corps, $\mathbb{C}$ est un espace vectoriel sur lui-même de dimension 1 (la base canonique est alors donnée par $\{ 1 \}$),

- d'autre part, c'est aussi un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, avec pour base canonique $\{ 1, i \}$; cela permet d'identifier le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ via $z \mapsto (\Re(z), \Im(z))$ et, inversement, $(x, y) \mapsto x + iy$.

Remarque

Soit $\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Dire que ϕ est linéaire n'a de sens que si on sait à quelle structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ on se réfère. Pour être plus précis on prendra soin d'indiquer que ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire (respectivement, $\mathbb{C}$-linéaire) si elle est linéaire au sens de la structure vectorielle réelle (respectivement, complexe).

Applications $\mathbb{R}$-linéaires ou $\mathbb{C}$-linéaires

Soit $\phi \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Posons $\phi(1) = a$ et $\phi(i) = b$.

Si ϕ est $\mathbb{R}$-linéaire, alors on a pour tout $z = x + iy$,

$$\phi(z) = ax + by \ .$$

C'est la forme générale des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C}$ dans lui-même.

Supposons de plus que ϕ est $\mathbb{C}$-linéaire. On a donc en particulier $b = \phi(i) = \phi(i1) = i\phi(1) = ia$, de sorte que

$$\phi(z) = a(x + iy) = az \ .$$

Exemple

Les projections canoniques de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{R}$, à savoir les fonctions $\Re$ et $\Im$, sont des applications $\mathbb{R}$-linéaires.

Selon l'usage du calcul différentiel, on les note parfois respectivement dx et dy. Ainsi pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a

$$dx(z) = x = \Re(z)$$

$$dy(z) = y = \Im(z)$$

et avec ces notations, la forme générale des applications $\mathbb{R}$-linéaires est donc

$$adx + bdy \text{ (avec } a, b \in \mathbb{C}\text{)}$$

(Contre-)Exemple

Dans le même ordre d'idée, notons dz l'application identique de $\mathbb{C}$ (qui est aussi l'unique projection canonique de $\mathbb{C}$ sur lui-même vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel).

Avec les notations précédentes on a

$$dz = dx + idy \ .$$

On a $a = dz(1) = 1$ et $b = dz(i) = i$ (ce qui est rassurant puisque dz est $\mathbb{C}$-linéaire).

La conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est $\mathbb{R}$-linéaire. Elle s'écrit alors

$$dx - idy \ .$$

Il devient naturel de la noter $\overline{dz}$. On remarque qu'ici $a = \overline{dz}(1) = 1$ mais que $b = \overline{dz}(i) = -i$, donc $\overline{dz}$ n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

Dérivée partielle (rappel)

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.

La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ de f par rapport à x en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ est définie comme la limite (si elle existe)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f((x_0 + h) + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} \; .$$

De même la dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ de f par rapport à y en $z_0 = x_0 + iy_0$ est

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + h)) - f(x_0 + iy_0)}{h} \; .$$

Remarque

Les notions précédentes de dérivées partielles pour une fonction de la variable complexe correspondent à celles connues pour les fonctions de deux variables réelles.

En effet, puisque $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels réels, on peut associer à $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction $\tilde{f}\colon V \to \mathbb{C}$, où $V = \{\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + iy \in U \,\}$, définie par $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$.

On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \dfrac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)$ où on a posé $z_0 = x_0 + iy_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{R})$.

Définition

Soient U un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : U \to \mathbb{C}$.

- On dit que f est différentiable en $z_0 \in U$ s'il existe deux nombres complexes a, b tels que pour tout $h \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + a\Re(h) + b\Im(h) + |h|\epsilon(h)$$

  avec $\lim_{h\to 0} \epsilon(h) = 0$.
- De plus, $h \mapsto a\Re(h) + b\Im(h)$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ notée $df(z_0)$ et est appelée différentielle de f en z_0.
- On dit que f est différentiable sur U si f est différentiable en tout point de U.

Remarques

On montre que si f est différentiable en z_0, alors $a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $b = \dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ de telle sorte que

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy \ .$$

Par ailleurs, la notion de différentiabilité pour une fonction f de la variable complexe z du transparent précédent correspond à la notion de différentiablité de la fonction $\tilde{f}$ de deux variables réelles qui lui est associée.

On a bien sûr $df(z_0) = d\tilde{f}(x_0, y_0)$ pour $z_0 = x_0 + iy_0$ $(x_0, y_0 \in \mathbb{C})$.

Proposition

Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$.

Si f est dérivable (au sens complexe) en un point $z_0 \in U$, alors f est différentiable en z_0 et sa différentielle en z_0 est $\mathbb{C}$-linéaire.

Preuve

On a donc

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h}-f'(z_0)\right)=0\ .$$

On peut l'écrire

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(z_0+h)-f(z_0)-f'(z_0)h|}{|h|}=0\ .$$

Cela montre que f est différentiable en z_0, et que la différentielle est l'application $\mathbb{C}$-linéaire $df(z_0)\colon z\mapsto f'(z_0)z$. □

De la démonstration précédente, on tire l'expression suivante de la différentielle d'une fonction dérivable :

$$df(z_0)=f'(z_0)dz\ .$$

Cela justifie *a posteriori* la notation $\dfrac{df}{dz}$ parfois utilisée pour la dérivée.

Exemple

L'application $z \mapsto \overline{z}$, étant $\mathbb{R}$-linéaire, est identique à sa différentielle en tout point (i.e., $df(z_0)z = \overline{z}$ pour tout $z_0, z \in \mathbb{C}$).

Celle-ci n'est donc pas $\mathbb{C}$-linéaire. On retrouve donc (par contraposée) que la conjugaison n'est dérivable en aucun point.

CNS

Proposition

Soit f une fonction complexe définie au voisinage d'un point z_0. On suppose f différentiable en z_0. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

1. f est dérivable (au sens complexe) en z_0.
2. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
3. La différentielle $df(z_0)$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

On en déduit le corollaire suivant :

f est holomorphe dans U si, et seulement si, f est différentiable sur U et sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Exemple

Soit f la fonction définie pour $z = x + iy$ par

$$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy + 4 \ .$$

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(z) = 2x + 2iy - 3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(z) = i(2x + 2iy - 3)$.

f étant clairement différentiable en tout point de $\mathbb{C}$, f est dérivable dans $\mathbb{C}$ et donc holomorphe dans $\mathbb{C}$.

Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $f = P + iQ$ une fonction complexe définie au voisinage de z_0, où $P(z) = \Re(f(z))$ et $Q(z) = \Im(f(z))$. Pour que f soit dérivable en z_0 if faut et il suffit que f soit différentiable en z_0 et que sa différentielle vérifie les conditions de Cauchy-Riemann en ce point :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} & = & \dfrac{\partial Q}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

On a alors
$f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\dfrac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(z_0) - i\dfrac{\partial P}{\partial y}(z_0)$.

Table des matières

Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ ou de $\mathbb{C}$ à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est harmonique sur U si f est de classe[a] C^2 sur U et si :

$$\Delta f = 0 \text{ sur } U$$

où Δ est le Laplacien :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

---

[a] Cela signifie que f est différentiable et que ses dérivées partielles sont de classe C^1. Or dire qu'une fonction à valeurs réelles ou complexes est de classe C^1 signifie qu'elle est différentiable et que ses dérivées partielles sont continues.

Exemple

La fonction $P\colon (x,y) \mapsto x^2 - y^2$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2$ car

$$\Delta P(x,y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x,y) = 2 - 2 = 0$$

Quelle est le rapport entre fonction holomorphe et fonction harmonique ?

Théorème

1. Toute fonction holomorphe sur un ouvert U de $\mathbb{C}$ est harmonique sur U.
2. Réciproquement, toute fonction harmonique à valeurs réelles est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.