

Dérivation complexe et fonctions holomorphes

Exercice 1

Montrer que la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$ n'est dérivable en aucun point du plan complexe. (Indication : représenter $z - z_0$, avec $z \neq z_0$, en coordonnées polaires.)

Solution 1

Pour $z \neq z_0$, on a en utilisant la représentation polaire $z - z_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = e^{-2i\theta} \xrightarrow[r \rightarrow 0]{} e^{-2i\theta}$$

et par conséquent $\frac{\bar{z} - \bar{z}_0}{z - z_0}$ n'a pas de limite lorsque z tend vers z_0 dans \mathbb{C} (par exemple, pour $\theta = 0$ et $\theta = \frac{\pi}{2}$, on a deux valeurs différentes).

Exercice 2

Montrer directement par un calcul que pour tout entier naturel n , la fonction $f: z \mapsto z^n$ est entière, avec pour $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = nz^{n-1}$ pour $n > 0$ et $f'(z) = 0$ pour $n = 0$.

Solution 2

Pour $n = 0$, f est uniformément égale à 1, et elle est entière de dérivée nulle (facile). Pour $n = 1$, de $\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$, on en déduit que f est entière avec $f'(z_0) = 1$ pour tout z_0 . Pour $n \geq 2$, de

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{} nz_0^{n-1}$$

(En effet $z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k$ et $z \mapsto z^k$ est continue pour tout entier naturel k .) On en déduit que f est entière avec $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 3

Montrer par le calcul que pour tout entier naturel non nul, la fonction $f: z \mapsto \frac{1}{z^n}$ est holomorphe sur \mathbb{C}^* avec $f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Solution 3

De

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z_0^n - z^n}{z^n z_0^n (z - z_0)} = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1-k} z_0^k}{z^n z_0^n} = - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z^{k+1} z_0^{n-k}} \xrightarrow[z \rightarrow z_0]{} - \frac{n}{z_0^{n+1}}$$

(par continuité des fonctions $z \mapsto \frac{1}{z^k}$ sur \mathbb{C}^* pour tout entier naturel non nul k), on en déduit le résultat souhaité.

Exercice 4

Soient $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $]a, b[$ un segment réel non vide et $\gamma:]a, b[\rightarrow U$ une application dérivable. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable sur $]a, b[$ avec $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

Solution 4

Pour tout $t \neq t_0$ dans $]a, b[$, on a

$$\begin{aligned} \frac{(f \circ \gamma)(t) - (f \circ \gamma)(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(\gamma(t)) - f(\gamma(t_0))}{t - t_0} \\ &= \frac{f'(\gamma(t_0))(\gamma(t) - \gamma(t_0)) + |\gamma(t) - \gamma(t_0)|\epsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0))}{t - t_0} \quad (1) \\ &= f'(\gamma(t_0))\frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} + \frac{|\gamma(t) - \gamma(t_0)|\epsilon(\gamma(t) - \gamma(t_0))}{t - t_0} \end{aligned}$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$. Par passage à la limite pour $t \rightarrow t_0$ on obtient le résultat désiré (notons que γ étant dérivable, elle est continue et donc $\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0)$).

Exercice 5

En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que les fonctions suivantes ne sont pas entières.

1. $f_1(z) = \bar{z}$;
2. $f_2(z) = \Re(z)$;
3. $f_3(z) = \Im(z)$;
4. $f_4(z) = |z|^2$;
5. $f_5(z) = |z|$.

Solution 5

1. On a $f_1 = P_1 + iQ_1$ avec $P_1(z) = x$ et $Q_1(z) = -y$, ainsi que $\frac{\partial P_1}{\partial x}(z_0) = 1 \neq \frac{\partial Q_1}{\partial y}(z_0) = -1$.
2. On a $P_2(z) = x$, $Q_2(z) = 0$.
3. $P_3(z) = 0$ et $Q_3(z) = y$.
4. $P_4(z) = x^2 + y^2$ et $Q_4(z) = 0$.
5. $P_5(z) = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $Q_5(z) = 0$.

Exercice 6

La fonction f définie sur \mathbb{C} par $f(z) = \Re(z)^2 \Im(z) + i \Im(z)$ est-elle holomorphe ?

Solution 6

Posons $z = x + iy$ de sorte que $f(z) = x^2 y + iy$. On a $f = P + iQ$ avec $P(z) = x^2 y$ et $Q(z) = y$. Comme $\frac{\partial P}{\partial x}(z) = 2xy \neq \frac{\partial Q}{\partial y}(z) = 1$ pour tout z dans $\mathbb{C} \setminus H$ où $H = \{z : 2\Re(z)\Im(z) = 1\}$ et que par ailleurs pour tout $z \in H$, on a $\frac{\partial P}{\partial y}(z) = x^2 \neq -\frac{\partial Q}{\partial x}(z) = 0$, la fonction f n'est pas holomorphe.

Exercice 7

Connaissant les fonctions de la variable réelle \exp, \sin et \cos , on peut définir la fonction $x \mapsto e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ de \mathbb{R} dans \mathbb{C} , et la fonction exponentielle complexe $\exp(x + iy) = e^x e^{iy}$ sur \mathbb{C} . Montrer que cette fonction est entière avec $\exp' = \exp$.

Solution 7

On a $\exp(x+iy) = P(x+iy) + iQ(x+iy)$ avec $P(x+iy) = e^x \cos(y)$ et $Q(x+iy) = e^x \sin(y)$. Les fonctions P et Q sont différentiables sur \mathbb{C} et on a

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x_0 + iy_0) = e^{x_0} \cos(y_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(x_0 + iy_0) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + iy_0) = -e^{x_0} \sin(y_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(x_0 + iy_0) \end{cases}$$

Il en résulte donc (par les conditions de Cauchy-Riemann) que \exp est entière. Pour tout complexe $z_0 = x_0 + iy_0$, on a

$$\exp'(z_0) = \frac{\partial \exp}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = e^{x_0} \cos(y_0) + i e^{x_0} \sin(y_0) = \exp(z_0) .$$

Exercice 8

Démontrer que les fonctions puissances $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment une famille \mathbb{C} -linéairement indépendante du \mathbb{C} -espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes.

Solution 8

$\{z \mapsto z^n : n \in \mathbb{N}\}$ est une famille linéaire indépendante sur \mathbb{C} si, et seulement si, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sont tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$, alors tous les a_i sont nuls.

Démontrons cela par récurrence sur l'entier n . Pour $n = 0$, c'est à l'évidence vrai. Supposons la propriété vraie pour $n - 1$. Pour simplifier posons pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, par hypothèse, on a $0 = P(2z) - 2^n P(z) = \sum_{i=0}^{n-1} (2^i - 2^n) a_i z^i$. Par hypothèse de récurrence on en déduit que $(2^i - 2^n) a_i = 0$ pour tout $i \leq n - 1$, et donc que $a_i = 0$ pour tout $i \leq n - 1$. Il vient donc $a_n z^n = P(z) = 0$, d'où $a_n = 0$ (en prenant $z \neq 0$).