

Transformée de Laplace

Exercice 1

Déterminer par un calcul direct la transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{\alpha t}\mathcal{U}(t)$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$.

Solution 1

Tout d'abord f est causale. Elle est continue sur $[0; +\infty[$. Enfin elle est à croissance au plus exponentielle de façon évidente ($|f(t)| = |e^{\alpha t}| = |e^{(\Re(\alpha) + i\Im(\alpha))t}| = e^{\Re(\alpha)t}$). Son abscisse de convergence est inférieure ou égale à $\Re(\alpha)$. Calculons donc $\mathcal{L}(f)$ pour z tel que $\Re(z) > \Re(\alpha)$. On a $\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt} dt = \int_0^{+\infty} e^{t(\alpha-z)} dt = \left[\frac{e^{t(\alpha-z)}}{\alpha-z} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} = -\frac{1}{\alpha-z} = \frac{1}{z-\alpha}$ pour tout z tel que $\Re(z) > \Re(\alpha)$. (Bien sûr $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-tz_0} = 0$ pour tout nombre complexe z_0 tel $\Re(z_0) > 0$, car $|e^{-tz_0}| = e^{-t\Re(z_0)} \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.)

Exercice 2

- Déterminer la transformée de Laplace de $f_n: t \mapsto t^n \mathcal{U}(t)$ pour tout entier naturel n de deux façons : tout d'abord par un calcul direct et puis en utilisant une propriété de la transformée de Laplace.
- En déduire la transformée de Laplace d'une fonction polynomiale (d'une variable réelle) $P\mathcal{U}: t \mapsto P(t)\mathcal{U}(t)$ où $P: t \mapsto P(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i t^i$, $\alpha_i \in \mathbb{C}$ pour tout $0 \leq i \leq n$.
- Calculer l'inverse de la transformée de Laplace de $z \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{\beta_i}{z^i}$, $\beta_i \in \mathbb{C}$, $\Re(z) > 0$, avec $\beta_0 = 0$.

Solution 2

- Les deux méthodes :

(a) Première méthode : Pour $n = 0$, on a $f_0 = \mathcal{U}$ de sorte que $\mathcal{L}(f_0)(z) = \frac{1}{z}$ pour tout $\Re(z) > 0$ (voir cours). Soit $n > 0$. Soit $R > 0$. On a $\int_0^R t^n e^{-zt} dt = \left[\frac{-t^n e^{-tz}}{z} \right]_{t=0}^{t=R} + \int_0^R nt^{n-1} \frac{e^{-tz}}{z} dt$ (IPP avec $u' = e^{-tz}$ donc $u = -\frac{e^{-tz}}{z}$, et $v = t^n$ donc $v' = nt^{n-1}$) $= -\frac{R^n e^{-Rz}}{z} + \frac{n}{z} \int_0^R t^{n-1} e^{-tz} dt$. Raisonnons par récurrence sur la propriété que $a(f_n) \leq 0$ (c'est vrai pour $n = 0$). Supposons-la donc vraie pour $n - 1$. Supposons que $\Re(z) > 0$. Donc $\mathcal{L}(f_{n-1})(z) = \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-tz} dt = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R t^{n-1} e^{-tz} dt$ pour tout $\Re(z) > 0$. Comme les applications $t \mapsto t^n$ et $t \mapsto -\frac{e^{-tz}}{z}$ sont toutes deux de classe C^1 et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^{-tz} t^n}{z}$ existe et vaut 0, on peut passer à la limite dans l'intégration par parties (qui est donc valide)

et il en résulte donc que $\mathcal{L}(f_n)(z)$ est définie pour $\Re(z) > 0$ (de sorte que $a(f_n) \leq 0$) et vaut $\mathcal{L}(f_n)(z) = \frac{n}{z} \mathcal{L}(f_{n-1})(z)$. On voit donc que $(\mathcal{L}(f_n)(z))_n$ est solution de l'équation récurrente $u_0 = \frac{1}{z}$ et $u_{n+1} = \frac{(n+1)}{z} u_n$ pour chaque z tel que $\Re(z) > 0$. On en déduit donc que $\mathcal{L}(f_n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$ (par une simple récurrence) pour tout z tel que $\Re(z) > 0$.

(b) Seconde méthode : La fonction f_n correspond à la fonction $M_n(\mathcal{U})$ vue en cours (cf. transparent "Dérivation de la transformée de Laplace"). D'après la proposition vue en cours on a $\mathcal{L}(f_n)(z) = (-1)^n (\mathcal{L}(\mathcal{U}))^{(n)}(z) = (-1)^n (z \mapsto \frac{1}{z})^{(n)}$ pour tout $\Re(z) > 0$. Donc $\mathcal{L}(f_0)(z) = \mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \frac{1}{z}$. Puis on démontre par récurrence sur n que $\mathcal{L}(f_n)(z) = \frac{n!}{z^{n+1}}$.

2. Par linéarité de la transformée de Laplace, on a (en utilisant les notations de l'exercice) pour tout z tel que $\Re(z) > 0$, $\mathcal{L}(P\mathcal{U})(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \mathcal{L}(f_i)(z) = \sum_{i=0}^n \alpha_i \frac{i!}{z^{i+1}}$ (compte tenu du début de l'exercice).

3. Soit $F: z \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{\beta_i}{z^i}$ pour $\Re(z) > 0$. Donc $G(z) = \frac{1}{z} F(z) = \sum_{i=0}^n \frac{\beta_i}{z^{i+1}}$ est défini pour $\Re(z) > 0$. D'après la première question, G est la transformée de Laplace de $g: t \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{\beta_i}{i!} t^i \mathcal{U}(t)$. On cherche donc une fonction objet f telle que $\mathcal{L}(f)(z) = F(z)$

donc pour $\Re(z) > 0$ cela implique que $\frac{1}{z} \mathcal{L}(f)(z) = G(z) = \mathcal{L}(g)(z)$. On observe que $g(0) = \beta_0 = 0$ (par hypothèse). Donc g est la primitive de f qui s'annule en 0, c'est-à-dire $g(t) = \int_0^t f(s) ds$. Il suffit donc de considérer $f(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{(i-1)!} t^{i-1} =$

$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\beta_{i+1}}{i!} t^i$ pour $t \geq 0$, et $= 0$ pour $t < 0$. D'après le cours, on en déduit que $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{z} \mathcal{L}(f)(z) = \frac{1}{z} F(z)$, de sorte que $F = \mathcal{L}(f)$.

Exercice 3

Trouver la fonction objet continue f dont la transformée de Laplace est

$$F(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}$$

avec $a \neq b$.

Solution 3

La décomposition en éléments simples de F nous donne $F(z) = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right)$.

Bien sûr $\frac{1}{z-z_0} = \mathcal{L}(f_{z_0})(z)$ pour $f_{z_0}(t) = e^{tz_0} \mathcal{U}(t)$ ($\Re(z) > \Re(z_0)$) d'après la règle de modulation. Il en résulte donc que $F(z)$ est la transformée de Laplace de $f(t) = \frac{1}{b-a} (f_b(t) - f_a(t)) = \frac{1}{b-a} (e^{tb} - e^{ta}) \mathcal{U}(t)$.

Exercice 4

Trouver la transformée de Laplace de $f(t) = e^{-2t} (3 \cos 6t - 5 \sin 6t) \mathcal{U}(t)$.

Solution 4

Par linéarité on a $\mathcal{L}((3 \cos 6t - 5 \sin 6t)\mathcal{U}(t)) = 3\mathcal{L}(\cos 6t \mathcal{U}(t)) - 5\mathcal{L}(\sin 6t \mathcal{U}(t))$. On sait (vu en cours) que $\mathcal{L}(\sin t \mathcal{U}(t))(z) = \frac{1}{1+z^2}$ pour $\Re(z) > 0$. Par la règle de dilatation, on en déduit que $\mathcal{L}(\sin 6t \mathcal{U}(t))(z) = \frac{1}{6} \frac{1}{1+\frac{z^2}{36}} = \frac{1}{6} \frac{1}{\frac{36+z^2}{36}} = \frac{6}{36+z^2}$ pour tout $\Re(z) > 0$. Calculons maintenant $\mathcal{L}(\cos t \mathcal{U}(t))$. On sait que $\cos' t = -\sin t$ et comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \cos(t)\mathcal{U}(t) = \cos(0) = 1$. Donc d'après la règle de la transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction on a $\mathcal{L}(\sin(t) \mathcal{U}(t))(z) = -\mathcal{L}(\cos'(t) \mathcal{U}(t))(z) = -z\mathcal{L}(\cos(t) \mathcal{U}(t))(z) + 1$ donc $\mathcal{L}(\cos(t) \mathcal{U}(t))(z) = \frac{-1}{z}(\mathcal{L}(\sin(t) \mathcal{U}(t))(z) - 1) = \frac{z}{1+z^2}$ (comme, par le même calcul que $a(\sin(t) \mathcal{U}(t))$, on a $a(\cos(t) \mathcal{U}(t)) = 0$, l'égalité est vraie pour tout $\Re(z) > 0$). En utilisant une nouvelle fois la règle de dilatation, on en déduit que $\mathcal{L}(\cos 6t \mathcal{U}(t))(z) = \frac{1}{6} \frac{\frac{z}{6}}{1+\frac{z^2}{36}} = \frac{z}{36+z^2}$ pour tout $\Re(z) > 0$. En combinant les résultats précédents, $\mathcal{L}(3 \cos 6t - 5 \sin 6t)\mathcal{U}(t))(z) = \frac{3z - 30}{36 + z^2}$ pour tout $\Re(z) > 0$. Finalement, $\mathcal{L}(e^{-2t}(3 \cos 6t - 5 \sin 6t)\mathcal{U}(t))(z)$ s'obtient par la règle de modulation qui donne $\frac{3z - 24}{z^2 + 4z + 40}$ pour tout $\Re(z) > -2$.

Exercice 5

Le problème consiste à trouver une solution $y = y(t)$ à l'équation différentielle $a_2 y''(t) + a_1 y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$ pour $t > 0$ et avec les conditions initiales $y(0) = y_0$, $y'(0) = y_1$, où a_0, a_1, a_2, y_0, y_1 sont des constantes réelles, $a_2 \neq 0$ et $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ est donnée (on suppose en fait que $f \equiv 0$ pour tout $t < 0$).

1. Appliquer la transformée de Laplace sur l'équation différentielle (on suppose que les hypothèses d'existence des transformées de Laplace sont satisfaites).
2. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $a_0 = a_2 = 1$, $a_1 = 0$, $f(t) = \sin(t)\mathcal{U}(t)$, $y_0 = y_1 = 1$.

Solution 5

1. Notons $F(z) = \mathcal{L}(f)(z)$ et $Y(z) = \mathcal{L}(y)(z)$. On a $\mathcal{L}(y'')(z) = z^2 \mathcal{L}(y)(z) - zy(0) - y'(0) = z^2 Y(z) - zy_0 - y_1$ et $\mathcal{L}(y')(z) = z \mathcal{L}(y)(z) - y(0) = zY(z) - y_1$. On a donc $\mathcal{L}(a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y)(z) = a_2(z^2 Y(z) - zy_0 - y_1) + a_1(zY(z) - y_1) + a_0 Y(z) = F(z)$, soit

$$Y(z) = \frac{F(z) + a_2 y_0 z + a_2 y_1 + a_1 y_0}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0}.$$

2. Dans ce cas particulier, $F(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ de sorte que $Y(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2} + \frac{z + 1}{z^2 + 1}$. On retrouve facilement que $\frac{z}{z^2 + 1}$ est la transformée de Laplace de $\cos(t)$ et $\frac{1}{z^2 + 1}$ est celle de $\sin(t)$. Il nous reste donc à inverser $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$. On remarque que la dérivée de $\frac{1}{z^2 + 1}$ est $\frac{-2z}{(z^2 + 1)^2}$. Donc $\frac{1}{(z^2 + 1)^2} = \frac{1}{-2z} \mathcal{L}(\sin)'(z) = \frac{1}{2z} \mathcal{L}(t \sin(t))(z)$ (par la règle de dérivation de la transformée de Laplace), soit encore $\mathcal{L}(t \sin(t))(z) = \frac{2z}{(1 + z^2)^2}$. Or $t \sin(t)$ est la dérivée de la fonction $h(t) = -t \cos(t) + \sin(t)$ qui satisfait $\lim_{t \rightarrow 0^+} h(t) = 0$. On a donc (par la règle de la transformée de Laplace d'une dérivée) $\mathcal{L}(t \sin(t))(z) = \mathcal{L}(h')(z) = z \mathcal{L}(h)(z) - h(0^+) = z \mathcal{L}(h)(z)$. Il en résulte

donc que $\frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ est la transformée de Laplace de $\frac{1}{2}h(t) = -\frac{1}{2}t \cos(t) + \frac{1}{2} \sin(t)$.

Finalement $Y(z)$ est la transformée de Laplace de $\frac{3}{2} \sin(t) + \cos(t) - \frac{1}{2}t \cos(t)$.

Exercice 6

À l'aide d'intégrations par parties, déterminer la transformée de Laplace de $f_n(t) = \cos(nt)$ pour $n \in \mathbb{N}$. En déduire la transformée de Laplace inverse de $F(z) = \frac{4z}{z^2 + 64}$.

Solution 6

Pour $\Re(z) > 0$, on a par définition $\mathcal{L}(f_n)(z) = \int_0^{+\infty} \cos(nt)e^{-zt} dt = \left[\frac{\cos(nt)e^{-zt}}{-z} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} - \frac{n}{z} \int_0^{+\infty} \sin(nt)e^{-zt} dt = \frac{1}{z} - \frac{n}{z} \left(\left[\frac{\sin(nt)e^{-zt}}{-z} \right]_{t=0}^{t \rightarrow +\infty} + \frac{n}{z} \int_0^{+\infty} \cos(nt)e^{-zt} dt \right) = \frac{1}{z} - \frac{n^2}{z^2} \mathcal{L}(f_n)(z)$.

Cela conduit alors à $\mathcal{L}(f_n)(z) = \frac{z}{z^2 + n^2}$. On en déduit donc facilement que $F(z)$ est la transformée de Laplace de $4f_8$.

Exercice 7

Soient $T > 0$ et f une fonction T -périodique telle que $g: t \mapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ soit une fonction objet. Définissons $\phi(t) = f(t)(\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t - T))$ de sorte que $\phi(t) = f(t)$ pour $0 \leq t < T$ et $\phi(t) = 0$ sinon (i.e., pour $t \in]-\infty; 0[\cup [T; +\infty[$). Calculer $\mathcal{L}(g)$ en fonction de $\mathcal{L}(\phi)$. En déduire la transformée de Laplace de la fonction g associée à la fonction périodique f de période 1 telle que $f(t) = t$ pour $t \in [0; 1]$.

Solution 7

Comme f est T -périodique, $\phi(t) = f(t)\mathcal{U}(t) - f(t)\mathcal{U}(t - T) = f(t)\mathcal{U}(t) - f(t - T)\mathcal{U}(t - T)$ (car $f(t) = f(t - T + T) = f(t - T)$). On a donc $\mathcal{L}(\phi)(z) = \mathcal{L}(g)(z) - e^{-Tz} \mathcal{L}(g)(z)$ pour tout z tel que $\Re(z) > a(g)$ (par la règle de translation). De sorte que $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{1 - e^{-Tz}} \mathcal{L}(\phi)(z)$ pour tout z tel que $\Re(z) > \max\{0, a(g)\}$.

On a $\phi(t) = t$ pour $t \in [0; 1[$ et $\phi(t) = 0$ sinon. Sa transformée de Laplace est $\mathcal{L}(\phi)(z) = \int_0^1 te^{-tz} dt = \left[-\frac{te^{-tz}}{z} \right]_{t=0}^{t=1} + \int_0^1 \frac{e^{-tz}}{z} dt = -\frac{e^{-z}}{z} + \left[\frac{-e^{-tz}}{z^2} \right]_{t=0}^{t=1} = -\frac{e^{-z}}{z} + \frac{1 - e^{-z}}{z^2}$. D'où $\mathcal{L}(g)(z) = \frac{1}{1 - e^{-z}} \left(-\frac{e^{-z}}{z} + \frac{1 - e^{-z}}{z^2} \right)$.

Exercice 8

Soient a et b deux nombres réels tels que $b < 0$. Calculer la transformée de Laplace inverse de $F(z) = \frac{1}{(z - a)(z^2 - b)}$. (Écrire $F(z)$ sous la forme $\frac{c}{z - a} + \frac{dz + e}{z^2 - b}$ puis utiliser les transformées de Laplace de \mathcal{U} et de \sin .)

Solution 8

Décomposons $F(z)$ en éléments simples $F(z) = \frac{c}{z - a} + \frac{dz + e}{z^2 - b}$. On trouve $c = \frac{1}{a^2 - b}$, $d = \frac{1}{b - a^2}$ et $e = \frac{a}{b - a^2}$, c'est-à-dire $F(z) = \frac{1}{a^2 - b} \left(\frac{1}{z - a} - \frac{z + a}{z^2 - b} \right)$. (On remarque que $a^2 - b \neq 0$ puisque $b < 0$). La transformée de Laplace de \mathcal{U} est $\mathcal{L}(\mathcal{U})(z) = \frac{1}{z}$ pour $\Re(z) > 0$. On en déduit que $\frac{1}{z - a} = \mathcal{L}(\mathcal{U})(z - a) = \mathcal{L}(e^{at}\mathcal{U}(t))(z)$ pour $\Re(z) > \Re(a)$ (modulation).

La transformée de Laplace de $\sin(t) \mathcal{U}(t)$ est $G(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ pour $\Re(z) > 0$, donc $\frac{a}{z^2 - b} = \frac{a}{|b|} \frac{1}{\left(\frac{z}{\sqrt{|b|}}\right)^2 + 1} = \frac{a}{\sqrt{|b|}} \frac{1}{\sqrt{|b|}} G\left(\frac{z}{\sqrt{|b|}}\right)$ de sorte que par la règle de dilatation il s'agit de la transformée de Laplace de $g(t) = \frac{a}{\sqrt{|b|}} \sin(\sqrt{|b|}t) \mathcal{U}(\sqrt{|b|}t) = \frac{a}{\sqrt{|b|}} \sin(\sqrt{|b|}t) \mathcal{U}(t)$. Puis $\frac{z}{z^2 - b} = \frac{z}{\sqrt{|b|}} \frac{1}{\sqrt{|b|}} G\left(\frac{z}{\sqrt{|b|}}\right) = z \mathcal{L}(h)(z)$ pour $h(t) = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \sin(\sqrt{|b|}t) \mathcal{U}(\sqrt{|b|}t) = \frac{1}{\sqrt{|b|}} \sin(\sqrt{|b|}t) \mathcal{U}(t)$. Comme $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sin(\sqrt{|b|}t) \mathcal{U}(t) = 0$, on en déduit, d'après la règle de la transformée de Laplace de la dérivation, que $\frac{z}{z^2 - b}$ est la transformée de Laplace de $h'(t) = \cos(\sqrt{|b|}t) \mathcal{U}(t)$. Finalement, $F(z)$ est la transformée de Laplace de $\frac{1}{a^2 - b} \left(e^{at} - \cos(\sqrt{|b|}t) - \frac{a}{\sqrt{|b|}} \sin(\sqrt{|b|}t) \right) \mathcal{U}(t)$.