Outils Mathématiques - Chapitre IV : Résidus et applications

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Transformée de Laplace.
- Chap. VI : Transformée de Fourier.
- Chap. VII : Transformée en Z.

Table des matières

Définition

On appelle série de Laurent toute série de fonctions de terme général $z \mapsto a_n(z-z_0)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, pour un nombre complexe z_0 fixé.

Une telle série est donc de la forme

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{partie principale}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\text{partie régulière}}.$$

Convergence

Soit ρ le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} z^n$ et soit R celui de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Posons $r = 1/\rho$ (avec la convention $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ converge dans $|z - z_0| > r$.

De sorte que la série de Laurent $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$ est convergente dans la couronne $C(z_0; r, R) = \{\, z \in \mathbb{C} \colon r < |z - z_0| < R \,\}$.

Holomorphie des séries de Laurent

Bien sûr $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ est holomorphe dans $D(z_0; R)$

et $z \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ l'est dans $|z-z_0| > r$ (rappelons que si f est holomorphe dans U, alors $z \mapsto f(1/z)$ l'est dans $\{\, z \in \mathbb{C}^* \colon 1/z \in U \,\}$).

Il en résulte que $z \mapsto \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ est holomorphe dans la couronne $C(z_0; r, R)$.

Développement en série de Laurent

Théorème (admis)

Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C(z_0; r, R)$ centrée en z_0.

Alors f admet un développement en série de Laurent dans $C(z_0; r, R)$ et ce développement est unique.

Cela signifie qu'il existe une unique suite $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

On peut montrer que pour chaque entier n, $a_n = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z_0)^{n+1}}du$, et en particulier $a_{-1} = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma f(u)du$, où γ est un circuit simple, orienté dans le sens direct, tracé dans $C(z_0; r, R)$.

Table des matières

Définition

Un nombre complexe z_0 est appelé singularité isolée d'une fonction f si celle-ci est holomorphe dans un disque ouvert épointé $D(z_0; R) \setminus \{ z_0 \}$, mais pas nécessairement en z_0.

Objectif

On se propose d'étudier le comportement d'une fonction holomorphe au voisinage d'une singularité isolée.

Soit alors f une fonction holomorphe dans une couronne $C(z_0; r, R)$ et supposons que z_0 soit une singularité isolée de f.

Soit $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ le développement en série de Laurent de f dans $C(z_0; r, R)$.

Trois cas, s'excluant mutuellement, peuvent se produire.

1er cas : Fausse singularité

Supposons que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$, autrement dit la partie principale est nulle.

Dans ce cas f se prolonge par continuité en z_0 en posant $f(z_0) = a_0$, et ce prolongement est holomorphe au voisinage de z_0 (comme somme d'une série entière).

Exemple

Soient $f(z) = \dfrac{e^z - 1 - z}{z^2}$ et $z_0 = 0$.

On a $e^z - 1 - z = \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ sur $\mathbb{C}$ tout entier, de sorte que

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{(m+2)!} \text{ sur } \mathbb{C}^*.$$

Or la série entière admet $+\infty$ comme rayon de convergence, donc elle converge également en $z = 0$ où elle vaut $\frac{1}{2}$.

Exemple

Étudions $f(z) = 1/z$ au point $z_0 = 1$.

On a $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{1+(z-1)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n$ pour tout $0 < |z-1| < 1$.

Or la série entière converge pour $|z-1| < 1$. On en déduit que $z_0 = 1$ est une fausse singularité (c'est même un point d'holomorphie de f).

2nd cas : Pôle

Supposons qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $a_{-n} = 0$ pour tout $n > m$ et $a_m \neq 0$, autrement dit la partie principale n'admet qu'un nombre fini de termes non nuls.

On dit alors que z_0 est un pôle d'ordre m. Si $m = 1$ (respectivement, 2, 3), on dit que z_0 est un pôle simple (respectivement, double, triple).

Dans ce cas, la partie principale est une fonction rationnelle (mais pas nécessairement la fonction f).

Si z_0 est un pôle, alors $\lim_{z \to z_0} |f(z)| = +\infty$, et la fonction $(z - z_0)^m f(z)$ se prolonge en une fonction holomorphe g au voisinage de z_0 telle que $g(z_0) \neq 0$.

Cela revient aussi à dire que $f - \sum_{k=1}^{m} \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k}$ admet une fausse singularité en z_0.

Exemples

1. Soient $f(z) = 1/z$ et $z_0 = 0$.

   Le développement de Laurent de f en z_0 est trivialement $1/z$ de sorte que $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1 de f.

2. Soient $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + z}$ et $z_0 = 0$.

   On a $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)} = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z+1} = \dfrac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$ pour tout $0 < |z| < 1$.

   Il s'ensuit que $z_0 = 0$ est un pôle simple de f.

3ème cas : Singularité essentielle

Supposons qu'il existe une infinité d'entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $a_{-n} \neq 0$.

On dit que z_0 est une singularié essentielle.

On peut montrer que dans ce cas que f n'est pas bornée au voisinage de z_0 et que $\lim_{z \to z_0} |f(z)| \neq +\infty$.

Exemples

1. $f(z) = e^{1/z}$, $z_0 = 0$.

   On a pour tout $z \neq 0$, $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! z^n}$ de sorte que $z_0 = 0$ est une singularité essentielle.

2. $f(z) = z^2 e^{\frac{1}{(z-1)^2}}$, $z_0 = 1$. On a pour tout $z \neq 1$,

$$f(z) = z^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} = ((z-1)+1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n!(z-1)^{2n-2}} + \frac{2}{n!(z-1)^{2n-1}} + \frac{1}{n!(z-1)^{2n}} \right) =$$

$$(z-1)^2 + 2(z-1) + 2 + \frac{2}{(z-1)} + \frac{3}{2(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3} + \cdots =$$

$$(z-1)^2 + 2(z-1) + 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{(n+1)!} \frac{1}{(z-1)^{2n}} + \frac{2}{n!} \frac{1}{(z-1)^{2n-1}} \right).$$

   On peut en déduire que 1 est une singularité essentielle.

Application : Règle de l'Hôpital

Soient deux fonctions f et g holomorphes en z_0 telles que $f(z_0) = 0$ et g possède un zéro simple en z_0 (i.e., $g(z_0) = 0$ et $g'(z_0) \neq 0$).

Alors,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Preuve

Puisque f est holomorphe en z_0, elle admet un développement de Taylor $f(z) = \underbrace{f(z_0)}_{=0} + (z - z_0)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^{n-1}\right) =$
$(z - z_0)f'(z_0) + (z - z_0)f_1(z)$.

De même on obtient une expression $g(z) = (z - z_0)g'(z_0) + (z - z_0)g_1(z)$.

Puisque $f_1(z_0) = 0 = g_1(z_0)$ et $g'(z_0) \neq 0$, on en déduit que

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z_0) + f_1(z)}{g'(z_0) + g_1(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

$\square$

Autres singularités (1/2)

Commençons par quelques notions sur les fonctions trigonométriques complexes. On peut définir les fonctions entières suivantes :

$$
\begin{aligned}
\cosh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \, , \\
\sinh z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \, , \\
\cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \\
\sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}
\end{aligned}
\tag{1}
$$

On peut montrer que l'on a $\cosh z = (1/2)(e^z + e^{-z})$, $\sinh z = (1/2)(e^z - e^{-z})$, $\cos z = (1/2)(e^{iz} + e^{-iz})$ et $\sin z = (1/2i)(e^{iz} - e^{-iz})$. Bien entendu, $\cosh' z = \sinh z$, $\sinh' z = \cosh z$, $\cos' z = -\sin z$ and $\sin' z = \cos z$. On a des formules de passage : $\cos z = \cosh iz$, $\cosh z = \cos iz$, $\sin z = -i \sinh iz$, $\sinh z = -i \sin iz$.

Autres singularités (2/2)

Les zéros de la fonction sin sont exactement les zéros réels $z = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. La fonction $f(z) = \dfrac{1}{\sin(1/z)}$ est donc holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus (\{ \frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{Z}^* \} \cup \{ 0 \})$.

On peut montrer qu'il y a un pôle en tout point de la forme $1/k\pi$ de sorte que zéro est un point d'accumulation de points singuliers isolés : ce n'est ni un point d'holomorphie, ni un point singulier isolé (la fonction f ne saurait être holomorphe dans un disque épointé centré en 0). Nous n'envisageons pas ce cas dans le cadre de ce cours.

Remarque

On s'intéresse à la fonction $\frac{\sin z}{z}$, laquelle est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.

De plus $\lim_{z\to 0} \dfrac{\sin z}{z} = \lim_{z\to 0} \dfrac{\sin'(z)}{1} = \lim_{z\to 0} \cos z = \cos 0 = 1$ (par la règle de L'Hôpital, puisque sin et la fonction identique dz sont dérivables et s'annulent toutes deux en 0). Il en résulte que 0 est une fausse singularité.

Bon à savoir

1. Soit f une fonction holomorphe en z_0. Alors son développement de Taylor coïncide avec son développement de Laurent en z_0. Donc $Res(f, z_0) = 0$.
2. Soient U un ouvert, $z_0 \in U$, $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction qui est holomorphe dans $U \setminus \{ z_0 \}$. Soit $g\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Supposons que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in U \setminus \{ z_0 \}$. Alors z_0 est une fausse singularité de f (et donc $Res(f, z_0) = 0$). En effet, g, holomorphe, admet un développement en série de Taylor, en tout $z \in U$, donc notamment en z_0: $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$. Ce développement correspond donc au développement en série de Laurent de f en z_0 (par unicité), qui ne comporte pas de partie principale. Ce cas s'applique par exemple à la fonction $f(z) = \dfrac{(z - z_0)^d}{(z - z_0)^e Q(z)}$ où $0 < e \leq d$ et Q est un polynôme ne s'annulant pas en z_0.
3. Soit $f(z) = \dfrac{P(z)}{(z - z_0)^d Q(z)}$ avec P, Q deux polynômes ne s'annulant pas en z_0. En particulier $\dfrac{P}{Q}$ est holomorphe en z_0, donc admet un développement de Taylor en z_0, de sorte que
$f(z) = \dfrac{1}{(z - z_0)^d} \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n = \dfrac{a_0}{(z - z_0)^d} + \sum_{n \geq 1} a_n(z - z_0)^{n-d}$ et
$a_0 = \dfrac{P(z_0)}{Q(z_0)} \neq 0$. Donc z_0 est un pôle d'ordre d.

Table des matières

Définition

Le coefficient a_{-1} du développement en série de Laurent d'une fonction holomorphe autour d'une singularité isolée z_0 s'appelle le résidu de f en z_0 et se note $Res(f, z_0)$.

Exemple

Soient $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z^4}$ et $z_0 = 0$.

Le développement en série de Laurent de f en $z_0 = 0$ est
$f(z) = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{1}{2z^2} + \dfrac{1}{6z} + \dfrac{1}{24} + \dfrac{z}{120} + \cdots$

Donc $Res(f, 0) = \dfrac{1}{6}$.

Méthode de calcul du résidu en un pôle d'ordre m

Si z_0 est un pôle d'ordre m de f, alors on peut écrire :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m} \text{ avec } g \text{ holomorphe au voisinage de } z_0$$

et $Res(f, z_0)$ apparaît alors comme le coefficient du terme $(z-z_0)^{m-1}$ dans le développement en série entière de g c'est-à-dire :

$$Res(f, z_0) = \frac{g^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$$

Autrement dit $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{(m-1)}}{dz^{(m-1)}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)$

$= \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{(m-1)}} \left((z-z_0)^m f(z)\right)_{|z=z_0}$.

En particulier : si z_0 est un pôle simple de f alors $Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z-z_0) f(z)$.

Remarque

On peut calculer plus rapidement le résidu d'un pôle simple dans le cas particulier suivant :

Si $f = \frac{P}{Q}$ avec P, Q holomorphes au voisinage de z_0 et si $P(z_0) \neq 0$, $Q(z_0) = 0$ et $Q'(z_0) \neq 0$:

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{P(z)}{\frac{Q(z)}{z - z_0}} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

Exemples

1. $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$. Alors $z_0 = 0$ est un pôle double de f et donc $Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} \dfrac{d}{dz}(z^2 f(z)) = 0$.

2. $f(z) = \dfrac{1}{z^3} + \dfrac{2}{z}$. Alors $z_0 = 0$ est visiblement un pôle triple de f, et $Res(f, 0) = \dfrac{1}{2!} \dfrac{d^2}{dz^2}(z^3 f(z)) = 2$. (On aurait pu directement tirer de l'écriture de f que $a_{-1} = 2$.)

3. $f(z) = \dfrac{1}{z(z+1)}$. On sait déjà que 0 est un pôle simple et $Res(f, 0) = \lim_{z \to 0} \dfrac{1}{z+1} = 1$.

Théorème des résidus

Les résidus permettent le calcul d'intégrales curvilignes grâce au théorème suivant.

Théorème des résidus

Soient U un ouvert du plan complexe et f une fonction holomorphe dans $U \setminus S$ (f n'est holomorphe en aucun point de S) où $S \subseteq U$ est un ensemble fini de singularités isolées de f.

Soit K un compact à bord régulier contenu dans U dont la frontière n'intersecte pas U (on suppose que son bord ∂K est orienté dans le sens direct).

Soient $z_1, \cdots, z_m$ les éléments de S appartenant à l'intérieur de K.

Alors

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$

Remarque

Les points d'holomorphie de f sont exclus de S puisque f n'est, par hypothèse, holomorphe en aucun point de S.

Preuve (1/2)

On peut directement évacuer le cas où S n'a aucun point à l'intérieur de K, puisque dans ce cas cela se réduit à la première formule de Cauchy (cf. Chap. III).

Supposons donc qu'il y a des éléments $z_1, \cdots, z_m$ de S appartenant à l'intérieur de K. On considère alors le compact K' obtenu à partir de K en lui retirant des disques ouverts $D(z_k; \epsilon_k)$ (de rayons $\epsilon_k > 0$ suffisamment petits) centrés en z_k, $k = 1, \cdots, m$. On considère également des circuits simples γ'_k parcourant une fois dans le sens direct le cercle $|z - z_k| = \epsilon_k$, $k = 1, \cdots, m$.

On obtient donc un compact à bord K' dont le bord, supposé orienté directement, est constitué de celui de K ainsi que de $((\gamma'_k)^{\mathrm{op}})_{k=1}^m$.

Puisque f est holomorphe dans $U \setminus S$ et que $K' \subseteq U \setminus S$, il en résulte, par la première formule de Cauchy que

$$\int_{\partial K} f(z)dz - \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma'_k} f(z)dz = \int_{\partial K'} f(z)dz = 0.$$

Preuve (2/2)

Il reste donc à évaluer $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma'_k} f(z)dz$.

Par hypothèse f admet un développement $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(k)(z-z_k)^n$ en série de Laurent dans un disque épointé centré en z_k pour chaque $k = 1, \cdots, m$.

Or $\displaystyle\int_{\gamma'_k} a_n(k)(z-z_k)^n dz = 0$ pour tout $n \neq -1$ et
$\displaystyle\int_{\gamma'_k} a_{-1}(k)(z-z_k)^{-1} dz = 2i\pi a_{-1}(k) = 2i\pi Res(f, z_k)$.

On peut intervertir la somme et l'intégrale (convergence normale, donc absolue) et intégrer terme à terme la série de Laurent, ce qui conduit à

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i\pi \sum_{k=1}^{m} Res(f, z_k).$$

Table des matières

$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt$

Soit $R(x, y)$ une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule en aucun point du cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ (donc pour aucun point e^{it}, $t \in [0, 2\pi]$).

On se ramène à l'intégration d'une fonction holomorphe f sur le circuit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ puisque si on pose $f(z) = \frac{1}{iz}R(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i})$ on a, compte tenu que $\gamma'(t) = ie^{it}$,

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt = \int_\gamma f(z)dz = 2i\pi \sum Res(f, z_0)$$

où la somme porte sur les pôles z_0 de f appartenant à $D(0; 1)$, par le théorème des résidus.

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ (1/2)

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fonction rationnelle sans pôle réel et telle que $\deg Q \geq \deg P + 2$. (La seconde condition assure que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ existe par comparaison à la fonction $\dfrac{1}{x^2}$.)

Soit $r > 0$ et considérons le circuit γ_r composé du demi-cercle supérieur α_r de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct puis du segment de l'axe réel $[-r, r]$ parcouru dans le sens croissant.

On peut supposer r suffisamment grand pour que l'ensemble E des pôles de F dans le demi-plan ouvert supérieur $\{\, z \colon \Im(z) > 0 \,\}$ soit contenu dans l'intérieur de γ_r.

D'après le théorème des résidus,

$$\int_{\gamma_r} F(z)dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} Res(F, z_0).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ (2/2)

On a également

$$\int_{\gamma_r} F(z)dz = \int_{-r}^{+r} F(x)dx + \int_{\alpha_r} F(z)dz.$$

Puisque $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx$ est convergente, on a bien sûr

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} F(x)dx.$$

Comme $\deg P \leq \deg Q - 2$, $\lim_{|z|\to\infty} zF(z) = 0$, c'est-à-dire que pour $\epsilon > 0$, il existe $\nu > 0$ tel que pour tout $|z| \geq \nu$, $|zF(z)| < \epsilon$.

Donc $\displaystyle\left|\int_{\alpha_r} F(z)dz\right| \leq \int_0^{\pi} \left|F(re^{it})rie^{it}\right| dt \leq \pi\epsilon$ pour r suffisamment grand.

Cela conduit à $\displaystyle\lim_{r\to+\infty} \int_{\alpha_r} F(z)dz = 0$ de sorte que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)dx = 2i\pi \sum_{z_0\in E} Res(F, z_0).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx,\ \omega \in \mathbb{R}^*$ (1/3)

Soit $F = \dfrac{P}{Q}$ une fonction rationnelle telle que $\deg Q \geq 1 + \deg P$ et sans pôle réel.

Si $\deg Q > 1 + \deg P$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx$ converge. Si $\deg Q = 1 + \deg P$, alors $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx$ n'est pas absolument convergente, mais sa valeur principale de Cauchy $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{+r} F(x)e^{i\omega x}dx$ existe.

Soit $f(z) = F(z)e^{iz\omega}$. La fonction f possède les mêmes pôles que F.

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx$, $\omega \in \mathbb{R}^*$ (2/3)

1er cas : Supposons que $\omega > 0$

On intègre encore f le long de γ_r qui se décompose en α_r puis $[-r, r]$.

Soit E l'ensemble des pôles de F situés dans le demi-plan ouvert supérieur. Lorsque r est assez grand, le théorème des résidus nous donne :

$$\int_\gamma F(z)e^{i\omega z}dz = \int_{-r}^{+r} F(t)e^{it\omega}dt + \int_{\alpha_r} F(z)e^{i\omega z}dz = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} Res(f, z_0).$$

Par ailleurs on peut montrer que $\lim_{r\to+\infty} \int_{\alpha_r} F(z)e^{i\omega z}dz = 0$ (le fait que $\omega > 0$ est important) de sorte qu'en passant à la limite,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx = 2i\pi \sum_{z_0 \in E} Res(f, z_0).$$

$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx,\ \omega \in \mathbb{R}^*$ (3/3)

2nd cas : Supposons que $\omega < 0$

Si F est à valeurs réelles, alors on se ramène au cas précédent par conjugaison
$\overline{\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{-i\omega x}dx$.

Si F prend des valeurs complexes, alors on intègre $f(z) = F(z)e^{i\omega z}$ le long du circuit γ_r composé du demi-cercle inférieur α_r de centre 0 et de rayon r parcouru dans le sens direct puis du segment de l'axe réel $[-r, r]$ parcouru dans le sens décroissant (pour assurer que le bord du demi-disque inférieur soit orienté dans le sens direct).

Pour des raisons identiques au cas précédent, on obtient par le théorème des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{i\omega x}dx = -2i\pi \sum_{z_0 \in E} Res(f, z_0)$$

où E désigne l'ensemble des pôles de F (et donc de f) dans le demi-plan ouvert inférieur $\{\, z \colon \Im(z) < 0 \,\}$.

Le signe négatif qui apparaît ici provient de l'orientation du chemin parcourant $[-r, r]$.