

Résidus et applications

Quelques notions à savoir avant la correction

1. Soit f une fonction holomorphe en z_0 . Alors son développement de Taylor coïncide avec son développement de Laurent en z_0 . Donc $Res(f, z_0) = 0$.
2. Soient U un ouvert, $z_0 \in U$, $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction qui est holomorphe dans $U \setminus \{z_0\}$. Soit $g: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Supposons que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in U \setminus \{z_0\}$. Alors z_0 est une **fausse singularité** de f (et donc $Res(f, z_0) = 0$). En effet, g , holomorphe, admet un développement en série de Taylor, en tout $z \in U$, donc notamment en z_0 : $g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$. Ce développement correspond donc au développement en série de Laurent de f en z_0 (par unicité), qui ne comporte pas de partie principale. Ce cas s'applique par exemple à la fonction $f(z) = \frac{(z - z_0)^d}{(z - z_0)^e Q(z)}$ où $0 < e \leq d$ et Q est un polynôme ne s'annulant pas en z_0 .
3. Soit $f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_0)^d Q(z)}$ avec P, Q deux polynômes ne s'annulant pas en z_0 . En particulier $\frac{P}{Q}$ est holomorphe en z_0 , donc admet un développement de Taylor en z_0 , de sorte que $f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^d} \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n = \frac{a_0}{(z - z_0)^d} + \sum_{n \geq 1} a_n (z - z_0)^{n-d}$ et $a_0 = \frac{P(z_0)}{Q(z_0)} \neq 0$. Donc z_0 est un **pôle d'ordre d** .

Exercice 1

Il s'agit de trouver la série de Laurent de f en précisant la nature de la singularité, le résidu et le rayon de convergence.

1. $\sin z$ en $z_0 = \pi/4$.
2. $\frac{\sin z}{z^3}$ en $z_0 = 0$.
3. $\sin \frac{1}{z}$ en $z_0 = 0$.
4. $\frac{z^2 + 2z + 1}{z + 1}$ en $z_0 = -1$.
5. $\frac{1}{(1 - z)^3}$ en $z_0 = 1$.

Solution 1

1. La fonction \sin est holomorphe en $\pi/4$. Son développement en série de Laurent se confond donc avec son développement de Taylor en $\pi/4$. Il en résulte que $Res(f, \pi/4) = 0$ et que $\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sin^{(n)}(\pi/4) (z - \pi/4)^n$. Or on a $\sin'(z) = \cos(z)$ et $\cos'(z) = -\sin(z)$. Comme $\sin(\pi/4) = \sin'(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et que $\sin''(\pi/4) = \sin'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2$, il en résulte que $\sin(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{n!} (z - \pi/4)^n$, avec $\alpha_{4n} = \alpha_{4n+1} = -\alpha_{4n+2} = -\alpha_{4n+3} = 1$. La série de Taylor converge vers $f(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
2. On sait que $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ de sorte que $\frac{\sin z}{z^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n-2} = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+3)!} z^{2n}$. Donc 0 est un pôle double, et $Res(f, 0) = 0$. La série converge pour tout $z \neq 0$.

3. On développe $\sin y$ en série de Taylor et on pose $y = \frac{1}{z}$ pour obtenir

$$\sin y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} \Rightarrow \sin(1/z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}}.$$

On trouve alors que 0 est une singularité essentielle et $\text{Res}(f, 0) = 1$. La convergence a lieu pour tout $z \neq 0$.

4. $f(z) = \frac{z^2 + 2z + 1}{z + 1} = (z + 1)^2 / (z + 1)$, donc $z_0 = -1$ est une fausse singularité.

Par conséquent $\text{Res}(f, 0) = 0$. Le développement de Taylor en $z_0 = -1$ est donc trivialement $z + 1$. La convergence a lieu sur \mathbb{C} tout entier.

5. $f(z) = \frac{1}{(1-z)^3} = \frac{-1}{(z-1)^3}$ est le développement de Laurent de f en $z_0 = 1$. Il en résulte que z_0 est un pôle triple, et $\text{Res}(f, 1) = 0$. La convergence a lieu pour peu que $z \neq 1$.

Exercice 2

Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos(t) + 1}$$

où a est un paramètre réel qui ne prend pas les valeurs ± 1 .

Solution 2

Le cas où $a = 0$ est immédiat :

$$I(0) = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Supposons donc $a \neq 0$. Considérons $R(x, y) = \frac{1}{a^2 - 2x + 1}$. La méthode vue en cours conduit à l'expression

$$I(a) = \int_{\gamma} \frac{1}{iz} \frac{dz}{(a^2 - a(z + 1/z) + 1)}$$

où $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. On a (pour $z \neq 0$) $a^2 - a(z + 1/z) + 1 = (a - z)(a - 1/z) = 1/z(a - z)(az - 1)$ de sorte que

$$I(a) = \int_{\gamma} \frac{idz}{(z - a)(az - 1)} = \int_{\gamma} f(z) dz.$$

Il y a deux pôles simples $z = a$ et $z = 1/a$ (rappelons que par hypothèse $a \neq \pm 1$), mais aussi la singularité $z = 0$. Celle-ci est une fausse singularité (puisque $f(z) = \frac{i}{(z - a)(az - 1)}$ et le membre de droite est holomorphe en 0) donc $\text{Res}(f, 0) = 0$. Il y a deux cas à considérer : soit $|a| > 1$, soit $|a| < 1$. Supposons tout d'abord que

$|a| > 1$. On a donc $I(a) = 2i\pi \text{Res}(f, 1/a)$. Or $\text{Res}(f, 1/a) = \frac{1}{Q'(1/a)} = \frac{1}{1 - a^2}$ où

$Q(z) = (z - a)(az - 1)$. Ainsi $I(a) = 2i\pi \frac{i}{1 - a^2} = \frac{2\pi}{a^2 - 1}$. Pour $|a| < 1$, on trouve de

façon similaire : $I(a) = \frac{2\pi}{1 - a^2}$ (on remarque que ce résultat reste vrai si $a = 0$).

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} dx$.

Solution 3

On a $x^4 + 16 = (x^2 - 4i)(x^2 + 4i)$. Donc $x^4 + 16$ n'admet pas de racines réelles. Comme par ailleurs $\deg(16 + x^4) = 4 = \deg(x^2) + 2$, on peut appliquer la méthode vue en cours et affirmer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} dx = 2i\pi \sum_{a \in E} \text{Res}(F, a)$ où $F(z) = z^2/(16 + z^4)$ et E est l'ensemble des pôles de F dans le demi-plan supérieur.

Les pôles sont les zéros de $16 + z^4$. On a $z^4 = -16 = (2\omega)^4$ où ω est une racine quatrième de -1 (i.e., $\omega^4 = -1$), soit $\omega = e^{i(2k+1)\pi/4}$ pour $k = 0, 1, 2, 3$. (Rappelons que pour $n \geq 1$, et $z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0} \neq 0$, on a $z^n = z_0$ si, et seulement si, $r^n = r_0$ et $n\theta = \theta_0 + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, où on a posé $z = re^{i\theta}$, de sorte que r est l'unique racine n -ème réelle positive de r_0 et $\theta = \theta_0/n + k2\pi/n$, $k \in \mathbb{Z}$ ou encore modulo 2π , $\theta = \theta_0/n + k2\pi/n$, $k = 0, \dots, n-1$.)

On a donc comme pôles $z_1 = 2e^{i\pi/4}$, $z_2 = 2e^{i3\pi/4}$, $z_3 = 2e^{i5\pi/4}$ et $z_4 = 2e^{i7\pi/4}$. Ce sont donc des pôles simples et seuls z_1, z_2 appartiennent au demi-plan supérieur. Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} dx = 2i\pi(\text{Res}(F, z_1) + \text{Res}(F, z_2))$. Enfin, $\text{Res}(F, z_1) = \frac{z_1^2}{4z_1^3} = \frac{1}{4z_1} = \frac{1}{8}e^{-i\pi/4}$ et $\text{Res}(F, z_2) = \frac{1}{4z_2} = \frac{1}{8}e^{-3i\pi/4}$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} dx = \frac{1}{4}i\pi(e^{-i\pi/4} + e^{-3i\pi/4}) = \frac{1}{4}i\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i - 1 - i)\right) = \frac{\sqrt{2}\pi}{4}$.

Exercice 4

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$ en fonction de $\omega \in \mathbb{R}$, où $f(x) = 1/(x^2 + 1)$.

Solution 4

Bien sûr $z \mapsto f(z)$ n'admet pas de pôle sur l'axe des réels. Elle a un pôle simple i dans le demi-plan supérieur et un pôle simple $-i$ dans le demi-plan inférieur. Par ailleurs on a $f = \frac{P}{Q}$ avec $\deg Q = 2 \geq \underbrace{\deg P}_{=0} + 2$. Il en résulte, d'après ce que l'on a vu en cours, que pour $\omega > 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\omega x} dx = 2i\pi \text{Res}(f(z)e^{i\omega z}, i) = \pi e^{-\omega}$. Pour $\omega < 0$, on a $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{i\omega x} dx = -2i\pi \text{Res}(f(z)e^{i\omega z}, -i) = \pi e^{\omega}$. Pour $\omega = 0$, on a $f = \frac{P}{Q}$ avec $\deg Q = 2 \geq \underbrace{\deg P}_{=0} + 2$, f n'a pas de pôle réel, de sorte que $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx = 2i\pi \text{Res}(f(z), i) = \pi$. Il en résulte que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx = \pi e^{-|\omega|}$.

Exercice 5

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.

Solution 5

On introduit la fonction rationnelle $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{z^3}{z^4 + 5z^2 + 4}$. Le dénominateur admet i et $-i$ comme racines. La division par $z^2 + 1$ mène à $z^4 + 5z^2 + 4 = (z^2 + 1)(z^2 + 4)$. Elle n'a donc pas de pôle réel, et $\deg Q = 1 + \deg P$. Par raison de parité on a

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$$

(le membre de droite est en fait la partie imaginaire de la valeur principale $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^{+r} f(x)e^{ix} dx$) qui n'est autre que la partie imaginaire de

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 e^{ix}}{x^4 + 5x^2 + 4} dx.$$

On peut appliquer la méthode vue en cours de sorte que $J = i\pi(\text{Res}(f(z)e^{iz}, i) + \text{Res}(f(z)e^{iz}, 2i)) = i\pi\left(\left[\frac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z}\right]_{z=i} + \left[\frac{z^3 e^{iz}}{4z^3 + 10z}\right]_{z=2i}\right) = i\pi\left(\frac{2}{3e^2} - \frac{1}{6e}\right)$. Ainsi $I = \Im(J) = \pi\left(\frac{2}{3e^2} - \frac{1}{6e}\right)$.