

Résidus et applications

Exercice 1

Il s'agit de trouver la série de Laurent de f en précisant la nature de la singularité, le résidu et le domaine de convergence.

1. $\sin z$ en $z_0 = \pi/4$.
2. $\frac{\sin z}{z^3}$ en $z_0 = 0$.
3. $\sin \frac{1}{z}$ en $z_0 = 0$.
4. $\frac{z^2 + 2z + 1}{z + 1}$ en $z_0 = -1$.
5. $\frac{1}{(1 - z)^3}$ en $z_0 = 1$.

Exercice 2

Calculer l'intégrale

$$I(a) = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 - 2a \cos(t) + 1}$$

où a est un paramètre réel qui ne prend pas les valeurs ± 1 .

Exercice 3

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{16 + x^4} dx$.

Exercice 4

Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$ en fonction de $\omega \in \mathbb{R}$, où $f(z) = 1/(z^2 + 1)$.

Exercice 5

Calculer l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx$.