Outils Mathématiques - Chapitre III : Intégrales curvilignes et primitives

Laurent Poinsot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air

Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Transformée de Laplace.
- Chap. VI : Transformée de Fourier.
- Chap. VII : Transformée en Z.

Table des matières

Définition

Un chemin γ est une application de classe C^1 par morceaux définie sur un intervalle $[t_0, t_1]$ ($t_0 < t_1$) de $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, i.e., il existe une subdivision de $[t_0, t_1]$:

$$t_0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = t_1$$

telle que la restriction de γ à chaque $[x_i, x_{i+1}]$ ($0 \leq i < n$) soit C^1 (c'est-à-dire que la dérivée existe en tout point du segment – dérivée à droite en x_i, et dérivée à gauche en x_{i+1} – et y est continue).

Le complexe $\gamma(t_0)$ (respectivement, $\gamma(t_1)$) est l'origine (resp., l'extrémité) de γ.

Le compact $\gamma([t_0, t_1])$ est noté $\mathrm{supp}(\gamma)$ et est appelé le support de γ. Si $E \subseteq \mathbb{C}$ contient $\mathrm{supp}(\gamma)$, alors on dit que γ est tracé dans E.

Remarque

Rappel

Rappelons qu'une fonction est dite réglée si elle admet en tout point une limite à gauche et une limite à droite (lesquelles, bien sûr, peuvent différer). Une fonction continue est donc une fonction réglée.

Il résulte immédiatement de la définition que la dérivée d'un chemin est définie sur $[t_0, t_1]$ où elle est continue, sauf éventuellement aux points $x_1, \cdots, x_{n-1}$ où il y a néanmoins des limites à gauche et à droite.

Il s'ensuit que la dérivée d'un chemin est une fonction réglée qu'il est donc possible d'intégrer au sens de Riemann.

Exemples

Soient $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$. On définit un chemin $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ d'origine z_0 et d'extrémité z_1 par

$$\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz_1$$

ainsi qu'un chemin $\gamma^{\mathrm{op}}\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ d'origine z_1 et d'extrémité z_0 par

$$\gamma^{\mathrm{op}}(t) = tz_0 + (1-t)z_1.$$

Dans les deux cas, le support du chemin est le segment $[z_0 z_1]$ du plan complexe.

Chemin opposé

Étant donné un chemin $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$, on définit son chemin opposé γ^{op} : $[t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ par

$$\gamma^{\mathsf{op}}(t) = \gamma(t_0 + t_1 - t) \ .$$

L'origine de γ^{op} est l'extrémité de γ, et son extrémité est l'origine de γ.

Les deux chemins partagent le même support.

Deux chemins $\gamma_1 \colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 \colon [s_0, s_1] \to \mathbb{C}$ sont dits consécutifs si

$$t_1 = s_0$$

et

$$\gamma_1(t_1) = \gamma_2(s_0).$$

Il est alors possible de juxtaposer deux chemins consécutifs pour en former un troisième $\gamma_1 * \gamma_2 \colon [t_0, s_1] \to \mathbb{C}$ donné par

$$\begin{cases} (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \gamma_1(t) & \text{pour } t_0 \leq t \leq t_1, \\ (\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \gamma_2(t) & \text{pour } t_1 = s_0 \leq t \leq s_1. \end{cases}$$

L'opération $*$ de juxtaposition des chemins n'est bien sûr que partiellement définie sur l'ensemble des chemins, cependant elle est associative, i.e., pour tous chemins $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ tels que γ_1, γ_2 soient consécutifs et γ_2, γ_3 soient consécutifs, alors $\gamma_1 * \gamma_2, \gamma_3$ sont consécutifs, de même que $\gamma_1, \gamma_2 * \gamma_3$, et $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3 = \gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$.

Remarque

Bien sûr, $\mathrm{supp}(\gamma_1 * \gamma_2) = \mathrm{supp}(\gamma_1) \cup \mathrm{supp}(\gamma_2)$.

Circuit

Un circuit est un chemin $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(t_0) = \gamma(t_1)$.

Un circuit est dit simple lorsque $\gamma_{|_{[t_0,t_1[}}$ est une fonction injective (autrement dit, excepté aux extrémités, γ ne possède pas de point double, i.e., il ne se recoupe pas).

Exemples

Soit $R > 0$ un nombre réel. On définit :

1. Un circuit simple $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Il parcourt une fois dans le sens trigonométrique le cercle de rayon R. Son circuit opposé est $\gamma^{\mathrm{op}}(t) = Re^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.
2. $\delta(t) = Re^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$ effectue le même parcourt.
3. Soient $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Avec $\gamma(t) = z_0 + Re^{i(t+\theta)}$, $t \in [0, 2n\pi]$ on parcourt le cercle $|z - z_0| = R$ en commençant au point $z_0 + Re^{i\theta}$ et en effectuant n tours dans le sens direct.

Intérieur et extérieur

Rappel

Un ouvert U du plan complexe est dit connexe s'il ne peut pas s'écrire comme l'union de deux ouverts non vides et disjoints.

Soit γ un circuit simple.

Il partage le plan en deux ouverts connexes ayant pour frontière commune le support du circuit. L'un d'eux est borné (i.e., tous ses points satisfont à $|z| < R$ où R est une constante positive) et est appelé l'intérieur de γ, et l'autre, nécessairement non borné, est l'extérieur de γ.

On dit que γ est orienté dans le sens direct si son intérieur se trouve à sa gauche quand il parcourt son support (qui est la frontière de l'intérieur). Dans le cas contraire, on dit qu'il est orienté dans le sens inverse (ou indirect). (Cela correspond à la terminologie employée dans le cas usuel d'un cercle.)

Compact à bord régulier

Bien entendu l'adhérence K de l'intérieur d'un circuit simple γ est un compact (car l'adhérence d'une partie bornée est bornée).

Plus généralement donnons-nous $n+1$ circuits simples γ_i, $i = 0, \cdots, n$, tels que

1. l'intérieur de γ_0 contienne les intérieurs de γ_i, $i = 1, \cdots, n$, et leurs frontières ne s'intersectent pas,
2. les adhérences des intérieurs des circuits γ_i, $i = 1, \cdots, n$, sont deux à deux disjointes (autrement dit, les intérieurs sont deux à deux disjoints ainsi que les frontières, les compacts $\text{supp}(\gamma_i)$, $i = 1, \cdots, n$).

Soit alors K l'adhérence de l'intérieur de γ_0 duquel on ôte les intérieurs de γ_i, $i = 1, \cdots, n$ (ce sont des "trous"). K est bien entendu un compact, que l'on appelle un compact à bord régulier. Son bord ∂K est la suite $(\gamma_i)_{i=0}^n$.

On dit que le bord ∂K est orienté dans le sens direct lorsque γ_0 est orienté dans le sens direct et que chaque circuit γ_i, $i = 1, \cdots, n$, est orienté dans le sens indirect (de sorte que tout circuit laisse l'intérieur du compact à sa gauche). Quitte à remplacer un circuit par son circuit opposé, on peut toujours considérer que le bord est orienté dans le sens direct.

Table des matières

On se propose de donner un sens à l'écriture

$$\int_\gamma f(z)dz$$

où $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ est un chemin et où f est une fonction complexe continue sur le compact $\operatorname{supp}(\gamma) = \gamma([t_0, t_1])$.

Pour ce faire on pose par définition

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \ .$$

(Le second membre existe au sens de Riemann.) Il s'agit de l'intégrale curviligne de f le long du chemin γ.

Étant donnée une suite finie (éventuellement vide) $(\gamma_i)_{i=1}^n$ de chemins, on étend la définition précédente par

$$\int_{(\gamma_i)_{i=1}^n} f(z)dz = \sum_{i=1}^n \left(\int_{\gamma_i} f(z)dz \right) \ .$$

Exemple

Soit le chemin $\gamma(t) = t$ pour $t \in [t_0, t_1]$. Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt \ .$$

Ainsi l'intégrale curviligne le long d'un chemin généralise l'intégrale des fonctions complexes continues d'une variable réelle.

Exemple

Soit $\gamma(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Nous avons

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{Rie^{it}}{Re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2i\pi \ .$$

Les propriétés suivantes du calcul intégral complexe sont faciles à vérifier (en utilisant ce que l'on connaît de l'intégrale de Riemann).

Proposition

Soient $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ des chemins tels que γ_1, γ_2 soient consécutifs, soient f, g, f_1, f_2 des fonctions complexes telles que f, f_1 et f_2 soient continues sur $\mathrm{supp}(\gamma)$ et g est continue sur $\mathrm{supp}(\gamma_1) \cup \mathrm{supp}(\gamma_2)$, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_\gamma (f_1(z) + f_2(z))dz &= \int_\gamma f_1(z)dz + \int_\gamma f_2(z)dz \\
\int_\gamma (\lambda f(z))dz &= \lambda \int_\gamma f(z)dz \\
\int_{\gamma_1 * \gamma_2} g(z)dz &= \int_{\gamma_1} g(z)dz + \int_{\gamma_2} g(z)dz \\
\int_{\gamma^{\mathrm{op}}} f(z)dz &= -\int_\gamma f(z)dz \, .
\end{aligned}$$

Changement de paramètre (1/2)

Supposons que $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ soit un chemin, et soit $\phi\colon [s_0, s_1] \to [t_0, t_1]$ un C^1-difféomorphisme (ϕ est bijective, ϕ et ϕ^{-1} sont de classe C^1) tel que $\phi(s_0) = t_0$ et $\phi(s_1) = t_1$. Alors, on peut définir un nouveau chemin $\gamma \circ \phi\colon [s_0, s_1] \to \mathbb{C}$, obtenu par changement de paramètre.

Rappelons la formule du changement de variable : si g est une fonction intégrable sur $[t_0, t_1]$ au sens de Riemann, la formule du changement de variable donne

$$\int_{t_0}^{t_1} g(t)dt = \int_{s_0}^{s_1} g(\phi(s))\phi'(s)ds \ .$$

Appliquée à $g(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$, cela conduit à

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz \ .$$

Il résulte de cela que l'intégrale curviligne est invariante par changement de paramètre.

Changement de paramètre (2/2)

On vient donc de démontrer le résultat suivant :

Proposition

Soient $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ un chemin, $\phi\colon [s_0, s_1] \to [t_0, t_1]$ un C^1-difféomorphisme tel que $\phi(s_0) = t_0$ et $\phi(s_1) = t_1$, et f une fonction continue sur le compact $\mathrm{supp}(\gamma)$. Alors

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma\circ\phi} f(z)dz \ .$$

Longueur d'un chemin

Définition

On appelle longueur d'un chemin $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ le nombre $\ell(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt$.

Proposition

Soient $\gamma\colon [t_0, t_1] \to \mathbb{C}$ un chemin et f une fonction continue sur $\mathrm{supp}(\gamma)$. Alors

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \ell(\gamma)\left(\sup_{z\in\mathrm{supp}(\gamma)} |f(z)|\right).$$

Preuve

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leq \int_{t_0}^{t_1} |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|dt \leq \sup_{t\in[t_0,t_1]} |f(\gamma(t))| \int_{t_0}^{t_1} |\gamma'(t)|dt. \qquad \square$$

Table des matières

Primitive

Définition

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction.

On appelle primitive de f dans U toute fonction F, définie et holomorphe dans U, telle que

$$F' = f.$$

Remarque

Si F est une primitive de f, alors il en est de même de $F + c$ pour toute constante complexe c.

Exemples

1. La fonction polynomiale

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_0$$

admet dans $\mathbb{C}$ des primitives de la forme suivante

$$\frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots + a_0 z + c.$$

2. La fonction rationnelle

$$\frac{1}{(z-z_0)^2}$$

admet dans $\mathbb{C} \setminus \{ z_0 \}$ les primitives suivantes

$$-\frac{1}{z-z_0} + c.$$

Exemples

3. Dans le plan fendu $P = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$, la détermination principale du logarithme est une primitive de $\frac{1}{z}$.
4. Soit une série entière de rayon de convergence $R > 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

La série suivante, obtenue par intégration terme à terme,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

possède le même rayon de convergence R (voir chap. II), et, dans le disque de convergence $D(0; R)$ elle définit une primitive de la première série.

Proposition

Soient f une fonction complexe continue dans un ouvert U qui admet une primitive F dans U.

Étant donné un chemin γ tracé dans U (i.e., tel que $\mathrm{supp}(\gamma) \subseteq U$), d'origine z_0 et d'extrémité z_1, on a

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Preuve

Soit $\gamma\colon [t_0, t_1] \to U$ un chemin. Excepté peut-être sur un ensemble fini de points (où γ serait seulement dérivable à gauche et à droite mais non dérivable), on a $(F \circ \gamma)'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$.

D'où

$$\int_{t_0}^{t_1} (F \circ \gamma)'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_\gamma f(z)dz$$

d'une part (observons que l'hypothèse de continuité de f est utilisée ici), et d'autre part

$$\int_{t_0}^{t_1} (F \circ \gamma)'(t)dt = F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)) = F(z_1) - F(z_0) \ .$$

$\square$

Corollaire

Si une fonction continue f admet une primitive dans l'ouvert U, alors pour tout circuit γ tracé dans U,

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Remarque

La fonction $1/z$ est continue dans l'ouvert $\mathbb{C}^*$.

On a vu dans un exemple que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi$ pour le circuit $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Il en résulte que $1/z$ n'admet pas de primitive dans $\mathbb{C}^*$, et donc que l'on ne peut pas prolonger la détermination principale du logarithme à $\mathbb{C}^*$ tout entier.

Exemple important

Soit $f_n(z) = (z - z_0)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On se propose de calculer $\int_\gamma f_n(z)dz$ où γ est le cercle $|z - z_0| = R$ parcouru une seule fois dans le sens direct (avec $R > 0$).

1. Supposons que $n \geq 0$. Alors $F_n(z) = \dfrac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ est une primitive de f_n. On a donc $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$.

2. Supposons que $n < 0$. On peut expliciter γ en choisissant $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

   - Si $n = -1$, alors on a $\int_\gamma f_{-1}(z)dz = \int_0^{2\pi} f_{-1}(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_0^{2\pi} idt = 2i\pi$.

   - Si $n < -1$, alors bien sûr une primitive de $(z - z_0)^n$ sur $\mathbb{C} \setminus \{ z_0 \}$ est donnée par $\dfrac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ de sorte que l'on a encore $\int_\gamma f_n(z)dz = 0$.

Table des matières

Première formule de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert U et soit $K \subseteq U$ un compact à bord régulier.

Si on suppose que le bord ∂K est orienté dans le sens direct,

alors

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 0.$$

Peut-on remplacer le bord d'un compact à bord régulier par un chemin quelconque ?

Prenons par exemple $U = \mathbb{C}^*$ et $f(z) = \dfrac{1}{z}$ qui est holomorphe dans $\mathbb{C}^*$.

Choisissons pour circuit γ le cercle unité. On a

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2i\pi.$$

Le circuit γ est bien le bord d'un compact à bord régulier (le disque unité fermé). Mais celui-ci n'est pas contenu dans $\mathbb{C}^*$.

Soit U un ouvert (non vide) de $\mathbb{C}$. Soient $z_0 \in U$ et $R > 0$ tels que $\overline{D}(z_0; R) \subseteq U$.

Soit $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U.

Pour tout nombre complexe $z \in D(z_0; R)$ on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} du$$

où γ est un circuit qui parcourt le cercle $|z_0 - u| = R$ une fois dans le sens direct.

Preuve

Soit $z \in D(z_0; R)$. Pour tout $0 < \epsilon < R - |z - z_0|$ on pose $\gamma_\epsilon(t) = z + \epsilon e^{2i\pi t}$, $t \in [0, 1]$ (il s'agit donc d'un circuit simple parcourant le cercle de centre z et de rayon ϵ, une fois dans le sens direct).

Considérons ensuite le compact à bord régulier K constitué de γ et γ_ϵ (il s'agit donc de $\overline{D}(z_0; R)$ moins le disque ouvert $D(z; \epsilon)$). Remarquons que le bord de K n'est pas orienté dans le sens direct puisque γ_ϵ est lui-même orienté dans le sens direct.

La fonction $u \mapsto \dfrac{f(u)}{u - z}$ est holomorphe dans $U \setminus \{ z \}$ et $K \subseteq U$.

La formule de Cauchy sur le bord de K nous donne (compte tenu de l'orientation de γ_ϵ)

$$\int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} du - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(u)}{u - z} du = 0.$$

Or $\displaystyle\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(u)}{u - z} du = \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{u - z} du}_{=2i\pi f(z)} + \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(u) - f(z)}{u - z} du}_{|-| \leq 2\pi \sup_{|u-z|=\epsilon} |f(u)-f(z)|} \xrightarrow[\epsilon \to 0]{} 2i\pi f(z)$ (puisque f est continue en z). $\square$

Holomorphie $\Leftrightarrow$ Analycité

Théorème

Soient U un ouvert et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U.

Alors f est analytique au voisinage de tout point $z_0 \in U$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Preuve

Soit $R > 0$ assez petit pour que $\overline{D}(z_0; R) \subseteq U$. Soit $z \in D(z_0; R)$. D'après la formule de Cauchy pour un disque,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{u - z} du$$

où $\gamma(t) = z_0 + Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Par ailleurs, $\frac{1}{u-z} = \left(\frac{1}{u - z_0}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{u - z_0}}\right) = \frac{1}{u - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{u - z_0}\right)^n$ puisque $\left|\frac{z - z_0}{u - z_0}\right| < 1$.

Comme $\left|\frac{z - z_0}{u - z_0}\right| < 1$, la convergence est normale (donc absolue) sur le cercle $|u - z_0| = R$, et on peut donc intervertir l'intégration sur u et la somme sur n dans la formule de Cauchy, ce qui donne

$$f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

avec $a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du$. □

Corollaire

Soient U un ouvert, et $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe.

Alors
$$f \in C^\infty(U).$$

Remarque (Formule intégrale de Cauchy)

Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. Soient $z_0 \in U$ et $R > 0$ tels que $\overline{D}(z_0; R) \subseteq U$. Soit γ un circuit parcourant $|z_0 - u| = R$ une fois dans le sens direct.

Le développement en série entière de f en z_0 est égal à la série de Taylor de f en z_0 : $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,\ z \in D(z_0; R)$.

En identifiant les coefficients on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(u)}{(u - z_0)^{n+1}} du.$$