

# Outils Mathématiques - Chapitre II : Fonctions analytiques et exemples classiques

Laurent Poinot

LIPN UMR CNRS 7030  
Université Paris XIII & École de l'Air



# Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- **Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.**
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Transformée de Laplace.
- Chap. VI : Transformée de Fourier.
- Chap. VII : Transformée en Z.

# Table des matières

- 1 Définitions et premières propriétés des séries entières
- 2 Opérations sur les séries entières
- 3 Fonctions analytiques
- 4 Fonctions classiques

On s'intéresse à la somme (si elle existe) d'une série de fonctions de terme général  $z \mapsto a_n z^n$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ .

Sans se poser la question de la convergence, notons-la

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n .$$

Une telle série est appelée une **série entière**.

Bien sûr on s'intéresse aux conditions sous lesquelles cette série converge. Définissons pour cela  $R$  par

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$$

où on rappelle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{k \geq n} t_k .$$

Clairement,  $R \in [0, +\infty]$  (on pose par convention  $R = +\infty$ , lorsque  $\limsup_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 0$ ) et s'appelle le **rayon de convergence** de la série entière.

En fait  $R = \sup\{r \geq 0 : \sum_{n \geq 0} |a_n| r^n < +\infty\}$ .

## Rappels

Rappelons un critère de convergence qui sera parfois utile, à savoir la **règle de d'Alembert**.

Soit  $(x_n)_n$  une suite de réels strictement positifs. Supposons que la limite suivante existe

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} .$$

Alors

- 1 Si  $\ell < 1$ , la suite  $(x_n)_n$  converge vers 0 et la série de terme général  $x_n$  est convergente.
- 2 Si  $\ell > 1$ , la suite  $(x_n)_n$  ne tend pas vers 0 (et la série de terme général  $x_n$  diverge grossièrement).

La règle de d'Alembert peut donc être utilisée pour prouver la convergence absolue d'une série à termes complexes ou réels.

### Remarque

Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  est une série entière, alors son rayon de convergence est  $\frac{1}{\ell}$ ,

où  $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ .

## Proposition

Supposons  $R$  donné comme on vient de voir.

- 1 Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| < R$ , la série numérique  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  converge absolument. On dit que  $D(0; R)$  est le **disque de convergence** de la série.
- 2 La convergence de la série de fonctions est normale sur tout disque fermé  $\overline{D}(0; r)$  pour  $r < R$ . En d'autres termes, pour tout  $r < R$ ,  $\sum_{n \geq 0} \|a_n z^n\|_{\infty}$  converge, où  $\|f\|_{\infty} = \sup_{z \in \overline{D}(0; r)} |f(z)|$ .
- 3 Pour tout  $z \in \mathbb{C}$  tel que  $|z| > R$ , la série numérique diverge grossièrement (i.e., le terme général ne tend pas vers 0).

## Exemple : La série géométrique

Pour la série géométrique  $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ , on a immédiatement  $R = 1$ .

L'étude directe de la convergence est également très intéressante. Pour tout  $z \neq 1$  on a

$$1 + z + \dots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} .$$

Si  $|z| \geq 1$ , alors  $z^n$  ne tend pas vers 0 et la série diverge. En particulier il y a divergence en tout point du cercle  $|z| = 1$ .

Pour  $|z| < 1$ , le passage à la limite mène à l'égalité

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} .$$

## Exemple (série de Riemann)

Considérons la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ .

Soit  $u_n = \frac{z^n}{n^2}$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} |z| = |z|.$$

Il s'ensuit que

- Si  $|z| < 1$ , alors on obtient la convergence absolue.
- Si  $|z| > 1$ , alors la série diverge.

Ceci est suffisant pour affirmer que  $R = 1$ . De plus, pour  $|z| \leq 1$  on a  $\frac{|z|^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ . La série de Riemann convergente  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  (de somme  $\pi^2/6$ ) est ainsi une série majorante sur tout le disque fermé  $\overline{D}(0; 1)$ . En particulier, il y a ici convergence absolue en tout point du cercle de convergence  $|z| = 1$ .



## Exemple (série harmonique)

Considérons la série  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ .

La règle de d'Alembert nous donne  $R = 1$ .

Pour  $z = 1$  on a la série harmonique divergente  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ .

## La série exponentielle

Considérons la série exponentielle  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ .

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|z|}{n+1} = 0.$$

Donc la série est absolument convergente pour tout  $z$  et  $R = +\infty$ .

Considérons la série  $\sum_{n=0}^{\infty} n!z^n$ .

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!|z|^{n+1}}{n!|z|^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|z|.$$

Cette limite vaut  $+\infty$  sauf pour  $z = 0$ . D'où  $R = 0$ .

# Table des matières

- 1 Définitions et premières propriétés des séries entières
- 2 Opérations sur les séries entières**
- 3 Fonctions analytiques
- 4 Fonctions classiques

## Somme et produit

Soient  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  des séries entières de rayons de convergence respectifs  $R_A$  et  $R_B$ , et  $\lambda \in \mathbb{C}$ .

Posons  $S_n = a_n + b_n$ ,  $E_n = \lambda a_n$  et  $P_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$ . Notons  $R_S$ ,  $R_E$  et  $R_P$  les rayons de convergence respectivement de  $\sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$ .

- ①  $R_S \geq \min\{R_A, R_B\}$  (avec égalité lorsque  $R_A \neq R_B$ ), et pour tout

$$|z| < \min\{R_A, R_B\}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} S_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

- ②  $R_E = +\infty$  si  $\lambda = 0$ , et  $R_E = R_A$  si  $\lambda \neq 0$ , et pour tout  $|z| < R_A$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n z^n = \lambda \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right).$$

- ③  $R_P \geq \min\{R_A, R_B\}$ , et pour tout  $|z| < \min\{R_A, R_B\}$ ,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right).$$

## Substitution

Étant données deux séries entières  $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  et  $B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  telle que  $B(0) = 0$ , toutes deux de rayon de convergence non nul,

on définit

$$A(B(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n B(z)^n .$$

Alors le rayon de convergence de  $A(B(z))$  est non nul. Plus précisément : Soit  $R_A$  le rayon de convergence de  $A$ .

- 1 Il existe des réels  $r > 0$  pour lesquels  $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| r^n < R_A$ .
- 2 Si  $r$  est ainsi choisi, alors le rayon de convergence de la série entière  $A(B(z))$  lui est supérieur ou égal, et pour tout  $|z| \leq r$ ,  $|B(z)| < R_A$ .

## Dérivation

Les séries entières procurent des exemples de fonctions holomorphes, ce qui justifie leur étude dans le cadre de ce cours. En effet nous avons le résultat suivant :

### Proposition

Soient une série entière  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  et la série (dite **dérivée**)

$$D(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

- 1 Les deux séries ont le même rayon de convergence (disons  $R$ ).
- 2 Les fonctions  $S: z \mapsto S(z)$  et  $D: z \mapsto D(z)$  sont holomorphes dans  $D(0; R)$ , et

$$S'(z) = D(z)$$

pour tout  $z \in D(0; R)$ .

Il résulte immédiatement de cette proposition que toute série entière est de classe  $C^\infty$  dans son disque de convergence.

## Exemple

Posons pour  $|z| < 1$ ,

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} .$$

On a donc, à l'intérieur du disque unité :

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1} = \frac{1}{1-z} .$$



# Table des matières

- 1 Définitions et premières propriétés des séries entières
- 2 Opérations sur les séries entières
- 3 Fonctions analytiques**
- 4 Fonctions classiques

Soit  $f$  une fonction complexe définie dans un ouvert  $U$  du plan complexe.

### Définition

Soit  $z_0 \in U$ . On dit que  $f$  est **analytique en  $z_0$**  s'il existe

- un nombre  $r > 0$  tel que  $D(z_0; r) \subseteq U$ ,
- une série entière  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  de rayon de convergence  $R \geq r$

tels que l'on ait pour tout  $z \in D(z_0; r)$ ,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

On dit que  $f$  est **analytique** si elle est analytique en tout point de son ouvert de définition.

### Proposition

Toute fonction analytique en un point  $z_0$  est holomorphe en  $z_0$ . En particulier, toute fonction analytique est holomorphe.

## Exemple

Une fonction polynôme est analytique.

En effet soit  $f$  une fonction polynomiale de degré  $n$ . Alors elle vérifie l'identité de Taylor

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z - z_0)}{1!} f'(z_0) + \dots + \frac{(z - z_0)^n}{n!} f^{(n)}(z_0) .$$

Ceci montre que  $f$  est analytique en tout point  $z_0$ .

## Série de Taylor

Notons qu'une fonction analytique en  $z_0$  vérifie localement une identité qui généralise la précédente. Partant de l'égalité

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

on trouve par dérivations successives  $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ . D'où l'écriture en "série de Taylor"

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$$

où on a adopté la convention  $f^{(0)} = f$ .

### Proposition

Si une fonction  $f$  est holomorphe dans un disque ouvert  $D$ , sa série de Taylor au centre de  $D$  converge absolument en tout point de  $D$ .

# Table des matières

- 1 Définitions et premières propriétés des séries entières
- 2 Opérations sur les séries entières
- 3 Fonctions analytiques
- 4 Fonctions classiques

## Rappels sur les fonctions réelles

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on a les égalités suivantes (comme somme de séries convergentes) :

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \\ \cos(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, \\ \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned} \tag{1}$$

## Exponentielle complexe

La série exponentielle

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

ayant un rayon de convergence infini, elle définit une fonction entière : c'est la **fonction exponentielle (complexe)**, qui sera notée soit  $\exp(z)$ , soit  $e^z$ . Elle prolonge à  $\mathbb{C}$  la fonction exponentielle réelle (autrement dit elle coïncide avec cette dernière sur  $\mathbb{R}$ ).

### Proposition

On a  $\exp' = \exp$ .

### Preuve

En effet, d'après la proposition concernant la dérivée d'une série entière,

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp(z) .$$

## Quelques propriétés

- L'identité suivante est vérifiée

$$\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2) .$$

- En posant  $z = x + iy$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ), on a en particulier

$$\exp(z) = \exp(x) \exp(iy) .$$

Nous savons déjà que  $\exp(x) = e^x$ . D'autre part,

$$\exp(iy) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

de sorte qu'il vient

$$\exp(x + iy) = e^x (\cos(y) + i \sin(y)) .$$

Autrement dit,

$$|\exp(z)| = e^{\Re(z)}$$

et

$$\arg(\exp(z)) = \Im(z) \pmod{2\pi} .$$



## Et quelques différences avec l'exponentielle réelle

$\exp(i\pi) = \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$  et  $\exp(2i\pi) = \cos(2\pi) + i \sin(2\pi) = 1$ .  
Compte tenu de  $\exp(z_1 + z_2) = \exp(z_1) \exp(z_2)$ , on en déduit que pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,

$$\exp(z + i\pi) = -\exp(z)$$

et que  $2i\pi$  est une période, i.e.,

$$\exp(z + 2i\pi) = \exp(z) .$$

Cela complique la définition d'un logarithme complexe.

## Détermination principale du logarithme

Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Il s'écrit sous forme polaire  $z = |z|(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ .

Parmi les valeurs possibles pour  $\theta$  choisissons la détermination principale de l'argument caractérisée par la condition  $-\pi < \theta < \pi$ .

On peut alors définir une fonction  $L: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$  par  $L(z) = \ln(|z|) + i\theta$ .

Soit  $P = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  le **plan fendu**. Alors on peut montrer que  $L$  est **holomorphe dans  $P$**  et que  $L'(z) = \frac{1}{z}$ . La fonction holomorphe  $L: P \rightarrow \mathbb{C}$  s'appelle la **détermination** (ou **branche**) **principale** du logarithme; elle est notée **log**.

## Quelques propriétés

La fonction  $\log$  possède certaines propriétés du logarithme népérien.

- Sa dérivée est  $z \mapsto \frac{1}{z}$ .
- Elle coïncide avec  $\ln(x)$  pour  $x > 0$ .
- Pour tout  $z$  dans le plan fendu,  $z = \exp(\log(z))$ .

Cependant on a

$$\log(\exp(z)) = z$$

que sous la condition  $-\pi < \Im(z) < \pi$ .