Fonctions analytiques et exemples classiques

Exercice 1
Soit $P\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $P(z) = \Re(z)^2 - \Im(z)^2 - 2\Re(z)\Im(z) - 2\Re(z) + 3\Im(z)$. Déterminer toutes les fonctions $Q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ telles que $f = P + iQ$ soit entière, et donner l'expression de $f(z)$ en fonction de z.

Solution 1
Tout d'abord $\Delta P = 0$, donc P est harmonique. Il résulte du cours que P est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe. On peut donc trouver Q, la partie imaginaire. Les conditions de Cauchy-Riemann donnent en $z_0 = x_0 + iy_0$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial y}(z_0) = \dfrac{\partial P}{\partial x}(z_0) = 2x_0 - 2y_0 - 2 \\[2ex] \dfrac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = -\dfrac{\partial P}{\partial y}(z_0) = 2y_0 + 2x_0 - 3 \end{cases}$$

De la deuxième équation on tire que, pour $z = x + iy$, $Q(z) = 2xy + x^2 - 3x + \phi(y)$, où ϕ est différentiable sur $\mathbb{R}$, et de la première on en déduit que $\phi'(y) = -2y - 2$ de sorte que $\phi(y) = -y^2 - 2y + c$, où c est une constante réelle, d'où $Q(z) = 2xy + x^2 - 3x - y^2 - 2y + c$. Finalement nous avons

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 - 2xy - 2x + 3y + i(2xy + x^2 - 3x - y^2 - 2y) + ic \\ &= (x+iy)^2 + i(x+iy)^2 - 2(x+iy) - 3i(x+iy) + ic \\ &= (1+i)z^2 - (2+3i)z + ic\ . \end{aligned} \tag{1}$$

Exercice 2 (Applications à l'écoulement des fluides)

Notions fondamentales

On s'intéresse à l'étude d'un fluide (liquide ou gazeux, composé de particules du fluide) en mouvement et rencontrant un obstacle. Pour simplifier, les hypothèses suivantes sont réputées être satisfaites.

1. **L'écoulement fluide est à deux dimensions** (ou **bi-dimensionnel**) **:** les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. La vitesse du fluide est donc de la forme $\vec{V} = (V_x, V_y)$, où V_x (respectivement, V_y) est sa composante selon l'axe des abscisses (respectivement, ordonnées) [1]. On supposera V_x et V_y de classe C^1.
2. **L'écoulement est stationnaire :** la vitesse $\vec{V} = (V_x, V_y)$ en un point quelconque ne dépend que des coordonnées (x, y) et non du temps.
3. **Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel** (le fluide est dit **irrotationnel**) **:** il existe une fonction $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$ appelée **potentiel des vitesses** telle que

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x},\ V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

1. Autrement dit V_x (respectivement, V_y) désigne la composante de $\vec{V}$ en (x, y) selon l'axe des x (respectivement, y).

4. **Le fluide est incompréssible :**

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

ce qui exprime que la quantité de fluide, soumis à une pression extérieure, est constante.

5. **Le fluide est non visqueux :** il n'y a aucune friction sur les parois et les forces de pression qui s'y exercent sont perpendiculaires.

Énoncé de l'exercice

1. Montrer que le potentiel ϕ est harmonique, et qu'en conséquence il existe (au moins localement) une fonction $(x,y) \mapsto \psi(x,y)$, appelée **fonction de courant**, et une fonction holomorphe $z \mapsto \Omega(z) = \phi(x,y) + i\psi(x,y)$ (avec $z = x+iy$). Cette fonction est le **potentiel complexe**.
2. Calculer $\Omega'(z)$ et en déduire la **vitesse complexe** $V_x + iV_y$.
3. Étant donnée une fonction holomorphe de classe [2] C^1 $f\colon U \to \mathbb{C}$ telle que $f'(z) \neq 0$ pour chaque $z \in U$, de partie réelle P et partie imaginaire Q, soient deux familles de courbes
$$\begin{aligned} F_P &= \{\,(x,y)\colon P(x+iy) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\,\}, \\ F_Q &= \{\,(x,y)\colon Q(x+iy) = \beta,\ \beta \in \mathbb{R}\,\}. \end{aligned}$$
En mécanique des fluides ou en aérodynamique, lorsque P correspond au potentiel de vitesse ϕ, et Q à la fonction ψ de la question (1), F_P est la famille des **lignes équipotentielles** et F_Q est la famille des **lignes de courant**. Les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide.
   (a) Montrer que ces familles sont **orthogonales**, c'est-à-dire que chaque courbe de F_P coupe chaque courbe de F_Q sous un angle droit. (Pour rappel, les gradients $\vec{grad}(P)$ et $\vec{grad}(Q)$ sont normaux respectivement aux surfaces F_P et F_Q.)
   (b) Déterminer la famille G orthogonale à la famille de courbes
$$F = \{\,(x,y)\colon xy = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R}\,\}.$$
4. Considérons désormais le potentiel $\Omega(z) = V_0(z + \dfrac{a^2}{z})$ où a est une constante réelle non nulle.
   (a) Exprimer $\Omega(z)$ en coordonnées polaires et en déduire $\phi(r,\theta)$ et $\psi(r,\theta)$.
   (b) Quel est l'ensemble des points du plan complexe en lesquels la vitesse d'écoulement est nulle ? (On dit qu'il s'agit de l'ensemble des **points d'arrêts**.)
   (c) Sous l'hypothèse que seuls les points de la frontière de l'obstacle sont associés à la ligne de courant passant par les points d'arrêt, en déduire l'équation du contour de l'obstacle.
   (d) Étudier le comportement de $\vec{V}$ dans les cas suivants :
      i. $|x|$ est grand, et y quelconque.
      ii. $r^2 = a^2$ (comment évoluent les vitesses sur la frontière de l'obstacle ?).
      iii. $|y|$ grand et x quelconque.

2. Nous verrons, dans la suite du cours, qu'une fonction holomorphe est nécessairement de classe C^∞.

Solution 2

1. Irrotationalité et incompressibilité impliquent $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$ ce qui signifie que ϕ est harmonique (puisque par ailleurs nous avons supposé $\vec{V}$ de classe C^1 donc ϕ est de classe C^2). Par conséquent il existe une fonction $(x,y)\mapsto\psi(x,y)$ de classe C^2 et une fonction holomorphe Ω telles que $\Omega(z)=\phi(x,y)+i\psi(x,y)$, $z=x+iy$.

2. L'holomorphie de Ω conduit, par les conditions de Cauchy, à $\Omega'(z)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)+i\dfrac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)=\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x,y)-i\dfrac{\partial\phi}{\partial y}(x,y)=V_x(x,y)-iV_y(x,y)$, de sorte que $\overline{\Omega'(z)}=V_x(x,y)+iV_y(x,y)$.

3. (a) Les vecteurs $\vec{grad}(P)=(\dfrac{\partial P}{\partial x},\dfrac{\partial P}{\partial y})$ et $\vec{grad}(Q)=(\dfrac{\partial Q}{\partial x},\dfrac{\partial Q}{\partial y})$, sont normaux aux courbes d'équation $P=cte$ et $Q=cte$. Il suffit donc de montrer qu'ils sont orthogonaux ce qui est le cas par les conditions de Cauchy-Riemann.

   (b) Par hypothèse on a $P(x+iy)=xy$, qui est harmonique. Les conditions de Cauchy aboutissent à $\dfrac{\partial P}{\partial x}=y=\dfrac{\partial Q}{\partial y}$ de sorte que $Q(x+iy)=\frac{1}{2}y^2+g(x)$, et à $\dfrac{\partial P}{\partial y}=x=-\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ ce qui conduit à $Q(x+iy)=-\frac{1}{2}x^2+h(y)$, soit donc $Q(x+iy)=\frac{1}{2}(y^2-x^2)$.

4. (a) $\Omega(z)=\Omega(re^{i\theta})=V_0(re^{i\theta}+\dfrac{a^2}{r}e^{-i\theta})=\underbrace{V_0(r+\dfrac{a^2}{r})\cos\theta}_{\phi(r,\theta)}+i\underbrace{V_0(r-\dfrac{a^2}{r})\sin\theta}_{\psi(r,\theta)}$.

   (b) $V=\overline{\Omega'(z)}=\overline{V_0(1-\dfrac{a^2}{z^2})}=\overline{V_0(1-\dfrac{a^2}{r^2}e^{-2i\theta})}=V_0(1-\dfrac{a^2}{r^2}e^{2i\theta})=V_0(1-\dfrac{a^2}{r^2}\cos 2\theta)-i\dfrac{V_0a^2}{r^2}\sin 2\theta$. Donc $V=0$ si, et seulement si, $r=a$ et $\theta=0,\pi$, soit encore $z=\pm a$. Il n'y a donc que deux points d'arrêts.

   (c) La ligne de courant passant par les points d'arrêt est représentée par les $z=re^{i\theta}$ pour lesquels $\psi(|a|,\theta_0)=0$ ($\theta_0\in\{0,\pi\}$). Il s'agit donc de la ligne de courant $\psi(r,\theta)=V_0(r-\dfrac{a^2}{r})\sin\theta=0$, qui est donc donnée par le cercle $|z|=r$. La frontière de l'obstacle est donc le cercle de centre zéro et de rayon r.

   (d) i. $|x|$ grand correspond à r grand et θ très proche de 0 ou de π. Par conséquent V se comporte comme V_0.

      ii. Si $r^2=a^2$, alors $V_x=V_0(1-\cos 2\theta)$ et $V_y=-V_0\sin 2\theta$. À la frontière de l'obstacle, c'est-à-dire sur le cercle $|z|=r$, on a pour $\theta=0,\pi$, $V_x=V_y=0$, et pour $\theta=\pm\frac{\pi}{2}$, $V_x=2V_0$ et $V_y=0$.

      iii. $|y|$ grand correspond à r grand et θ très proche de $\pi/2$ ou $3\pi/2$. De sorte que V se comporte comme V_0.

Exercice 3 (Logarithme complexe)

1. Soit $z_0\neq 0$. Résoudre l'équation $e^z=z_0$ en fonction de $z\in\mathbb{C}$.
2. Montrer que la fonction exponentielle complexe est une surjection de $\mathbb{C}$ sur $\mathbb{C}^*$.
3. Expliquer pourquoi l'exponentielle complexe n'est pas inversible de $\mathbb{C}$ dans son image.
4. Si log désigne la détermination principale du logarithme dans le plan fendu $P=\mathbb{C}\setminus]-\infty,0]$, alors expliquer pourquoi cette fonction est injective.

5. Trouver le développement en série entière du logarithme complexe en $a \in P$.

Solution 3

1. Considérons l'équation suivante, d'inconnue z,
$$\exp(z) = z_0 \ (z_0 \in \mathbb{C})$$
Si $z_0 = 0$, nous savons qu'elle n'a pas de solution. Si $z_0 \neq 0$, alors il existe $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que
$$z_0 = r_0(\cos(\theta_0) + i\sin(\theta_0)) \ .$$
En posant comme d'habitude $z = x + iy$, l'équation précédente est ramenée à un système de deux équations à deux inconnues
$$\begin{array}{lcl} e^x & = & r_0 \\ y & \equiv & \theta_0 \pmod{2\pi} \end{array} \tag{2}$$
lequel admet une infinité de solutions deux à deux distinctes
$$\begin{array}{lcl} x & = & \ln(r_0) \\ y & = & \theta_0 + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \tag{3}$$
soit, en revenant à z,
$$z = \ln(r_0) + i(\theta_0 + 2k\pi) \ .$$
2. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On peut donc l'écrire sous forme polaire $z = re^{i\theta}$. Soit $u = \ln(r) + i\theta$. Alors d'après l'étude précédente $\exp(u) = z$.
3. L'exponentielle complexe n'est pas injective car $e^{z+2ik\pi} = e^z e^{2ik\pi} = e^z$ pour tout z complexe.
4. Cela provient du fait que $\exp(\log z) = z$ pour tout z dans le plan fendu de sorte que $\log$ est une section de $\exp$.
5. Partons de
$$\log'(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + (z-a)} = \frac{1}{a(1 - \dfrac{a-z}{a})}$$
donc pour $|z - a| < |a|$:
$$\log'(z) = \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z)^n}{a^n}$$
d'où
$$\log z = \log a - \frac{1}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a-z)^{n+1}}{(n+1)a^n} = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(z-a)^n}{na^n}.$$

Exercice 4 (Racine carrée)

1. Soit U le demi-plan $\{\, z : \Im(z) > 0 \,\}$. Montrer que U est un ouvert.
2. Montrer que $U = \{\, z : |z| > 0,\ \arg(z) \in]0, \pi[\, \}$.
3. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ définie par la relation $f(z) = \sqrt{|z|}(\cos\dfrac{\arg(z)}{2} + i\sin\dfrac{\arg(z)}{2})$. Montrer que $f(z)$ est une racine carrée de z.
4. Donner une expression de f à l'aide de la fonction exponentielle.
5. Montrer que $g(z) = \exp(\frac{1}{2}\log(z))$ est également une racine carrée de z sur le plan fendu $P = \mathbb{C} \backslash] - \infty, 0]$ tout entier, et montrer que $g = f$ sur U.

6. Calculer la dérivée de g et en déduire que $g'(z) = \dfrac{1}{2g(z)}$.
7. Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver de fonction h prolongeant g à $\mathbb{C}$ tout entier telle que $h(-1) = i$ et $h(z_1 z_2) = h(z_1)h(z_2)$ pour tous z_1, z_2.

Solution 4

1. $U = \Im^{-1}(]0, +\infty[)$ et $\Im$ est continue.
2. Donc $\Im(z) > 0$ implique notamment que $z \neq 0$. On pose donc $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$, $r > 0$. Et $\sin\theta > 0$ si, et seulement si, $\theta \in]0, \pi[$. La réciproque est évidente.
3. Soit $z \in U$. Il s'agit de montrer que $f(z)^2 = z$. Or $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2}$ donc $f(z)^2 = |z|e^{i\arg(z)} = z$.

   Autre méthode : puisque $0 < \theta/2 < \pi/2$, on a $\cos(\theta/2) = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}}$ et $\sin(\theta/2) = \sqrt{\dfrac{1-\cos\theta}{2}}$ (en effet, $\cos\theta = \cos(2\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$ et de même $\cos\theta = \cos(2\theta/2) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = 1 - 2\sin^2(\theta/2)$). Donc, $f(z) = \sqrt{|z|}(\sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} + i\sqrt{\dfrac{1-\cos(\theta)}{2}})$. D'où pour $\theta = \arg(z)$, $f(z)^2 = |z|(\dfrac{1+\cos(\theta)}{2} - \dfrac{1-\cos\theta}{2} + 2i\sqrt{\dfrac{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}{4}}) = |z|(\cos\theta + 2i\sin(\theta)/2) = z$.

   Le fait que f prolonge $x \mapsto \sqrt{x}$ est évident.
4. $f(z) = \sqrt{|z|}e^{i\arg(z)/2}$.
5. $g(z)^2 = \exp(\log(z)) = z$. Puis, $g(z) = e^{\frac{1}{2}(\ln|z| + i\arg(z))}$ donc $|g(z)| = e^{\frac{1}{2}\ln|z|} = \sqrt{|z|}$ et $\arg(g(z)) = \arg(z)/2$. Donc $g(z) = f(z)$ sur U.
6. $g'(z) = \exp(\frac{1}{2}\log(z))\dfrac{1}{2z} = \dfrac{1}{2z}g(z)$. Or $z = e^{\log(z)} = (e^{\frac{1}{2}\log z})^2 = g(z)^2$ donc $g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$. (Remarque : on aurait pu faire cela différemment. En effet de $g(z)^2 = z$, on en déduit par dérivation que $2g'(z)g(z) = 1$.)
7. Si un telle fonction h existait, alors on aurait $-1 = i^2 = ii = h(-1)h(-1) = h((-1)(-1)) = h(1) = g(1) = 1$.