

## Fonctions analytiques et exemples classiques

### Exercice 1

Soit  $P: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $P(z) = \Re(z)^2 - \Im(z)^2 - 2\Re(z)\Im(z) - 2\Re(z) + 3\Im(z)$ . Déterminer toutes les fonctions  $Q: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $f = P + iQ$  soit entière, et donner l'expression de  $f(z)$  en fonction de  $z$ .

### Exercice 2 (Applications à l'écoulement des fluides) Notions fondamentales

On s'intéresse à l'étude d'un fluide (liquide ou gazeux, composé de particules du fluide) en mouvement et rencontrant un obstacle. Pour simplifier, les hypothèses suivantes sont réputées être satisfaites.

1. **L'écoulement fluide est à deux dimensions (ou bi-dimensionnel)** : les caractéristiques de l'écoulement dans un plan sont les mêmes que dans tout plan parallèle. La vitesse du fluide est donc de la forme  $\vec{V} = (V_x, V_y)$ , où  $V_x$  (respectivement,  $V_y$ ) est sa composante selon l'axe des abscisses (respectivement, ordonnées)<sup>1</sup>. On supposera  $V_x$  et  $V_y$  de classe  $C^1$ .
2. **L'écoulement est stationnaire** : la vitesse  $\vec{V} = (V_x, V_y)$  en un point quelconque ne dépend que des coordonnées  $(x, y)$  et non du temps.
3. **Le vecteur vitesse dérive d'un potentiel** (le fluide est dit **irrotationnel**) : il existe une fonction  $(x, y) \mapsto \phi(x, y)$  appelée **potentiel des vitesses** telle que

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}.$$

4. **Le fluide est incompressible** :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0$$

ce qui exprime que la quantité de fluide, soumis à une pression extérieure, est constante.

5. **Le fluide est non visqueux** : il n'y a aucune friction sur les parois et les forces de pression qui s'y exercent sont perpendiculaires.

### Énoncé de l'exercice

1. Montrer que le potentiel  $\phi$  est harmonique, et qu'en conséquence il existe (au moins localement) une fonction  $(x, y) \mapsto \psi(x, y)$ , appelée **fonction de courant**, et une fonction holomorphe  $z \mapsto \Omega(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$  (avec  $z = x + iy$ ). Cette fonction est le **potentiel complexe**.
2. Calculer  $\Omega'(z)$  et en déduire la **vitesse complexe**  $V_x + iV_y$ .

---

1. Autrement dit  $V_x$  (respectivement,  $V_y$ ) désigne la composante de  $\vec{V}$  en  $(x, y)$  selon l'axe des  $x$  (respectivement,  $y$ ).

3. Étant donnée une fonction holomorphe de classe  $C^1$   $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  telle que  $f'(z) \neq 0$  pour chaque  $z \in U$ , de partie réelle  $P$  et partie imaginaire  $Q$ , soient deux familles de courbes

$$\begin{aligned} F_P &= \{(x, y): P(x + iy) = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}, \\ F_Q &= \{(x, y): Q(x + iy) = \beta, \beta \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

En mécanique des fluides ou en aérodynamique, lorsque  $P$  correspond au potentiel de vitesse  $\phi$ , et  $Q$  à la fonction  $\psi$  de la question (1),  $F_P$  est la famille des **lignes équipotentielles** et  $F_Q$  est la famille des **lignes de courant**. Les lignes de courant représentent les trajectoires des particules du fluide.

- (a) Montrer que ces familles sont **orthogonales**, c'est-à-dire que chaque courbe de  $F_P$  coupe chaque courbe de  $F_Q$  sous un angle droit. (Pour rappel, les gradients  $\vec{\text{grad}}(P)$  et  $\vec{\text{grad}}(Q)$  sont normaux respectivement aux surfaces  $F_P$  et  $F_Q$ .)
- (b) Déterminer la famille  $G$  orthogonale à la famille de courbes

$$F = \{(x, y): xy = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

4. Considérons désormais le potentiel  $\Omega(z) = V_0(z + \frac{a^2}{z})$  où  $a$  est une constante réelle non nulle.

- (a) Exprimer  $\Omega(z)$  en coordonnées polaires et en déduire  $\phi(r, \theta)$  et  $\psi(r, \theta)$ .
- (b) Quel est l'ensemble des points du plan complexe en lesquels la vitesse d'écoulement est nulle? (On dit qu'il s'agit de l'ensemble des **points d'arrêts**.)
- (c) Sous l'hypothèse que seuls les points de la frontière de l'obstacle sont associés à la ligne de courant passant par les points d'arrêt, en déduire l'équation du contour de l'obstacle.
- (d) Étudier le comportement de  $\vec{V}$  dans les cas suivants :
- $|x|$  est grand, et  $y$  quelconque.
  - $r^2 = a^2$  (comment évoluent les vitesses sur la frontière de l'obstacle?).
  - $|y|$  grand et  $x$  quelconque.

### Exercice 3 (Logarithme complexe)

- Soit  $z_0 \neq 0$ . Résoudre l'équation  $e^z = z_0$  en fonction de  $z \in \mathbb{C}$ .
- Montrer que la fonction exponentielle complexe est une surjection de  $\mathbb{C}$  sur  $\mathbb{C}^*$ .
- Expliquer pourquoi l'exponentielle complexe n'est pas inversible de  $\mathbb{C}$  dans son image.
- Si  $\log$  désigne la détermination principale du logarithme dans le plan fendu  $P = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$ , alors expliquer pourquoi cette fonction est injective.
- Trouver le développement en série entière du logarithme complexe en  $a \in P$ .

### Exercice 4 (Racine carrée)

- Soit  $U$  le demi-plan  $\{z: \Im(z) > 0\}$ . Montrer que  $U$  est un ouvert.
- Montrer que  $U = \{z: |z| > 0, \arg(z) \in ]0, \pi[ \}$ .
- Soit  $f: U \rightarrow \mathbb{C}$  définie par la relation  $f(z) = \sqrt{|z|}(\cos \frac{\arg(z)}{2} + i \sin \frac{\arg(z)}{2})$ . Montrer que  $f(z)$  est une racine carrée de  $z$ . Montrer que  $f$  prolonge la fonction racine carrée définie sur  $\mathbb{R}_+$ .

---

2. Nous verrons, dans la suite du cours, qu'une fonction holomorphe est nécessairement de classe  $C^\infty$ .

4. Donner une expression de  $f$  à l'aide de la fonction exponentielle.
5. Montrer que  $g(z) = \exp(\frac{1}{2} \log(z))$  est également une racine carrée de  $z$  sur le plan fendu  $P = \mathbb{C} \setminus ]-\infty, 0]$  tout entier, et montrer que  $g = f$  sur  $U$ .
6. Calculer la dérivée de  $g$  et en déduire que  $g'(z) = \frac{1}{2g(z)}$ .
7. Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver de fonction  $h$  prolongeant  $g$  à  $\mathbb{C}$  tout entier telle que  $h(-1) = i$  et  $h(z_1 z_2) = h(z_1)h(z_2)$  pour tous  $z_1, z_2$ .