

Outils Mathématiques - Chapitre I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes

Laurent Poinot

LIPN UMR CNRS 7030
Université Paris XIII & École de l'Air



Table des matières

- 1 Objectifs et plan du cours
- 2 Dérivation complexe et holomorphicité
- 3 Premières conséquences
- 4 Exemples de fonctions holomorphes
- 5 Dérivée complexe et différentielle
- 6 Fonctions harmoniques (quelques notions, étudiées en détail en td)

Objectifs

Le but de ce cours est de présenter les bases de l'analyse complexe qui seront utiles pour

- 1 l'aérodynamique et la mécanique des fluides,
- 2 la résolution d'équations différentielles (par exemple, les équations de diffusion de la chaleur),
- 3 le traitement et l'analyse du signal (décomposition fréquentielle des signaux, essentiellement pour les radars).

Plan du cours

- Chap. I : Dérivation complexe et fonctions holomorphes.
- Chap. II : Fonctions analytiques et exemples classiques.
- Chap. III : Intégrales curvilignes et primitives.
- Chap. IV : Résidus et applications.
- Chap. V : Transformée de Laplace.
- Chap. VI : Transformée de Fourier.
- Chap. VII : Transformée en Z.

Table des matières

- 1 Objectifs et plan du cours
- 2 Dérivation complexe et holomorphic**
- 3 Premières conséquences
- 4 Exemples de fonctions holomorphes
- 5 Dérivée complexe et différentielle
- 6 Fonctions harmoniques (quelques notions, étudiées en détail en td)

Topologie du plan complexe

Rappelons que le **plan complexe** \mathbb{C} , vu comme un \mathbb{R} -espace vectoriel, est **isomorphe** à \mathbb{R}^2 : une base (la “base canonique”) est donnée par $\{1, i\}$.

Une bijection est donnée par $(x, y) \mapsto x + iy$ et sa fonction réciproque $z \mapsto (\Re(z), \Im(z))$.

Par ailleurs le **module** $|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$ induit une distance

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$$

qui fait de \mathbb{C} un espace métrique.

On note pour $z_0 \in \mathbb{C}$ et $R \in [0, +\infty]$, $D(z_0; R) = \{z : |z - z_0| < R\}$ le disque ouvert centré en z_0 et de rayon R (avec $D(z_0; +\infty) = \mathbb{C}$ par convention), et $\overline{D}(z_0; R) = \{z : |z - z_0| \leq R\}$ le **disque fermé**.

En tant qu'espaces métriques, \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 (avec la distance euclidienne habituelle) sont **homéomorphes**. Dans la suite, les termes d'**ouverts**, **fermés**, **voisinages**, **adhérence**, **frontière** feront référence à la métrique de \mathbb{C} . U désigne un ouvert quelconque de \mathbb{C} .

Définition : Fonction holomorphe

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction complexe. Pour $z_0 \in U$, si

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existe, alors on note $f'(z_0)$ cette limite, que l'on appelle le **nombre dérivé** de f en z_0 .

Si $f'(z_0)$ existe pour tout $z_0 \in U$, alors la fonction f est dite **holomorphe** dans U . Et f est dite **holomorphe en z_0** s'il existe un voisinage de z_0 dans lequel f est holomorphe.

Une fonction holomorphe dans \mathbb{C} tout entier est appelée **fonction entière**.

En détail :

Dire que $f'(z_0)$ existe revient à demander que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $r > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \epsilon$$

pour tout $z \in D(z_0; r) \setminus \{z_0\} \subseteq U$.

Dans ce cas, on dit aussi que f est **dérivable (au sens complexe) en z_0** .

Définition : Dérivée

Soit $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans U .

On peut alors définir sur U une nouvelle fonction, appelée **dérivée complexe**, ou plus simplement **dérivée**, de f , et notée f' ou $\frac{df}{dz}$, laquelle, bien sûr, à tout point $z_0 \in U$ associe le nombre dérivé $f'(z_0)$ de f en ce point.

Autrement dit, $f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right)$ pour chaque $z_0 \in U$.

(Contre-)Exemple

- La fonction $f: z \mapsto z^2$ est holomorphe dans \mathbb{C} et $f'(z_0) = 2z_0$.
- La fonction $f: z \mapsto \bar{z}$ n'est nulle part dérivable.
- La fonction $f: z \mapsto |z|^2$ est dérivable en 0 mais n'est pas holomorphe en 0.

Table des matières

- 1 Objectifs et plan du cours
- 2 Dérivation complexe et holomorphicité
- 3 Premières conséquences**
- 4 Exemples de fonctions holomorphes
- 5 Dérivée complexe et différentielle
- 6 Fonctions harmoniques (quelques notions, étudiées en détail en td)

Proposition

Si $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $z_0 \in U$, alors elle est continue en z_0 .

Preuve

Dire que f est dérivable en z_0 revient à dire que pour h suffisamment proche de zéro, $f(z_0 + h) = f(z_0) + hf'(z_0) + |h|\epsilon(h)$ avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

On en déduit immédiatement que f est continue en z_0 . □

Proposition

Soient f, g deux fonctions holomorphes dans U , et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors les fonctions $f + g$, λf , fg , $\frac{f}{g}$ (à la condition que g ne s'annule en aucun point de U) et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, f^n (pour $n < 0$, il faut de surcroît supposer que f ne s'annule pas sur U) sont holomorphes dans U , et leurs dérivées sont

- $(f + g)' = f' + g'$.
- $(\lambda f)' = \lambda f'$.
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- $(f^n)' = nf^{n-1}f'$.

On retrouve par conséquent les formules usuelles du calcul des dérivées.

Proposition

Soient $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ et $g: V \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions holomorphes respectivement dans U et dans V , et telles que $f(U) \subseteq V$.

Alors $g \circ f: U \rightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe dans U , et sa dérivée est $(g \circ f)' = (g' \circ f)f'$.

Table des matières

- 1 Objectifs et plan du cours
- 2 Dérivation complexe et holomorphicité
- 3 Premières conséquences
- 4 Exemples de fonctions holomorphes**
- 5 Dérivée complexe et différentielle
- 6 Fonctions harmoniques (quelques notions, étudiées en détail en td)

Fonctions polynomiales

- Les fonctions constantes sont entières et de dérivées nulles en tout point.
- La fonction identique $z \mapsto z$ est entière et sa dérivée est la fonction constante égale à 1.
- À partir de ces fonctions, on obtient par additions et multiplications l'holomorphie dans \mathbb{C} de toutes les fonctions f qui s'écrivent sous la forme suivante

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

où n est un entier naturel et où a_0, \dots, a_n sont des nombres complexes. Une telle fonction est dite **fonction polynôme** ou **fonction polynomiale**. La dérivée de f est donnée pour tout $z \in \mathbb{C}$ par

$$f'(z) = 0, \text{ si } n = 0$$

et

$$f'(z) = \sum_{i=1}^n i a_i z^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} z^j, \text{ si } n > 0.$$

Unicité de la représentation d'une fonction polynomiale

L'ensemble des fonctions de \mathbb{C} dans lui-même est bien sûr un \mathbb{C} -espace vectoriel de façon évidente.

On constate que la fonction polynomiale f du transparent précédent est une **combinaison linéaire** de fonctions $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

L'écriture de f (comme combinaison linéaire) est alors unique à la condition que les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \in \mathbb{N}$, soient \mathbb{C} -linéairement indépendantes, i.e., si $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sont tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^n a_i z^i = 0$, alors tous les a_i sont nuls.

Or cela est vrai (preuve par récurrence sur n) :

Proposition

Soit f une fonction polynomiale non identiquement nulle. Alors il existe un unique entier $n \in \mathbb{N}$ (le **degré**) et un unique $(n+1)$ -tuple

$(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ (les **coefficients**) tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i, \text{ et } a_n \neq 0$$

Fonctions rationnelles

On appelle **fonction rationnelle** toute fonction f de la forme g/h où g et h sont deux fonctions polynomiales, h étant supposée en outre non identiquement nulle (i.e., non représentée par le polynôme nul).

La fonction f est alors définie et **holomorphe dans le complémentaire de l'ensemble des zéros de h** (lequel est un ouvert).

Sa dérivée est donc donnée par la formule

$$f' = \frac{g'h - gh'}{h^2} .$$

Il en résulte que la dérivée d'une fonction rationnelle est rationnelle.

Remarque

On a d'emblée l'ensemble de définition maximum en prenant une représentation **irréductible** pour la fonction rationnelle f , c'est-à-dire dans laquelle g et h sont premiers entre eux.

Rappelons que deux polynômes sont premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont les constantes non nulles; en particulier deux polynômes premiers entre eux ne possèdent pas de zéro commun – sinon ils auraient un diviseur commun de degré 1.

Table des matières

- 1 Objectifs et plan du cours
- 2 Dérivation complexe et holomorphicité
- 3 Premières conséquences
- 4 Exemples de fonctions holomorphes
- 5 Dérivée complexe et différentielle**
- 6 Fonctions harmoniques (quelques notions, étudiées en détail en td)

Il existe sur \mathbb{C} deux structures évidentes d'espace vectoriel :

- d'une part, en tant que corps, \mathbb{C} est un espace vectoriel sur lui-même de dimension 1 (la base canonique est alors donnée par $\{1\}$),
- d'autre part, c'est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2, avec pour base canonique $\{1, i\}$; cela permet d'identifier le \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{C} avec \mathbb{R}^2 via $z \mapsto (\Re(z), \Im(z))$ et, inversement, $(x, y) \mapsto x + iy$.

Remarque

Soit $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Dire que ϕ est linéaire n'a de sens que si on sait à quelle structure d'espace vectoriel sur \mathbb{C} on se réfère. Pour être plus précis on prendra soin d'indiquer que ϕ est **\mathbb{R} -linéaire** (respectivement, **\mathbb{C} -linéaire**) si elle est linéaire au sens de la structure vectorielle réelle (respectivement, complexe).

Applications \mathbb{R} -linéaires ou \mathbb{C} -linéaires

Soit $\phi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.

Posons $\phi(1) = a$ et $\phi(i) = b$.

Si ϕ est \mathbb{R} -linéaire, alors on a pour tout $z = x + iy$,

$$\phi(z) = ax + by .$$

C'est la forme générale des applications \mathbb{R} -linéaires de \mathbb{C} dans lui-même.

Supposons de plus que ϕ est \mathbb{C} -linéaire. On a donc en particulier $b = \phi(i) = \phi(i1) = i\phi(1) = ia$, de sorte que

$$\phi(z) = a(x + iy) = az .$$

Exemple

Les **projections canoniques** de \mathbb{C} sur \mathbb{R} , à savoir les fonctions \Re et \Im , sont des applications \mathbb{R} -linéaires.

Selon l'usage du calcul différentiel, on les note parfois respectivement dx et dy . Ainsi pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a

$$dx(z) = x = \Re(z)$$

$$dy(z) = y = \Im(z)$$

et avec ces notations, la forme générale des applications \mathbb{R} -linéaires est donc

$$adx + bdy \text{ (avec } a, b \in \mathbb{C}\text{)}$$

(Contre-)Exemple

Dans le même ordre d'idée, notons dz l'application identique de \mathbb{C} (qui est aussi l'unique projection canonique de \mathbb{C} sur lui-même vu comme un \mathbb{C} -espace vectoriel).

Avec les notations précédentes on a

$$dz = dx + idy .$$

On a $a = dz(1) = 1$ et $b = dz(i) = i$ (ce qui est rassurant puisque dz est \mathbb{C} -linéaire).

La conjugaison $z \mapsto \bar{z}$ est \mathbb{R} -linéaire. Elle s'écrit alors

$$dx - idy .$$

Il devient naturel de la noter \overline{dz} . On remarque qu'ici $a = \overline{dz}(1) = 1$ mais que $b = \overline{dz}(i) = -i$, donc \overline{dz} n'est pas \mathbb{C} -linéaire.

Dérivée partielle (rappel)

Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

La **dérivée partielle** $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ de f par rapport à x en $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ est définie comme la limite (si elle existe)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f((x_0 + h) + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{h} .$$

De même la **dérivée partielle** $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ de f par rapport à y en $z_0 = x_0 + iy_0$ est

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + i(y_0 + h)) - f(x_0 + iy_0)}{h} .$$

Remarque

Les notions précédentes de dérivées partielles pour une fonction de la variable complexe correspondent à celles connues pour les fonctions de deux variables réelles.

En effet, puisque \mathbb{C} et \mathbb{R}^2 sont isomorphes en tant qu'espaces vectoriels réels, on peut associer à $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction $\tilde{f} : V \rightarrow \mathbb{C}$, où $V = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + iy \in U \}$, définie par $\tilde{f}(x, y) = f(x + iy)$.

On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0)$ où on a posé $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$).

Différentiabilité

Définition

Soient U un ouvert de \mathbb{C} et $f: U \rightarrow \mathbb{C}$.

- On dit que f est **différentiable** en $z_0 \in U$ s'il existe deux nombres complexes a, b tels que pour tout $h \in \mathbb{C}$

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + a\Re(h) + b\Im(h) + |h|\epsilon(h)$$

avec $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$.

- De plus, $h \mapsto a\Re(h) + b\Im(h)$ est une application \mathbb{R} -linéaire de \mathbb{C} dans \mathbb{C} notée $df(z_0)$ et est appelée **différentielle** de f en z_0 .
- On dit que f est **différentiable sur U** si f est différentiable en tout point de U .

Remarques

On montre que si f est différentiable en z_0 , alors $a = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ de telle sorte que

$$df(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)dy .$$

Par ailleurs, la notion de différentiabilité pour une fonction f de la variable complexe z du transparent précédent correspond à la notion de différentiabilité de la fonction \tilde{f} de deux variables réelles qui lui est associée.

On a bien sûr $df(z_0) = d\tilde{f}(x_0, y_0)$ pour $z_0 = x_0 + iy_0$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{C}$).

Proposition

Soit f une fonction complexe définie sur un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$.

Si f est dérivable (au sens complexe) en un point $z_0 \in U$, alors f est différentiable en z_0 et sa différentielle en z_0 est \mathbb{C} -linéaire.

Preuve

On a donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right) = 0 .$$

On peut l'écrire

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h|}{|h|} = 0 .$$

Cela montre que f est différentiable en z_0 , et que la différentielle est l'application \mathbb{C} -linéaire $df : z \mapsto f'(z_0)z$. □

De la démonstration précédente, on tire l'expression suivante de la différentielle d'une fonction dérivable :

$$df(z_0) = f'(z_0)dz .$$

Cela justifie *a posteriori* la notation $\frac{df}{dz}$ parfois utilisée pour la dérivée.

Exemple

L'application $z \mapsto \bar{z}$, étant \mathbb{R} -linéaire, est identique à sa différentielle en tout point (i.e., $df(z_0)z = \bar{z}$ pour tout $z_0, z \in \mathbb{C}$).

Celle-ci n'est donc pas \mathbb{C} -linéaire. On retrouve donc (par contraposée) que la conjugaison n'est dérivable en aucun point.

Proposition

Soit f une fonction complexe définie au voisinage d'un point z_0 . On suppose f différentiable en z_0 . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1 f est dérivable (au sens complexe) en z_0 .
- 2 $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i \frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$.
- 3 La différentielle $df(z_0)$ est \mathbb{C} -linéaire.

On en déduit le corollaire suivant :

f est holomorphe dans U si, et seulement si, f est différentiable sur U et sa différentielle est \mathbb{C} -linéaire.

Exemple

Soit f la fonction définie pour $z = x + iy$ par

$$f(z) = x^2 + 2ixy - y^2 - 3x - 3iy + 4 .$$

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(z) = 2x + 2iy - 3$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(z) = i(2x + 2iy - 3)$.

f étant clairement différentiable en tout point de \mathbb{C} , f est dérivable dans \mathbb{C} et donc holomorphe dans \mathbb{C} .

Conditions de Cauchy-Riemann

Soit $f = P + iQ$ une fonction complexe définie au voisinage de z_0 , où $P(z) = \Re(f(z))$ et $Q(z) = \Im(f(z))$. Pour que f soit dérivable en z_0 il faut et il suffit que f soit différentiable en z_0 et que sa différentielle vérifie les **conditions de Cauchy-Riemann** en ce point :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{cases}$$

On a alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i \frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) - i \frac{\partial P}{\partial y}(z_0).$$

Table des matières

- 1 Objectifs et plan du cours
- 2 Dérivation complexe et holomorphicité
- 3 Premières conséquences
- 4 Exemples de fonctions holomorphes
- 5 Dérivée complexe et différentielle
- 6 Fonctions harmoniques (quelques notions, étudiées en détail en td)

Définition

Soit f une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 ou de \mathbb{C} à valeurs réelles ou complexes. On dit que f est **harmonique** sur U si f est de classe^a C^2 sur U et si :

$$\Delta f = 0 \quad \text{sur } U$$

où Δ est le Laplacien :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

^aCela signifie que f est différentiable et que ses dérivées partielles sont de classe C^1 . Or dire qu'une fonction à valeurs réelles ou complexes est de classe C^1 signifie qu'elle est différentiable et que ses dérivées partielles sont continues.

Exemple

La fonction $P: (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est harmonique sur \mathbb{R}^2 car

$$\Delta P(x, y) = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}(x, y) = 2 - 2 = 0$$

Quelle est le rapport entre fonction holomorphe et fonction harmonique ?

Théorème

- 1 Toute fonction holomorphe sur un ouvert U de \mathbb{C} est harmonique sur U .
- 2 Réciproquement, toute fonction harmonique à valeurs réelles est localement la partie réelle d'une fonction holomorphe.