Dérivation complexe et fonctions holomorphes

Exercice 1
Montrer que la conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point du plan complexe. (Indication : représenter $z - z_0$, avec $z \neq z_0$, en coordonnées polaires.)

Solution 1
Pour $z \neq z_0$, on a en utilisant la représentation polaire $z - z_0 = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$,

$$\frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0} = \frac{\overline{z - z_0}}{z - z_0} = e^{-2i\theta} \xrightarrow[r \to 0]{} e^{-2i\theta}$$

et par conséquent $\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ n'a pas de limite lorsque z tend vers z_0 dans $\mathbb{C}$ (par exemple, pour $\theta = 0$ et $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, on a deux valeurs différentes).

Exercice 2
Montrer directement par un calcul que pour tout entier naturel n, la fonction $f \colon z \mapsto z^n$ est entière, avec pour $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = nz^{n-1}$ pour $n > 0$ et $f'(z) = 1$ pour $n = 0$.

Solution 2
Pour $n = 0$, f est uniformément égale à 1, et elle est entière de dérivée nulle (facile). Pour $n = 1$, de $\dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = 1$, on en déduit que f est entière avec $f'(z_0) = 1$ pour tout z_0. Pour $n \geq 2$, de

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k \xrightarrow[z \to z_0]{} n z_0^{n-1}$$

(En effet $z^n - z_0^n = (z - z_0) \sum_{k=0}^{n-1} z^{n-1-k} z_0^k$ et $z \mapsto z^k$ est continue pour tout entier naturel k.) On en déduit que f est entière avec $f'(z_0) = nz_0^{n-1}$, $z_0 \in \mathbb{C}$.

Exercice 3
Monter par le calcul que pour tout entier naturel non nul, la fonction $f \colon z \mapsto \frac{1}{z^n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec $f'(z) = -\dfrac{n}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Solution 3
De

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{z_0^n - z^n}{z^n z_0^n (z - z_0)} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{z^{n-1-k} z_0^k}{z^n z_0^n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{z^{k+1} z_0^{n-k}} \xrightarrow[z \to z_0]{} -\frac{n}{z_0^{n+1}}$$

(par continuité des fonctions $z \mapsto \frac{1}{z^k}$ sur $\mathbb{C}^*$ pour tout entier naturel non nul k), on en déduit le résultat souhaité.

Exercice 4
Soient $f \colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $[a, b]$ un segment réel non réduit à un point et $\gamma \colon [a, b] \to U$ une application dérivable. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable sur $[a, b]$ avec $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

Solution 4
Pour tout $t \neq t_0$ dans $[a,b]$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{(f\circ\gamma)(t)-(f\circ\gamma)(t_0)}{t-t_0} &= \frac{f(\gamma(t))-f(\gamma(t_0))}{t-t_0} \\
&= \frac{f'(\gamma(t_0))(\gamma(t)-\gamma(t_0))+|\gamma(t)-\gamma(t_0)|\epsilon(\gamma(t)-\gamma(t_0))}{t-t_0} \\
&= f'(\gamma(t_0))\frac{\gamma(t)-\gamma(t_0)}{t-t_0}+\frac{|\gamma(t)-\gamma(t_0)|\epsilon(\gamma(t)-\gamma(t_0))}{t-t_0}
\end{aligned} \tag{1}$$

avec $\lim_{h\to 0}\epsilon(h)=0$. Par passage à la limite pour $t\to t_0$ on obtient le résultat désiré (notons que γ étant dérivable, elle est continue et donc $\lim_{t\to t_0}\gamma(t)=\gamma(t_0)$).

Exercice 5
En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que les fonctions suivantes ne sont pas entières.

1. $f_1(z)=\overline{z}\,$;
2. $f_2(z)=\Re(z)\,$;
3. $f_3(z)=\Im(z)\,$;
4. $f_4(z)=|z|^2\,$;
5. $f_5(z)=|z|$.

Solution 5

1. On a $f_1=P_1+iQ_1$ avec $P_1(z)=x$ et $Q_1(z)=-y$, ainsi que $\dfrac{\partial P_1}{\partial x}(z_0)=1\neq\dfrac{\partial Q_1}{\partial y}(z_0)=-1$.
2. On a $P_2(z)=x$, $Q_2(z)=0$.
3. $P_3(z)=0$ et $Q_3(z)=y$.
4. $P_4(z)=x^2+y^2$ et $Q_4(z)=0$.
5. $P_5(z)=\sqrt{x^2+y^2}$ et $Q_5(z)=0$.

Exercice 6
La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z)=\Re(z)^2\Im(z)+i\Im(z)$ est-elle holomorphe ?

Solution 6
Posons $z=x+iy$ de sorte que $f(z)=x^2y+iy$. On a $f=P+iQ$ avec $P(z)=x^2y$ et $Q(z)=y$. Comme $\dfrac{\partial P}{\partial x}(z)=2xy\neq\dfrac{\partial Q}{\partial y}(z)=1$ pour tout z dans $\mathbb{C}\setminus H$ où $H=\{\,z\colon 2\Re(z)\Im(z)=1\,\}$ et que par ailleurs pour tout $z\in H$, on a $\dfrac{\partial P}{\partial y}(z)=x^2\neq-\dfrac{\partial Q}{\partial x}(z)=0$, la fonction f n'est pas holomorphe.

Exercice 7
Connaissant les fonctions de la variable réelle $\exp,\sin$ et $\cos$, on peut définir la fonction $x\mapsto e^{ix}=\cos(x)+i\sin(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et la fonction exponentielle complexe $\exp(x+iy)=e^xe^{iy}$ sur $\mathbb{C}$. Montrer que cette fonction est entière avec $\exp'=\exp$.

Solution 7
On a $\exp(x+iy) = P(x+iy)+iQ(x+iy)$ avec $P(x+iy) = e^x \cos(y)$ et $Q(x+iy) = e^x \sin(y)$. Les fonctions P et Q sont différentiables sur $\mathbb{C}$ et on a

$$\left\{ \begin{array}{lclcl} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x_0+iy_0) & = & e^{x_0}\cos(y_0) & = & \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x_0+iy_0) \\[2ex] \dfrac{\partial P}{\partial y}(x_0+iy_0) & = & -e^{x_0}\sin(y_0) & = & -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x_0+iy_0) \end{array} \right.$$

Il en résulte donc (par les conditions de Cauchy-Riemann) que exp est entière. Pour tout complexe $z_0 = x_0 + iy_0$, on a

$$\exp'(z_0) = \frac{\partial \exp}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial P}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0) = e^{x_0}\cos(y_0) + ie^{x_0}\sin(y_0) = \exp(z_0)\ .$$

Exercice 8
Démontrer que les fonctions puissances $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment une famille $\mathbb{C}$-linéairement indépendante du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes.

Solution 8
$\{\, z \mapsto z^n \colon n \in \mathbb{N} \,\}$ est une famille linéaire indépendante sur $\mathbb{C}$ si, et seulement si, $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sont tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\sum_{i=0}^{n} a_i z^i = 0$, alors tous les a_i sont nuls.

Démontrons cela par récurrence sur l'entier n. Pour $n = 0$, c'est à l'évidence vrai. Supposons la propriété vraie pour $n-1$. Pour simplifier posons pour $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, par hypothèse, on a $0 = P(2z) - 2^n P(z) = \sum_{i=0}^{n-1}(2^i - 2^n)a_i z^i$. Par hypothèse de récurrence on en déduit que $(2^i - 2^n)a_i = 0$ pour tout $i \leq n-1$, et donc que $a_i = 0$ pour tout $i \leq n-1$. Il vient donc $a_n z^n = P(z) = 0$, d'où $a_n = 0$ (en prenant $z \neq 0$).