Dérivation complexe et fonctions holomorphes

Exercice 1
Montrer que la conjugaison complexe $z \mapsto \overline{z}$ n'est dérivable en aucun point du plan complexe. (Indication : représenter $z - z_0$, avec $z \neq z_0$, en coordonnées polaires.)

Exercice 2
Montrer directement par un calcul que pour tout entier naturel n, la fonction $f\colon z \mapsto z^n$ est entière, avec pour $z \in \mathbb{C}$, $f'(z) = nz^{n-1}$ pour $n > 0$ et $f'(z) = 1$ pour $n = 0$.

Exercice 3
Monter par le calcul que pour tout entier naturel non nul, la fonction $f\colon z \mapsto \frac{1}{z^n}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ avec $f'(z) = -\dfrac{n}{z^{n+1}}$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$.

Exercice 4
Soient $f\colon U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $[a, b]$ un segment réel non réduit à un point et $\gamma\colon [a, b] \to U$ une application dérivable. Montrer que la fonction $f \circ \gamma$ est dérivable sur $[a, b]$ avec $(f \circ \gamma)'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$.

Exercice 5
En utilisant les conditions de Cauchy-Riemann, montrer que les fonctions suivantes ne sont pas entières.

1. $f_1(z) = \overline{z}$;
2. $f_2(z) = \Re(z)$;
3. $f_3(z) = \Im(z)$;
4. $f_4(z) = |z|^2$;
5. $f_5(z) = |z|$.

Exercice 6
La fonction f définie sur $\mathbb{C}$ par $f(z) = \Re(z)^2\Im(z) + i\Im(z)$ est-elle holomorphe ?

Exercice 7
Connaissant les fonctions de la variable réelle $\exp, \sin$ et $\cos$, on peut définir la fonction $x \mapsto e^{ix} = \cos(x)+i\sin(x)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, et la fonction exponentielle complexe $\exp(x+iy) = e^x e^{iy}$ sur $\mathbb{C}$. Montrer que cette fonction est entière avec $\exp' = \exp$.

Exercice 8
Démontrer que les fonctions puissances $z \mapsto z^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ forment une famille $\mathbb{C}$-linéairement indépendante du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$ des fonctions d'une variable complexe à valeurs complexes.