Паркеты и замощения
Лекция — 1

Хайдар Нурлигареев

Зимняя школа
Комбинаторная Математика и Теория Алгоритмы

13-20 февраля 2016

Понятие замощения

Замощением плоскости называется такое счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* замощения $\mathcal{T}$.

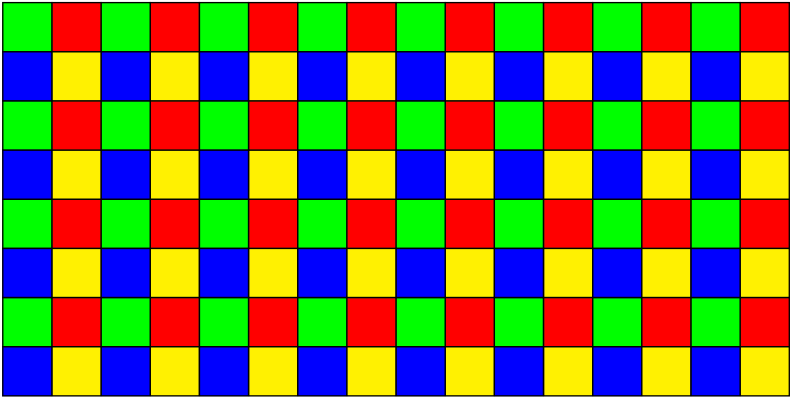
Понятие замощения

Замощением плоскости называется такое счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* замощения $\mathcal{T}$.

Будем называть замощения $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ *равными*, если одно из них переводится в другое преобразованием подобия.

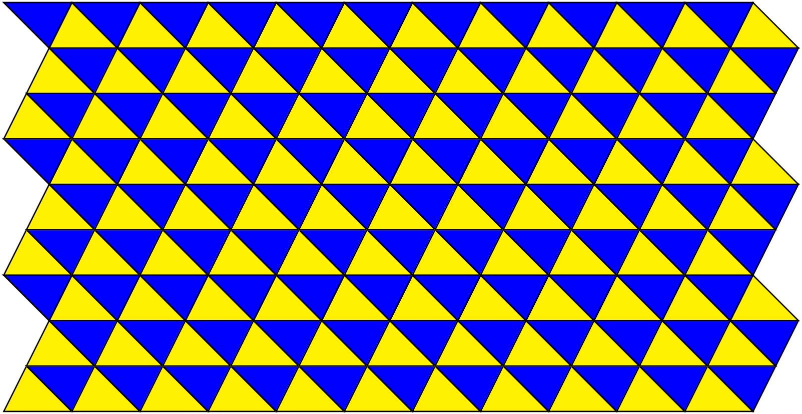
Первые примеры

Замощение плоскости копиями квадрата.



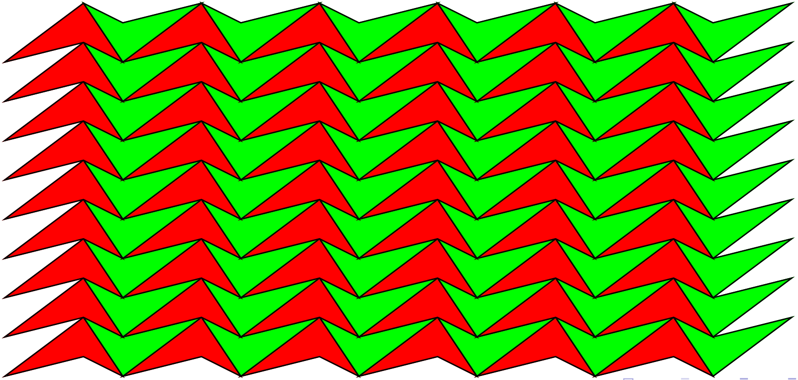
Первые примеры

Замощение плоскости копиями произвольного треугольника.



Первые примеры

Замощение плоскости копиями произвольного четырёугольника.



Рёбра и вершины замощений

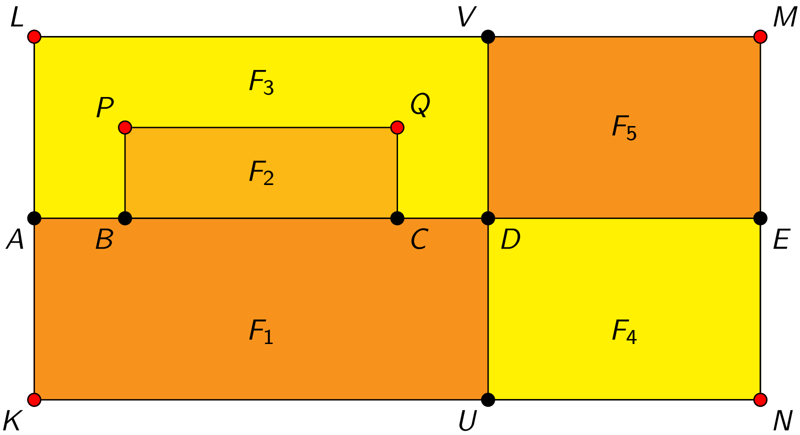
Пересечение любых двух плиток замощения, если они вообще пересекаются, состоит из набора отдельных точек и ломаных. Каждая такая ломаная называется *ребром* замощения, а концы ломаных и отдельные точки — *вершинами* замощения.

Рёбра и вершины замощений

Пересечение любых двух плиток замощения, если они вообще пересекаются, состоит из набора отдельных точек и ломаных. Каждая такая ломаная называется *ребром* замощения, а концы ломаных и отдельные точки — *вершинами* замощения.

Важно отличать рёбра и вершины замощения от сторон и углов многоугольников, являющихся плитками.

Один скромный пример



Понятие моноэдрального замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *моноэдральным*, если каждая входящая в его состав плитка является копией данного многоугольника T. Этот многоугольник называется *протоплиткой* замощения $\mathcal{T}$.

Понятие моноэдрального замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *моноэдральным*, если каждая входящая в его состав плитка является копией данного многоугольника T. Этот многоугольник называется *протоплиткой* замощения $\mathcal{T}$.

Протоплитками некоторых замощений являются:

- Произвольный треугольник.
- Произвольный четырёхугольник.

Понятие моноэдрального замощения

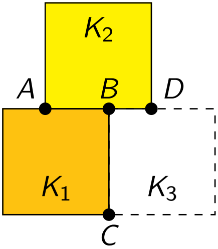
Замощение $\mathcal{T}$ называется *моноэдральным*, если каждая входящая в его состав плитка является копией данного многоугольника T. Этот многоугольник называется *протоплиткой* замощения $\mathcal{T}$.

Протоплитками некоторых замощений являются:

- Произвольный треугольник.
- Произвольный четырёхугольник.
- Пятиугольник, две стороны которого параллельны.
- Шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны.

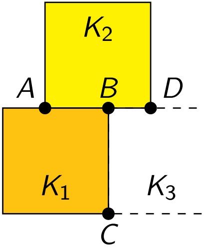
Моноэдральные замощения из квадратов

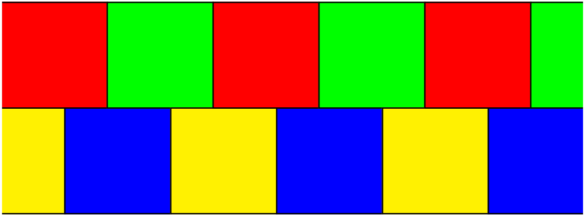
Моноэдральное замощение, в котором имеется ребро, не совпадающее со стороной квадрата.



Моноэдральные замощения из квадратов

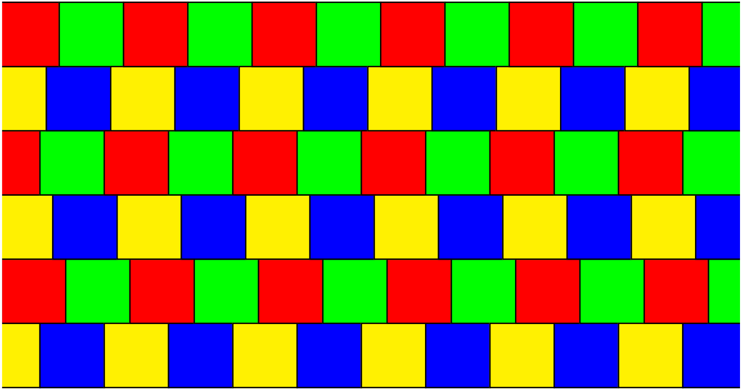
Моноэдральное замощение, в котором имеется ребро, не совпадающее со стороной квадрата.





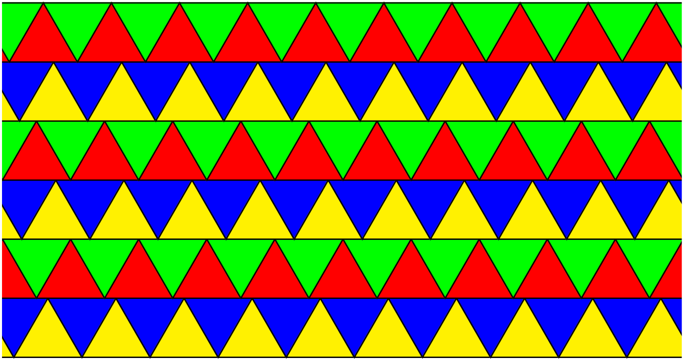
Моноэдральные замощения из квадратов

Общий вид моноэдрального замощения из квадратов.



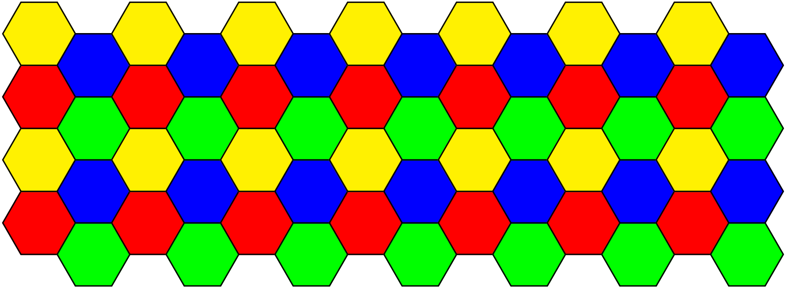
Моноэдральные замощения из треугольников

Общий вид моноэдрального замощения из правильных треугольников.



Моноэдральные замощения из шестиугольников

Единственное моноэдральное замощение правильными шестиугольниками.



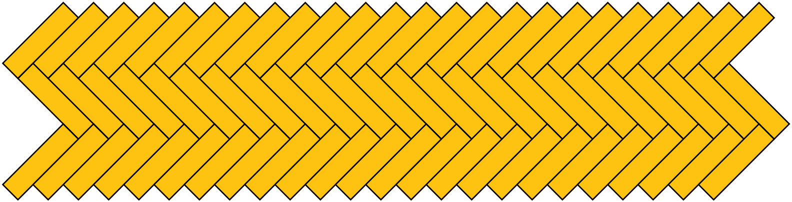
Понятие паркета

Замощение $\mathcal{T}$ называется *паркетом*, если любые две его пересекающиеся плитки пересекаются либо по углу, либо по стороне.

Понятие паркета

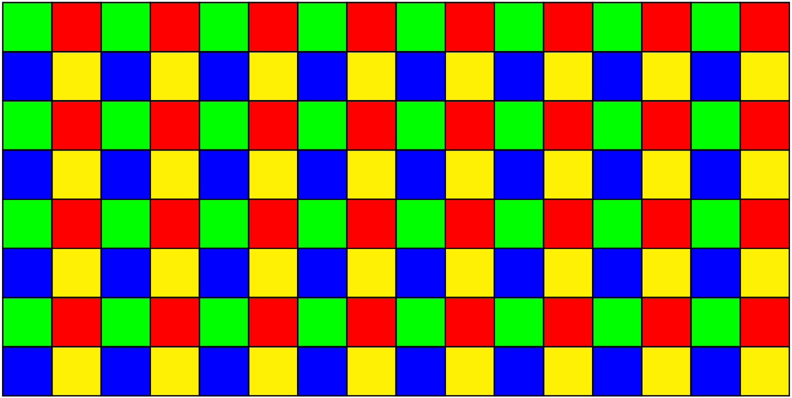
Замощение $\mathcal{T}$ называется *паркетом*, если любые две его пересекающиеся плитки пересекаются либо по углу, либо по стороне.

Математическое определение противоречит нашим бытовым представлениям о паркетах.



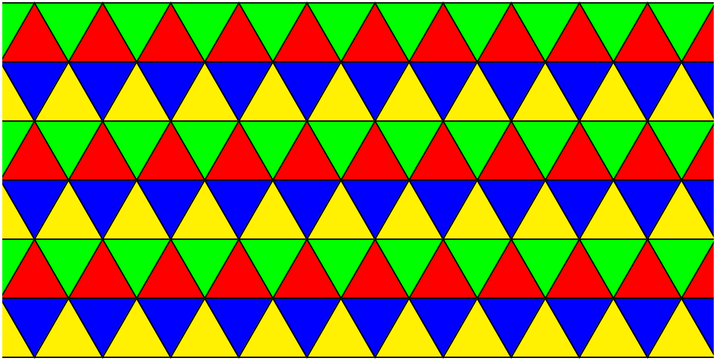
Примеры моноэдральных паркетов

Моноэдральный паркет из квадратов.



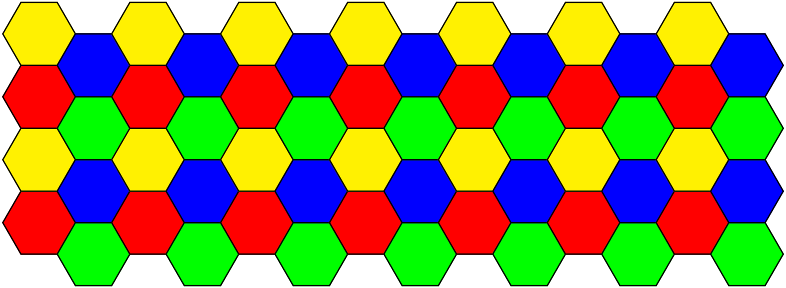
Примеры моноэдральных паркетов

Моноэдральный паркет из правильных треугольников.



Примеры моноэдральных паркетов

Моноэдральный паркет из правильных шестиугольников.



Моноэдральные паркеты

Пусть в каждой вершине моноэдрального паркета сходится k одинаковых правильных n-угольников. Тогда

$$k \cdot \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

Моноэдральные паркеты

Пусть в каждой вершине моноэдрального паркета сходится k одинаковых правильных n-угольников. Тогда

$$k \cdot \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

После несложных преобразований получаем

$$\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1.$$

Моноэдральные паркеты

Пусть в каждой вершине моноэдрального паркета сходится k одинаковых правильных n-угольников. Тогда

$$k \cdot \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

После несложных преобразований получаем

$$\frac{2}{k} + \frac{2}{n} = 1.$$

Три решения в натуральных числах: $(3;6)$, $(4;4)$ и $(6;3)$.

Понятия вида и типа вершины

Пусть плитки, составляющие паркет, являются различными правильными многоугольниками. Каждая вершина такого паркета характеризуется набором примыкающих к ней плиток, который называется *видом* вершины. Зачастую играет роль не только набор плиток, но и порядок, в котором они встречаются при обходе вершины. Этот порядок можно записать в виде последовательности чисел, отвечающих количеству сторон соответствующих плиток, которая называется *типом* данной вершины. Например, в паркете, составленном из правильных шестиугольников, каждая вершина имеет тип 6,6,6, что сокращённо записывается как 6^3.

Классификация типов вершин

Пусть *степень* вершины V (то есть количество плиток, сходящихся в вершине V) равно d. Тогда $3 \leqslant d \leqslant 6$.

Классификация типов вершин

Пусть *степень* вершины V (то есть количество плиток, сходящихся в вершине V) равно d. Тогда $3 \leqslant d \leqslant 6$.

Если $d = 6$, то все плитки паркета являются правильными треугольниками.

Классификация типов вершин

Пусть *степень* вершины V (то есть количество плиток, сходящихся в вершине V) равно d. Тогда $3 \leqslant d \leqslant 6$.

Если $d = 6$, то все плитки паркета являются правильными треугольниками.

Если $d = 4$, то к вершине V примыкают многоугольники, количество вершин которых равно k, l, m и n соответственно.

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(l-2)\pi}{l} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

Классификация типов вершин

Пусть *степень* вершины V (то есть количество плиток, сходящихся в вершине V) равно d. Тогда $3 \leqslant d \leqslant 6$.

Если $d = 6$, то все плитки паркета являются правильными треугольниками.

Если $d = 4$, то к вершине V примыкают многоугольники, количество вершин которых равно k, l, m и n соответственно.

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(l-2)\pi}{l} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi.$$

После преобразований получаем

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1.$$

Классификация типов вершин

Считая, что $3 \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant n$, имеем либо $k = 3$, либо $k = 4$.

Если $k = 4$, то решение единственно: $k = l = m = n = 4$.

Классификация типов вершин

Считая, что $3 \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant n$, имеем либо $k = 3$, либо $k = 4$.

Если $k = 4$, то решение единственно: $k = l = m = n = 4$.

Если $k = 3$, получаем такое уравнение

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}.$$

Здесь снова есть две возможности: $l = 3$ и $l = 4$.

Классификация типов вершин

Считая, что $3 \leqslant k \leqslant l \leqslant m \leqslant n$, имеем либо $k = 3$, либо $k = 4$.

Если $k = 4$, то решение единственно: $k = l = m = n = 4$.

Если $k = 3$, получаем такое уравнение

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}.$$

Здесь снова есть две возможности: $l = 3$ и $l = 4$.

Множество всех решений таково:
$(k, l, m, n) \in \{(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6)\}$.

Классификация типов вершин

Всего имеется 21 тип вершин.

Тип	3^6	$3^4,6$	$3^3,4^2$	$3^2,4,3,4$	$3^2,4,12$	$3,4,3,12$	$3^2,6^2$
	a	a	a	a	b	b	b

Тип	$3,6,3,6$	$3,4^2,6$	$3,4,6,4$	$3,7,42$	$3,8,24$	$3,9,18$
	a	b	a	c	c	c

Тип	$3,10,15$	$3,12^2$	4^4	$4,5,20$	$4,6,12$	$4,8^2$	$5^2,10$	6^3
	c	a	a	c	a	a	c	a

Классификация типов вершин

Буквой «a» отмечены те типы вершин, для которых существуют паркеты из правильных многоугольников, все вершины которых имеют именно этот тип. Такие паркеты называются *Архимедовыми*.

Классификация типов вершин

Буквой «a» отмечены те типы вершин, для которых существуют паркеты из правильных многоугольников, все вершины которых имеют именно этот тип. Такие паркеты называются *Архимедовыми*.

Буквой «b» отмечены те типы вершин, которые не порождают Архимедового паркета, но, тем не менее, встречаются в паркетах из правильных многоугольников.

Классификация типов вершин

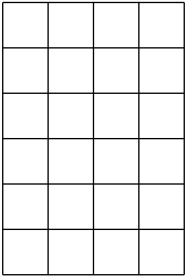
Буквой «a» отмечены те типы вершин, для которых существуют паркеты из правильных многоугольников, все вершины которых имеют именно этот тип. Такие паркеты называются *Архимедовыми*.

Буквой «b» отмечены те типы вершин, которые не порождают Архимедового паркета, но, тем не менее, встречаются в паркетах из правильных многоугольников.

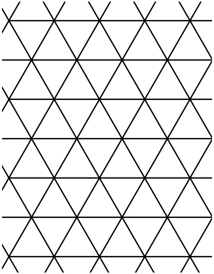
Буквой «c» отмечены те типы вершин, которые не встречаются ни в одном паркете из правильных многоугольников.

Архимедовы паркеты

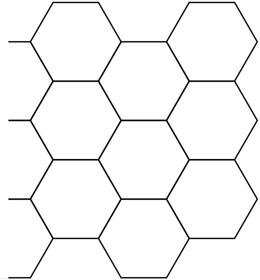
- Паркеты, составленные из плиток одного вида (*Платоновы паркеты*).



4^4



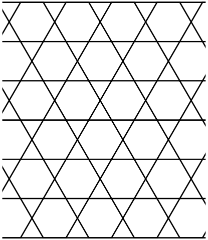
3^6



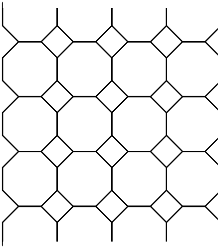
6^3

Архимедовы паркеты

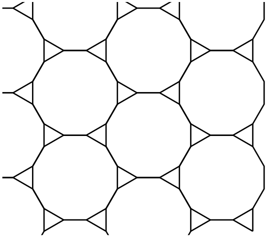
- Паркеты, составленные из плиток двух видов.



$3, 6, 3, 6$



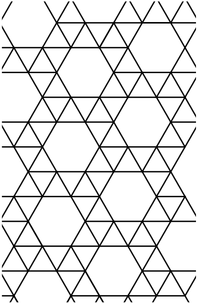
$4, 8^2$



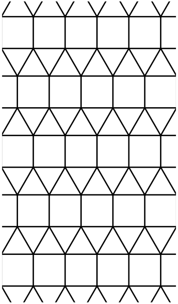
$3, 12^2$

Архимедовы паркеты

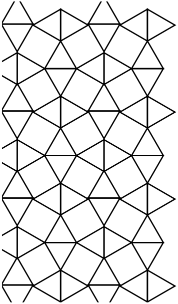
- Паркеты, составленные из плиток двух видов.



$3^4, 6$



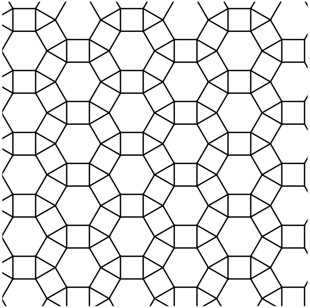
$3^3, 4^2$



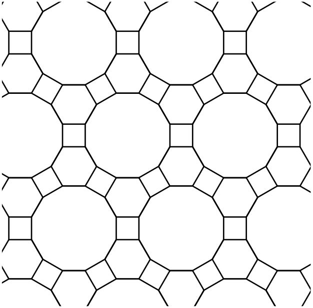
$3^2, 4, 3, 4$

Архимедовы паркеты

- Паркеты, составленные из плиток трёх видов.



3, 4, 6, 4



4, 6, 12

k-Архимедовы паркеты

Паркет называется *k-Архимедовыми*, если его вершины принадлежат в точности к k различным типам.

k-Архимедовы паркеты

Паркет называется *k-Архимедовыми*, если его вершины принадлежат в точности к k различным типам.

1-Архимедовы паркеты — это Архимедовы паркеты.

k-Архимедовы паркеты

Паркет называется *k-Архимедовыми*, если его вершины принадлежат в точности к k различным типам.

1-Архимедовы паркеты — это Архимедовы паркеты.

При $k > 1$ вершина типа $4, 8^2$ не встречается ни в одном k-Архимедовом паркете.

k-Архимедовы паркеты

Паркет называется *k-Архимедовыми*, если его вершины принадлежат в точности к k различным типам.

1-Архимедовы паркеты — это Архимедовы паркеты.

При $k > 1$ вершина типа $4, 8^2$ не встречается ни в одном k-Архимедовом паркете.

Встречаются пары типов вершин, которые порождают бесконечно много 2-Архимедовых паркетов. Например, пара $3^3, 4^2$ и $3^2, 4, 3, 4$, или $3^2, 6^2$ и $3, 6, 3, 6$, или $3, 4^2, 6$ и $3, 4, 6, 4$.

Литература I

Штейнгауз Г.
Математический калейдоскоп.
Москва, Наука, 1981.

Grünbaum Branco, Shephard G.C.
Tilings and Patterns.
New-York: W.H. Freeman and Company, 1986.

Колмогоров А.Н.
Паркеты из правильных многоугольников
Квант, 1986, N8, стр. 3-7.

Литература II

- Михайлов О.
  Одиннадцать правильных паркетов.
  Квант, 1979, N2, стр. 9-14.
- Современная Иллюстрированная Энциклопедия.
  Математика. Информатика, Москва, РОСМЭН, 2007.
- Энциклопедия для детей.
  Т.11, *Математика*, Москва, Аванта+, 1999.