Задачи к курсу — 1

Определение 1.1. *Замощением плоскости* называется такое счётное множество многоугольников $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* замощения $\mathcal{T}$.

Определение 1.2. Замощение называется *моноэдральным*, если оно составлено из копий одной и той же плитки. В таком случае эта плитка называется *протоплиткой*.

Упражнение 1.1. Постройте моноэдральное замощение, протоплиткой которого является
а) (1 балл) пятиугольник, две стороны которого параллельны;
б) (1 балл) шестиугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны и равны.

Упражнение 1.2. (3 балла) Для каждого натурального числа $n > 4$ приведите пример моноэдрального замощения, протоплиткой которого являлся бы некоторый n-угольник.

Упражнение 1.3. (2 балла) Приведите пример многоугольника, который не является протоплиткой ни одного моноэдрального замощения.

Упражнение 1.4. (1 балл) Докажите, что любое моноэдральное замощение плоскости правильными треугольниками представляет собой набор полос, сдвинутых друг относительно друга на различные расстояния.

Упражнение 1.5. (1 балл) Докажите, что существует ровно одно моноэдральное замощение плоскости правильными шестиугольниками.

Упражнение 1.6. (1 балл) Докажите, что если $n = 5$ или $n > 6$, то правильный n-угольник не является протоплиткой ни для какого моноэдрального замощения.

Определение 1.3. Замощение $\mathcal{T}$ называется *паркетом*, если любые две его пересекающиеся плитки пересекаются либо по вершине, либо по стороне.

Классификация паркетов из правильных многоугольников начинается с классификации возможных типов вершин. Под *типом вершины* подразумевается порядок, в котором встречаются плитки при обходе вершины; его можно записать в виде последовательности чисел, отвечающих количеству сторон обходимых плиток. Например, тип каждой вершины в квадратном паркете (клетчатой бумаге) есть (4,4,4,4) или сокращённо (4^4). Все возможные типы вершин указаны в таблице ниже.

Тип	3^6	$3^4, 6$	$3^3, 4^2$	$3^2, 4, 3, 4$	$3^2, 4, 12$	$3, 4, 3, 12$	$3^2, 6^2$	$3, 6, 3, 6$	$3, 4^2, 6$	$3, 4, 6, 4$
	a	a	a	a	b	b	b	a	b	a

Тип	$3, 7, 42$	$3, 8, 24$	$3, 9, 18$	$3, 10, 15$	$3, 12^2$	4^4	$4, 5, 20$	$4, 6, 12$	$4, 8^2$	$5^2, 10$	6^3
	c	c	c	c	a	a	c	a	a	c	a

Упражнение 1.7. а) (1 балл) Докажите, что типы вершин степени 5 исчерпываются вариантами $3^4, 6$; $3^3, 4^2$ и $3^2, 4, 3, 4$. **б) (2 балла)** Докажите, что типы вершин степени 3 исчерпываются вариантами $3, 7, 42$; $3, 8, 24$; $3, 9, 18$; $3, 10, 15$; $3, 12^2$; $4, 5, 20$; $4, 6, 12$; $4, 8^2$; $5^2, 10$ и 6^3.

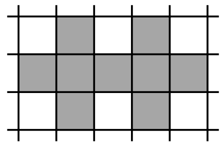
Упражнение 1.8. (2 балла) Докажите, что если паркет из правильных многоугольников содержит восьмиугольник, то все его вершины имеют тип $(4, 8^2)$.

Упражнение 1.9. а) (2 балла) Проверьте, что лишь для типов вершин, отмеченных в таблице буквой «a», существуют паркеты из правильных многоугольников, все вершины которых имеют именно этот тип (такие замощения называются *Архимедовыми*).
б) (1 балл) Для каждого типа вершины, отмеченного буквой «b», приведите пример какого-нибудь паркета из правильных многоугольников, содержащего вершины указанного типа.
в) (2 балла) Докажите, что ни один паркет из правильных многоугольников не может иметь вершину, тип которой отмечен в таблице буквой «c».

Определение 1.4. Пусть U — какой-нибудь многоугольник, составленный из некоторых плиток паркета (4^4) (то есть из нескольких ячеек клетчатой бумаги). В том случае, если фигура U состоит из n плиток, то она называется *n-мино.*

Задача 1.1. (3 балла) Для каждого из пяти 4-мино (тетрамино, то есть фигурки из игры «Тетрис») приведите пример моноэдрального замощения, протоплиткой которого является данное тетрамино.

Задача 1.2. (12+3 баллов) Найдите 12 фигурок 5-мино (пентамино) и определите, какие из них являются протоплитками единственного моноэдрального замощения. Для остальных пентамино приведите примеры как минимум трёх различных моноэдральных замощений.



Задача 1.3. (9 баллов) Докажите, что существует бесконечно много моноэдральных замощений, протоплитка которых изображена на рисунке справа.

Задача 1.4. (12 баллов) Приведите пример какого-либо 7-мино, которое не является протоплиткой ни одного моноэдрального замощения.

Задача 1.5. (7 баллов) Приведите пример паркета из правильных многоугольников, который содержит 12-угольники и квадраты, но не содержит шестиугольники.

Задача 1.6. (15 баллов) Докажите, что невыпуклый пятиугольник, имеющий два соседних угла, больших π, не может быть протоплиткой ни одного моноэдрального замощения.

Определение 1.5. Плитка называется *мономорфной* (*диморфной*, *n-морфной*), если она является протоплиткой ровно одного моноэдрального замощения (двух, n различных замощений соответственно).

Задача 1.7. Приведите пример **а) (5 баллов)** мономорфной плитки; **б) (15 баллов)** диморфной плитки; **в) (20 баллов)** триморфной плитки.

Задача 1.8. а) (7 баллов) Докажите, что не существует паркета из правильных многоугольников, который содержал бы 15 различных типов вершин.
б) (15 баллов) Существует ли периодический паркет из правильных многоугольников, который содержал бы 14 различных типов вершин?

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 60 баллов (но не обязательно только из этого листочка — после следующей лекции будет ещё один). Баллы являются динамическими и имеют свойство со временем уменьшаться. Баллы за упражнения зачисляются только в течение двух дней и обнуляются после следующей лекции. Баллы за задачи уменьшаются постепенно — в первый день зачисляется полная стоимость задачи, а в последующие работает правило, описанное в нижеследующей таблице.

День сдачи	14 февраля	15 февраля	16 февраля	17 февраля	18 февраля	19 февраля
Стоимость 3	3	3	2	2	1	1
Стоимость 5	5	5	4	4	3	3
Стоимость 7	7	6	6	5	5	4
Стоимость 9	9	8	8	7	7	6
Стоимость 12	12	11	10	9	8	7
Стоимость 15	15	14	13	12	11	10
Стоимость 20	20	19	18	17	16	15

При этом баллы за задачу 1.2 зачисляются как за задачу стоимостью 3 балла, плюс за каждую исследованную фигуру пентамино гарантированно начисляется по одному баллу.