Задачи к лекции 3. Графы

Упражнение 3.1. Докажите, что если у дерева не меньше двух вершин, то среди них есть
а) вершина степени 1 (такие вершины называются *висячими*);
б) две вершины степени 1.

Упражнение 3.2. Сколько рёбер у дерева с n вершинами?

Упражнение 3.3. В стране из каждого города выходит 100 дорог, и из любого города можно попасть в любой. Одну из дорог закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно проехать в любой другой.

Упражнение 3.4. Нарисуйте плоский граф, у которого
а) 6 вершин, степень каждой из которых равна 3;
а) 6 вершин, степень каждой из которых равна 4;
а) 8 вершин, степень каждой из которых равна 4.

Упражнение 3.5. Пусть плоский граф имеет V вершин, E рёбер, F граней и k компонент связности. Докажите, что тогда справедливо равенство $V - E + F = 1 + k$.

Задача 3.1. (1 балл) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с 3 другими?

Задача 3.2. (1 балл) Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника размером 50×600 клеток. Какое наибольшее число верёвочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

Задача 3.3. (1 балл) На чаепитие собрались 25 школьников. Каждый принёс по 2 пирожных. Все пирожные разложили на 25 тарелок (по 2 на тарелку). Докажите, что как бы ни были размещены пирожные, можно так раздать тарелки школьникам, что каждому достанется хотя бы одно пирожное, которое он сам принес.

Задача 3.4. (1 балл) В стране 15 городов, каждый соединён дорогами не менее, чем с семью другими. Докажите, что из любого города можно проехать в любой другой напрямую или через один промежуточный город.

Задача 3.5. (2 балла) У Пети 28 одноклассников, причём все они имеют разное число друзей в классе. Сколько из них дружит с Петей?

Задача 3.6. (2 балла) Каждый из 450 депутатов дал пощёчину ровно одному своему коллеге. Докажите, что из них можно выбрать 150 человек, среди которых никто никому не давал пощёчины.

Задача 3.7. (3 балла) Каких графов на n данных вершинах больше: связных или несвязных? Дайте ответ для всех n.

Задача 3.8. (1 балл) Докажите, что в плоском графе существует вершина, степень которой не превосходит 5.

Задача 3.9. (1 балл) Докажите формулу Эйлера для произвольного выпуклого многогранника.

Задача 3.10. а) **(1 балл)** Дан выпуклый многогранник, грани которого являются n-угольниками, и в каждой вершине сходится k граней. Докажите, что $1/n + 1/k = 1/2 + 1/r$, где r — число рёбер многогранника.

б) **(1 балл)** Выпуклый многогранник называют правильным, если все его грани — правильные n-угольники, и в каждой его вершине сходится k граней. Докажите, что любой такой многогранник — либо тетраэдр, либо куб, либо октаэдр, либо додекаэдр, либо икосаэдр.

Задача 3.11. (2 балла) Докажите, что связный плоский граф является эйлеровым если и только если его грани можно раскрасить в два цвета так, чтобы любое ребро принадлежало границам двух граней разного цвета.

Задача 3.12. Пусть T — некоторое множество транспозиций из S_n. Отметим на плоскости n точек $A_1, \ldots, A_n$ и проведём рёбра согласно такому правилу: A_i и A_j соединяются ребром, если в T есть транспозиция (i, j).
а) **(1 балл)** Докажите, что полученный граф является связным если и только если любая перестановка из S_n есть произведение транспозиций из T.
б) **(2 балла)** Докажите, что если полученный граф является деревом, то произведение всех транспозиций из T (в любом порядке) — цикл длины n.

Задача 3.13. (3 балла) Гриша забыл трёхзначный код своего замка́. Замо́к открывается, если три цифры кода набраны подряд (даже если ранее были набраны другие цифры). Докажите, что Гриша сможет открыть замок не более чем за 1002 секунды, набирая по одной цифре в секунду.

Задача 3.14. (4 балла) Докажите, что среди любых 50 человек найдётся двое, у которых чётное число общих знакомых (быть может, 0) среди остальных 48 человек.

Примечание. Для зачёта необходимо набрать 12 баллов.