Ликбез – 4. Предел последовательности.

На этой лекции мы познакомимся с центральным понятием математического анализа — пределом последовательности — и некоторыми его основными свойствами. Начнём, собственно, с ключевого понятия — понятия последовательности.

Определение 1. *Последовательностью* называется любое отображение $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Значения $x(1), x(2), \ldots, x(n), \ldots$ называются *членами* или *элементами* последовательности и обозначаются $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$. Сама последовательность обозначается (x_n).

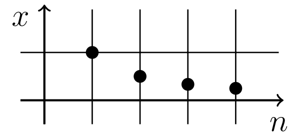

Рис. 1.

Вообще говоря, мы определили здесь последовательности действительных чисел. Можно рассматривать также и последовательности элементов произвольного множества M, определяя их как отображения $x\colon \mathbb{N} \to M$.

Последовательности удобно рассматривать на графиках. Например, начальный кусок последовательности $x_n = 1/n$ изображён на рис. 1.

Определение 2. Будем говорить, что некоторое условие P выполнено для *почти всех* членов последовательности, если оно не выполняется лишь для конечного числа членов последовательности.

Определение 2 можно сформулировать иначе. Именно, фраза «почти для всех членов последовательности (x_n) выполнено $P(x_n)$» означает, что существует такое число k, что для всех натуральных n, больших k, справедливо $P(x_n)$. В самом деле, если условие P не выполнено лишь для конечного числа элементов последовательности, то среди них есть элемент с наибольшим индексом. Его-то мы и возьмём в качестве требуемого k.

Это же утверждение в кванторном виде: $\exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > k :\ P(x_n)$.

Например, почти все члены последовательности $x_n = (n - 7/2)$ удовлетворяют условию $x_n > 0$, потому что $x_n < 0$ только для $n = 1$, $n = 2$ и $n = 3$. Иными словами, $\forall\, n > 3 :\ \ x_n > 0$.

Соответственно, отрицание будет звучать так: «для бесконечного числа элементов последовательности (x_n) условие P не выполняется». Или же так: какое бы k мы ни взяли, существует натуральное n, большее k, такое, что $\bar{P}(x_n)$. Здесь за $\bar{P}$ обозначено отрицание условия P.

То же самое в кванторах: $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n \in \mathbb{N},\ n > k :\ \bar{P}(x_n)$.

Так, для последовательности $x_n = (-1)^n$ утверждение «почти все члены последовательности положительны» не выполняется, потому что каждый нечётный её элемент является отрицательным числом, а значит, бесконечное число членов последовательности меньше нуля. В частности, можно сказать, что $\forall\, k \in \mathbb{N}\ \exists\, n = (2k+1) > k :\ \ x_n < 0$.

Определение 3. Пусть $\varepsilon > 0$. Интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \mid |x - a| < \varepsilon\}$ называется *окрестностью точки a радиуса ε* (или просто *ε-окрестностью* точки a). Обозначение: $U_\varepsilon(a)$.

Читается это так: эпсилон-окрестность точки a.

Теперь мы готовы дать главное определение сегодняшней лекции.

Определение 4. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если для каждого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности числа a содержатся почти все члены последовательности (x_n). Обозначение: $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Формально: $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > k : |x_n - a| < \varepsilon$.

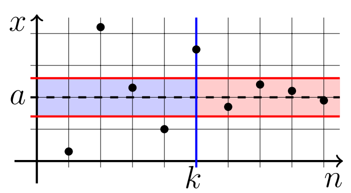

Рис. 2.

Геометрический смысл понятия предела следующий. Рассмотрим на оси ординат ε-окрестность точки a (рис. 2). Параллельно перемещая её от нуля до бесконечности вдоль оси абсцисс, мы заметём на плоскости некоторую «трубу» — множество $\mathbb{R}_+ \times U_\varepsilon(a)$ (закрашенная область на рисунке). Оказывается, если $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то почти все элементы последовательности (x_n) лежат внутри этой «трубы». То есть существует такая граничная прямая $x = k$ (на рис. 2 она отмечена синим), что в правой полуплоскости от неё все члены последовательности попадают в «трубу». При уменьшении ε (уменьшении диаметра «трубы») число k, вообще говоря, увеличивается и, как следствие, граница сдвигается вправо. Но всё равно почти все элементы x_n по прежнему будут лежать внутри «трубы», хотя снаружи их станет несколько больше.

Утверждение 1. *Последовательность не может иметь более одного предела.*

Доказательство. Предположим, последовательность (x_n) обладает двумя различными пределами a и b. Тогда для каждого положительного ε почти все элементы (x_n) должны лежать как в $U_\varepsilon(a)$, так и в $U_\varepsilon(b)$. Однако выбирая ε достаточно маленьким ($\varepsilon < |a-b|/2$), можно добиться того, чтобы эти две окрестности не пересекались. Противоречие.

С точки зрения картинки у нас есть две непересекающиеся «трубы», в каждой из которых должны лежать почти все элементы последовательности, чего, естественно, не может быть. □

Пример 1. Пусть последовательность задана формулой $x_n = 1/n$. Тогда её предел равен нулю. Докажем это по определению. Итак, нам нужно проверить, что какое бы положительное число ε мы ни взяли, почти все члены последовательности будут по модулю меньше ε. Иными словами, нужно найти такое $k \in \mathbb{N}$, что для всех натуральных n, больших k, выполняется неравенство $1/n < \varepsilon$. Однако последнее эквивалентно тому, что $n > 1/\varepsilon$. Значит, достаточно взять $k = [1/\varepsilon] + 1$. Итого:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k = [1/\varepsilon] + 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N},\, n > k: \;\; |1/n| < \varepsilon.$$

Утверждение 2. *Любая сходящаяся последовательность (то есть последовательность, имеющая предел) является ограниченной.*

Доказательство. По определению последовательность называется ограниченной, если все её члены содержатся в некоторой окрестности нуля, то есть

$$\exists M > 0 \;\; \forall n \in \mathbb{N}: \;\; |x_n| < M. \tag{1}$$

С геометрической точки зрения ограниченность последовательности означает, что все её элементы лежат в некоторой «трубе», ось которой параллельна оси абсцисс. Для сходящейся последовательности это верно, поскольку почти все члены такой последовательности лежат в окрестности предела, то есть тоже в какой-то «трубе», а оставшихся членов конечное число. Это означает, что мы можем последовательно расширить данную по определению предела «трубу» таким образом, чтобы в неё попали все члены искомой последовательности.

С формальной точки зрения нам известно, что для числа ε, равного, например, единице, существует такое k, что для любого натурального n, большего k, выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Последнее неравенство эквивалентно тому, что $a - 1 < x_n < a + 1$. Следовательно, в качестве требуемого в формуле (1) числа M достаточно взять максимальный элемент следующего конечного множества: $\{|a-1|, |a+1|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_k|\}$. □

Для дальнейших изысканий нам понадобится немного переформулировать определение предела последовательности. Именно, смысл предела заключается в том, что это такое число, в любой окрестности которого содержатся почти все члены последовательности. Поэтому формально мы можем записать это не только так, как было сделано в определении 4, но и следующим образом:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k \in \mathbb{N} \;\; \forall n \in \mathbb{N},\, n > k: \; |x_n - a| < \varepsilon/C, \tag{2}$$

где C — произвольное наперёд заданное положительное число. В самом деле, здесь записано, что почти все члены последовательности (x_n) лежат в ε/C-окрестности точки a. Если a — предел, то это верно, потому что по определению, почти все члены содержатся в любой его окрестности. В том числе, и в ε/C-окрестности.

Теперь посмотрим, как это работает, на примере доказательства разных свойств пределов.

Свойство 1. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\;\; c \in \mathbb{R}$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty} (cx_n) = ca$.

Доказательство. Это практически очевидно. Действительно, мы знаем, что для почти всех натуральных n выполяется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Значит, для тех же самых значений n будет справедливым $|cx_n - ca| < |c|\varepsilon$, что (в соответствии с формулой (2)) и требовалось доказать. □

Свойство 2. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда существуют пределы* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n) = (a+b)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = (a-b)$.

Доказательство. Здесь мы воспользуемся следующим важным свойством модулей: для любых $u, v \in \mathbb{R}$ справедливо $|u+v| \leqslant |u| + |v|$.

Итак, благодаря формуле (2) мы знаем, что существуют такие натуральные числа k_1 и k_2, что коль скоро $n > k_1$, то выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/2$, а если $n > k_2$, то верно, что $|y_n - b| < \varepsilon/2$. Следовательно, для всех натуральных n, больших числа $\max(k_1, k_2)$, будет справедливой следующая цепочка неравенств:

$$|(x_n+y_n) - (a+b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = (a+b)$.

Аналогичное рассуждение можно провести и для разности $(x_n - y_n)$. А можно просто воспользоваться уже доказанным свойством для предела суммы и свойством 1 для $c = -1$. □

В этом месте читатель, вероятно, подумает: «А ведь наверняка точно такие же свойства справедливы и для других арифметических операций: умножения там, деления... А может, и для извлечения корня тоже всё сработает?» Так оно, в общем-то, и оказывается. Однако для доказательства этих свойств пределов нам пригодится ещё одна переформулировка определения предела последовательности.

Определение 5. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε для почти всех натуральных n выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.

Формально: $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, k \in \mathbb{N}\ \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n > k : \ |x_n| < \varepsilon$.

Сравнивая определения 4 и 5, нетрудно заметить, что последовательность является бесконечно малой ровно в том случае, когда её предел равен нулю. Казалось бы, зачем давать ещё одно определение и плодить сущности, когда по существу ничего нового мы не сказали? Однако понятие бесконечно малой последовательности оказывается невероятно удобным в применении; с его помощью мы как бы получаем возможность подойти к той же проблеме с другой стороны, взглянуть на неё под другим углом. И всё это благодаря следующему утверждению.

Утверждение 3. *Пусть для всех n выполняется соотношение $x_n = a + \alpha_n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ в том и только в том случае, когда последовательность (α_n) является бесконечно малой.*

Доказательство. По существу, доказывать нечего. Если мы взглянем на графики, то увидим, что последовательности (x_n) и (α_n) отличаются друг от друга сдвигом на константу a. Поэтому если почти все элементы (x_n) лежат в ε-окрестности a, то почти все элементы (α_n) лежат в ε-окрестности нуля, и наоборот. Что, собственно, и утверждается. □

Следующее утверждение тоже очевидно, поэтому мы оставим его без доказательства.

Утверждение 4. *Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная последовательность. Тогда $(x_n + y_n)$ — ограниченная, а $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.*

Теперь мы готовы на должном уровне продолжить обсуждение свойств пределов.

Свойство 3. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$.

Доказательство. Предположим сначала, что либо $a = 0$, либо $b = 0$. Тогда одна из данных последовательностей будет бесконечно малой, а другая — ограниченной. Остаётся только применить утверждение 4.

Пусть теперь оба предела отличны от нуля. Тогда мы воспользуемся так называемым методом Тараса Бульбы, выраженном крылатой фразой «Я тебя породил — я тебя и убью!» Собственно, в математике этот метод заключается в следующем: к данному выражению мы прибавляем нечто и одновременно это же самое нечто из него вычитаем (чтобы не нарушилось равенство). После чего используем прибавленное для дальнейших необходимых нам преобразований.

Итак, нам бы хотелось, чтобы почти все элементы вида $x_n y_n$ лежали в любой наперёд заданной окрестности числа ab, или же (что то же самое), чтобы для почти всех n величина $|x_n y_n - ab|$ была достаточно малой. Применим к этой величине метод Тараса Бульбы и неравенство для модуля суммы. Получим следующую оценку:

$$|x_n y_n - ab| = |(x_n y_n - ab) + (x_n b - x_n b)| = |b(x_n - a) + x_n(y_n - b)| \leqslant |b(x_n - a)| + |x_n(y_n - b)|. \qquad (3)$$

В этом месте мы должны вспомнить вот о чём. Во-первых, последовательность (x_n) сходится к a. Значит, почти для всех натуральных n выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon/(2|b|)$ (здесь, конечно, мы пользуемся тем, что $b \neq 0$). Во-вторых, сходимость (x_n) означает, что она ограничена, то есть существует $M > 0$ такое, что $|x_n| < M$ для всех n. Наконец, последовательность (y_n) имеет предел b, откуда $|y_n - b| < \varepsilon/(2M)$ почти для всех n. Во всех этих неравенствах, как уже заметил, наверное, наш читатель, мы воспользовались ещё и формулой (2).

В итоге мы можем продолжить неравенство (3) следующим способом:

$$|b(x_n - a)| + |x_n(y_n - b)| = |b| \cdot |x_n - a| + |x_n| \cdot |y_n - b| < |b| \cdot \frac{\varepsilon}{2|b|} + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким образом, мы доказали, что для любого положительного числа ε для почти всех n выполняется неравенство $|x_n y_n - ab| < \varepsilon$. А это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = ab$. $\square$

Свойство 4. *Пусть* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$. *Тогда существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = a/b$.

Доказательство. Для начала докажем, что при данных условиях последовательность $(1/y_n)$ является ограниченной. В самом деле, поскольку $b \neq 0$, мы можем рассмотреть ε-окрестность точки b для $\varepsilon = |b|/2$. Почти все элементы последовательности (y_n) в ней содержатся, поэтому почти для всех n выполнено неравенство $|y_n - b| < |b|/2$. Отсюда, в частности, следует, что $|y_n| - |b| > -|b|/2$ или $|y_n| > |b|/2$. Таким образом, почти для всех n мы имеем $1/|y_n| < 2/|b|$.

Обратим внимание читателя на тонкий момент изложенного выше рассуждения. Вообще говоря, некоторые элементы последовательности (y_n) могут оказаться нулевыми, а тогда для них значение выражения $1/y_n$ не определено. Таким образом, нам нужно либо в условии утверждения заранее оговорить, что мы не рассматриваем последовательности (y_n), содержащие нулевые члены, либо отметить, что мы рассматриваем последовательность $(1/y_n)$ не при всех натуральных n, а только с некоторого момента, при достаточно больших n. Как бы то ни было, суть рассуждения от этого не меняется, поскольку такие понятия, как ограниченность и сходимость, остаются неизменными при добавлении или изъятии конечного числа элементов последовательности.

Вернёмся к доказательству свойства 4. Мы могли бы провести выкладки, аналогичные тем, что мы видели в доказательстве свойства 3. Однако мы намеренно этого делать не будем, чтобы продемонстрировать ещё один метод рассуждения, приводящий к требуемому результату. Метод, который не использует аккуратных оценок, но позволяет узреть суть.

Представим данные последовательности в виде $x_n = a + \alpha_n$ и $y_n = b + \beta_n$. Согласно утверждению 3, последовательности (α_n) и (β_n) являются бесконечно малыми. Теперь рассмотрим разность $(x_n/y_n) - (a/b)$. В силу всё того же утверждения 3 нам достаточно доказать, что эта разность является бесконечно малой последовательностью. Распишем её более подробно:

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{x_n b - y_n a}{y_n b} = \frac{(a + \alpha_n)b - (b + \beta_n)a}{y_n b} = \frac{\alpha_n b - \beta_n a}{y_n b}.$$

Что же мы видим? В числителе находится бесконечно малая последовательность. А рассмотренный отдельно знаменатель, как мы показали выше, представляет собой последовательность ограниченную. Следовательно, в соответствии с утверждением 4, их произведение бесконечно мало. Требуемое доказано. $\square$

Пример 2. Вычислим при помощи арифметических свойств пределов какой-нибудь несложный предельчик. Рассмотрим, скажем, последовательность $x_n = \dfrac{(n-3)}{(n-2)(n-4)}$. Тогда, согласно всем перечисленным выше свойствам, мы имеем:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-3)}{(n-2)(n-4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-3}{n^2-6n+8} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n} - \dfrac{3}{n^2}}{1 - \dfrac{6}{n} + \dfrac{8}{n^2}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} - 3\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\right)^2}{1 - 6\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + 8\left(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\right)^2}.$$

Однако, как мы доказали в примере 1, последовательность $(1/n)$ является бесконечно малой. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Наша лекция неуклонно движется к своему финалу. Напоследок обсудим пару интересных и полезных теорем.

Теорема 5. *(Принцип двух милиционеров) Пусть (x_n), (y_n) и (z_n) — последовательности, причём почти для всех $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и, кроме того, справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда последовательность (y_n) сходится, причём $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.*

Доказательство. Тут всё понятно. Как говорится, куда ты денешься с подводной лодки? Почти все члены последовательностей (x_n) и (z_n) лежат в ε-окрестности числа a, и $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ почти для всех n. Значит, почти все члены последовательности (y_n) также лежат в ε-окрестности числа a. Требуемое доказано. □

Теорема 6. *(Теорема Вейерштрасса) Любая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.*

Это утверждение тоже вполне понятно, но, в отличие от принципа двух милиционеров, доказать его мы не сможем. Для строгого его обоснования требуется влезть в основания понятия действительного числа, что выходит далеко за рамки нашей лекции. Остаётся лишь на пальцах объяснить суть происходящего.

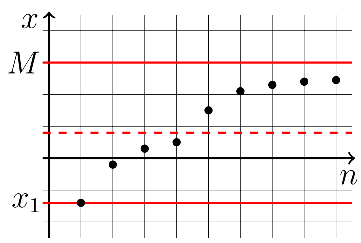

Рис. 3.

Пусть, для определённости, данная последовательность (x_n) монотонно возрастает. Согласно определению ограниченной последовательности, существует такое положительное число M, что $|x_n| < M$ при всех натуральных n. Таким образом, все члены последовательности находятся в «трубе», нижней границей которой является число x_1, а верхней границей — число M. Разделим эту «трубу» пополам (рис. 3). Заметим, что в силу монотонности последовательности в верхней половине «трубы» либо содержатся почти все члены последовательности (x_n), либо не содержится ни одного. В последнем случае почти все члены лежат в нижней половине. Как бы то ни было, выберем ту часть «трубы», которая содержит почти все члены последовательности.

Далее мы будем продолжать процесс деления «трубы» пополам до бесконечности. На каждом шаге выбираемая «трубочка» будет содержать почти все члены последовательности (x_n), поэтому в итоге мы придём к пределу — к оси, которая содержится во всех «трубочках». Единственный вопрос, на который мы не дадим здесь ответа — почему такая ось существует? Повторимся: это предмет отдельного разговора, а наша сегодняшняя лекция подошла к концу. Осталось только разобрать один важный пример.

Пример 3. Пусть последовательность задана формулой $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. Тогда она является монотонной и ограниченной, а значит, по теореме Вейерштрасса, имеет предел.

Докажем, что (x_n) монотонно возрастает. Поскольку все её члены положительны, для этого достаточно показать, что отношение x_{n+1}/x_n больше единицы при всех натуральных n. В самом деле,

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1+1/(n+1))^{n+1}}{(1+1/n)^n} = \frac{n^n(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{2n+1}} = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n$$

Вспомним неравенство Бернулли: если $a>-1$ и $n\in\mathbb{N}$, то $(1+a)^n \geqslant 1+an$. Применим его здесь:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geqslant \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{n}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1.$$

Теперь покажем, что последовательность (x_n) ограничена. Для начала воспользуемся биномом Ньютона: $(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^nb^n$. В нашем случае $a=1$, $b=1/n$, поэтому

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1\cdot\frac{1}{n} + C_n^2\cdot\frac{1}{n^2} + \cdots + C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}.$$

Заметим, что для всех k справедливо неравенство

$$\frac{C_n^k}{n^k} = \frac{1}{n^k}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{k!}.$$

Значит, мы можем написать следующую оценку

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{C_n^1}{n} + \frac{C_n^2}{n^2} + \frac{C_n^3}{n^3} + \cdots + \frac{C_n^n}{n^n} \leqslant 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$

Далее, для каждого натурального m справедливо $\dfrac{1}{m!} \leqslant \dfrac{1}{(m-1)\cdot m}$. Следовательно,

$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} \leqslant 2+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n} = 2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right) < 3.$$

Итого, мы доказали, что $x_n < 3$.

Отметим, что попутно было доказано, что последовательность $y_n = 1+\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1}{2!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$ является ограниченной. Так как её монотонность не вызывает сомнений, то можно воспользоваться теоремой Вейерштрасса, откуда вытекает, что (y_n) имеет предел. Оказывается $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Этот предел играет в математике огромную роль; его обозначают буквой e и иногда называют *числом Непера*. Но чем так замечательно число e, наш дорогой читатель (если он этого ещё не знает) узнает как-нибудь в другой раз.