# Ликбез – 2. Теория множеств.

## 1. Понятия множества и подмножества

Понятие множества, наряду с понятиями точки и прямой в геометрии, является неопределимым. Мы можем считать, что множество — это просто совокупность некоторых элементов. Пусть $A$ — множество. Если $x$ является элементом множества $A$, то пишут $x \in A$. Если же $x$ не принадлежит множеству $A$, то пишут $x \notin A$. Иногда множество записывают, перечисляя в фигурных скобках через запятую его элементы. Так, $\{2, 5\}$ — множество, состоящее из элементов 2 и 5.

Для некоторых множеств есть стандартные обозначения. Например, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ — множество всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество всех действительных (вещественных) чисел. Многие множества можно задать при помощи условий. Скажем, множество всех чётных чисел записывается так: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ делится на } 2\}$. Множество рациональных чисел тоже можно записать подобным образом: $\mathbb{Q} = \{m/n \mid m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$. В общем случае, запись $\{x \in M \mid P(x)\}$ означает, что рассматривается множество, состоящее из всех элементов множества $M$, удовлетворяющих условию $P$.

**Определение 1.** Множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Обозначение: $A = B$.

Равные множества мы будем отождествлять, считая их одним объектом.

**Определение 2.** Множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$, если каждый элемент множества $A$ принадлежит также и множеству $B$. Обозначение: $A \subset B$.

Условие «$A$ является подмножеством $B$», принято записывать более коротко: $\forall x \in A : x \in B$. Здесь символ $\forall$ заменяет собой слова «любой», «для любого» и называется *квантором всеобщности*. В распоряжении математиков имеется также ещё один квантор — *квантор существования* $\exists$, который обозначает слово «существует». Например, тот факт, что множество $A$ не является подмножеством множества $B$, можно расписать так: $\exists x \in A : x \notin B$.

Стоит обратить внимание на следующий момент. В приведённых двух примерах утверждения $A \subset B$ и $A \not\subset B$ получались друг из друга заменой квантора всеобщности на квантор существования и изменением условия $x \in B$ на противоположное. Оказывается, подобным образом ведут себя все утверждения и их отрицания. Именно, если у нас имеется утверждение, использующее кванторы, то для построения отрицания к нему нужно все символы $\forall$ заменить на $\exists$, все символы $\exists$ — на $\forall$, а условие, стоящее в конце, заменить на противоположное. Например, если дано утверждение

$$\exists a \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n > k, n \in \mathbb{N} :\ |a_n - a| < \varepsilon,$$

то его отрицание будет выглядеть следующим образом:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n > k, n \in \mathbb{N} :\ |a_n - a| \geqslant \varepsilon.$$

Забегая вперёд, отметим, что утверждение, которое мы привели здесь в качестве примера, означает, что последовательность $(a_n)$ сходится, то есть имеет предел.

Вернёмся к разговору о множествах. Определение 1 естественно, но им не очень удобно пользоваться, когда необходимо доказать, что какие-либо два множества равны. Реально почти во всех случаях равенство двух множеств устанавливается при помощи следующего утверждения.

**Утверждение 1.** *Множества $A$ и $B$ равны тогда и только тогда, когда $A \subset B$ и $B \subset A$.*

Утверждение 1 тавтологично по своей сути (то есть доказывать особенно нечего). В самом деле, если множества не равны между собой, то они состоят из разных элементов. Это значит, что в одном из них есть элемент, которого нет в другом. Но тогда первое множество не содержится во втором. Так же и наоборот: если одно из множеств не является подмножеством другого, то в нём есть элемент, которого нет во втором, откуда вытекает, что рассматриваемые множества различны.

**Определение 3.** Множество называется *пустым*, если оно не содержит ни одного элемента. Обозначение: $\emptyset$.

**Утверждение 2.** *Пустое множество является подмножеством любого множества.*

**Доказательство.** Попробуем проверить по определению 2, содержится ли пустое множество в произвольном множестве $A$. Это означает, что $\forall x \in \emptyset : x \in A$. Но как понять выражение «любой элемент пустого множества», если в этом множестве вообще нет элементов?

Зато если перейти к отрицанию, всё сразу встаёт на свои места. Если бы пустое множество не являлось подмножеством множества $A$, то в нём существовал бы некоторый элемент $x$, который бы не принадлежал $A$. Но это, очевидно, верным быть не может, потому что в пустом множестве нет вообще никаких элементов, в том числе и таких, которые не принадлежат $A$. Следовательно, коль скоро не выполнено отрицание, справедливо само утверждение, то есть любой элемент множества $\emptyset$ принадлежит множеству $A$. $\square$

**Замечание.** Подобным образом можно доказать, что элементы пустого множества обладают любыми свойствами. Например, любой элемент пустого множества является красным крокодилом, который живёт в Москве-реке. Или каждый элемент пустого множества делится одновременно на все простые числа и приходит к Хайдару в ночных кошмарах.

**Следствие 3.** *Пустое множество единственно.*

**Доказательство.** Под единственностью пустого множества мы имеем в виду то, что любые два пустых множества неизбежно равны между собой. Но тут доказывать особо нечего — это напрямую следует из двух фактов: утверждения 1 и утверждения 2. $\square$

Важно отметить, что записывая $\emptyset$ и $\{\emptyset\}$, мы имеем в виду две совершенно разные вещи. Первое является пустым множеством, которое элементов не содержит. Второе представляет собой множество, состоящее из одного элемента, который сам по себе является множеством — пустым. Таким образом, для него справедливо не только утверждение $\emptyset \subset \{\emptyset\}$, но ещё и $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

## 2. Операции над множествами

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся операции над множествами, а также основные методы работы с ними.

**Определение 4.** *Объединением* множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A$ и $B$, то есть из таких $x$, что $x \in A$ или $x \in B$. Обозначение: $A \cup B$.

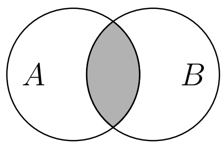

Рис. 1.

**Определение 5.** *Пересечением* множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех элементов, каждый из которых принадлежит обоим множествам $A$ и $B$, то есть из таких $x$, что $x \in A$ и $x \in B$. Обозначение: $A \cap B$.

**Определение 6.** *Разностью* множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех элементов $x$ таких, что $x \in A$ и $x \notin B$. Обозначение: $A \backslash B$.

Схематично изображать множества удобно с помощью так называемых *кругов Эйлера*. Так, на рис. 1 представлено пересечение множеств $A$ и $B$. Подобные иллюстрации часто помогают понять, равны между собой два каких-либо множества или нет. Рассмотрим, например, следующие множества:

$$X = (A \setminus B) \cup (B \setminus A), \qquad Y = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

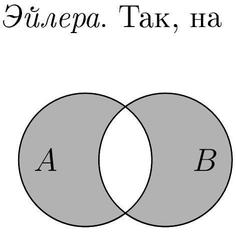

Рис. 2.

Внимательный взгляд помогает понять, что как первое, так и второе множество отображено на рис. 2. Однако, несмотря на эту наглядную очевидность равенства $X = Y$, считать картинку доказательством нельзя по крайней мере по той причине, что формально она не даёт представления о всех возможных случаях. Скажем, если $A \subset B$, рисунок должен выглядеть иначе (один кружочек внутри другого). Кроме того, с кругами Эйлера становится неудобно работать, если количество рассматриваемых множеств превышает три.

Продемонстрируем на примере $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$, как можно доказывать, что два множества равны друг другу. Для этого мы воспользуемся утверждением 1. Для начала проверим, что $X \subset Y$, для чего убедимся, что любой элемент множества $X$ принадлежит множеству $Y$. В самом деле, пусть $x \in X$. Тогда либо $x \in (A \setminus B)$, либо $x \in (B \setminus A)$ (возможно, и то, и другое). Первое означает, что $x$ принадлежит $A$, но при этом не принадлежит $B$, второе, наоборот, — что $x$ принадлежит $B$, но при этом не принадлежит $A$. Таким образом, элемент $x$ хотя бы одному из множеств $A$ и $B$ принадлежит, но при этом он не может принадлежать им обоим одновременно. А это как раз и означает, что $x \in (A \cup B)$, но $x \notin (A \cap B)$, откуда мы делаем вывод, что $x \in Y$.

Итак, мы доказали, что $X \subset Y$. Аналогичным образом можно показать, что $Y \subset X$. Объединяя эти два факта вместе, в силу утверждения 1 мы заключаем, что $X = Y$. Отметим, что для этого множества зарезервирован специальный символ $\triangle$, а называется оно *симметрической разностью* множеств $A$ и $B$. То есть по определению $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

**Определение 7.** *Декартовым произведением* множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из всех упорядоченных пар $(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$. Обозначение: $A \times B$.

Проиллюстрируем введённое определение конкретным примером. Предположим, даны множества $A = \{1, 2\}$ и $B = \{1, 2, 3\}$. Тогда $A \times B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)\}$. Обратим внимание читателя на тот факт, что пары упорядочены, то есть $(1, 2)$ и $(2, 1)$ — это разные элементы полученного множества.

Типичным примером декартового произведения множеств является всем знакомая координатная плоскость. Она представляет собой множество $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, что часто записывают как $\mathbb{R}^2$. По аналогии можно определить многомерное пространство $\mathbb{R}^n$. Считая, что декартово произведение обладает ассоциативностью (то есть если мы перемножаем несколько раз, то нам не важно, в каком порядке перемножать), будем говорить, что $\mathbb{R}^n$ — это множество всех $n$-мерных упорядоченных наборов $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_k \in \mathbb{R}$ для каждого $k$. Иными словами, $\mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_k \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant k \leqslant n\}$.

Отметим важный частный случай, касающийся декартова произведения. Именно, $A \times \emptyset = \emptyset$ для любого множества $A$. Действительно, предположим, что существует некоторый элемент, который содержится в $A \times \emptyset$. Тогда он представляет собой пару $(a, b)$, для которой $a \in A$, $b \in \emptyset$. Однако в пустом множестве нет элементов, значит, такого $b$ не существует, откуда вытекает, что и пары соответствующей нет.

# 3. Отображения множеств

**Определение 8.** Пусть даны множества $X$ и $Y$. Правило $f$, сопоставляющее каждому элементу $x$ множества $X$ ровно один элемент $y$ множества $Y$, называется *отображением из множества $X$ в множество $Y$*. Если $Y$ является числовым множеством, то отображение называют *функцией*. Обозначения: $f : X \to Y,\ f(x) = y,\ x \mapsto y$.

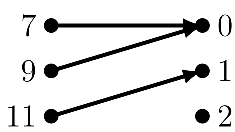


Рис. 3.

Отображения можно задавать картинкой. Например, отображение $f$ из множества $\{7, 9, 11\}$ в множество $\{0, 1, 2\}$, для которого выполнены равенства $f(7) = 0$, $f(9) = 0$, $f(11) = 1$, можно изобразить так, как показано на рис. 3.

**Определение 9.** *Графиком* отображения $f : X \to Y$ называется множество $\Gamma(f) \subset X \times Y$, состоящее из всех пар вида $(x, f(x))$, где $x \in X$.

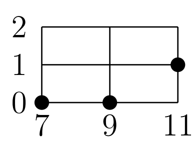


Рис. 4.

Точно так же, как и отображения, графики имеют наглядную интерпретацию. Так, например, на рис. 4 изображён график $\{(7,0), (9,0), (11,1)\}$ рассмотренного выше отображения $f : \{7, 9, 11\} \to \{0, 1, 2\}$. Стандартные графики функций, которые обычно изучают на уроках алгебры (как, например, графики $y = x^2$ или $y = |x| + 1$), также являются графиками в смысле определения 9, то есть представляют собой частный случай этого понятия.

**Определение 10.** Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Если $f(x) = y$, то $y$ называется *образом элемента* $x$, $x$ — *прообразом элемента* $y$. Множество, состоящее из всех элементов $x$ таких, что $f(x) = y$, называется *полным прообразом элемента* $y$ при отображении $f$ (обозначение: $f^{-1}(y)$). *Образом множества* $A \subset X$ при отображении $f$ называется множество, состоящее из всех элементов вида $f(x)$, где $x \in A$ (обозначение: $f(A)$). *Прообразом множества* $B \subset Y$ называется множество, состоящее из всех таких $x$, что $f(x) \in B$ (обозначение: $f^{-1}(B)$).

Заданные в этом определении объекты удобно записать через кванторы. Именно,

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}, \qquad f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

Например, для отображения, изображённого на рис. 3, имеем $f(\{7, 9\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{1, 2\}) = \{11\}$. Отметим, что полный прообраз произвольного элемента из множества $Y$ может как состоять из нескольких элементов, так и быть пустым. Так, в том же самом примере $f^{-1}(0) = \{7, 9\}$, $f^{-1}(2) = \emptyset$.

**Определение 11.** Отображение $f : X \to Y$ называется *взаимно однозначным* или *биекцией*, если для любого $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента.

Отображение может не быть взаимно однозначным по двум причинам. Во-первых, прообраз некоторого элемента $y \in Y$ может состоять более чем из одного элемента. Это означает, что какие-либо два элемента из $X$ «склеиваются» при отображении $f$, то есть их образы совпадают. Во-вторых, у некоторого элемента $y \in Y$ может вообще не быть прообраза, то есть при отображении $f$ в него ничего не переходит. Таким образом, чтобы доказать, что $f$ — взаимно однозначное отображение, надо проверить следующие два условия.

$$\text{Первое:} \qquad \forall\, x_1, x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2 : \ \ f(x_1) \neq f(x_2). \tag{1}$$

Отображение, которое удовлетворяет условию (1), называется *вложением* или *инъекцией*.

$$\text{Второе:} \qquad \forall\, y \in Y \ \ \exists\, x \in X : \ \ f(x) = y. \tag{2}$$

Удовлетворяющее условию (2) отображение называется *наложением* или *сюръекцией*.

Итак, отображение взаимно однозначно тогда и только тогда, когда оно одновременно является вложением и наложением.

Если множества $X$ и $Y$ конечны, то существование какого-либо взаимно однозначного отображения $f : X \to Y$ означает, что количество элементов в них одинаково. Например, для доказательства равенства $C_n^k = C_n^{n-k}$ можно воспользоваться явной формулой и убедиться, что как левая часть, так и правая равны $\dfrac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$. Однако есть более изящное доказательство — комбинаторное. Заметим, что когда мы выбираем из $n$ элементов некоторые $k$ элементов, то автоматически $(n - k)$ элементов остаются невыбранными. Иными словами, мы делим $n$-элементное множество на два подмножества, в одном из которых содержится $k$ элементов, а в другом — $(n - k)$ элементов. Это разделение устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством сочетаний из $n$ элементов по $k$ и множеством сочетаний из $n$ элементов по $(n - k)$. Следовательно, количества таких сочетаний равны между собой, а это и означает, что $C_n^k = C_n^{n-k}$.

**Определение 12.** *Композицией отображений* $f : X \to Y$ и $g : Y \to Z$ называется отображение $h : X \to Z$ такое, что $h(x) = g(f(x))$. Обозначение: $h = g \circ f$.

С точки зрения картинок композиция означает, что мы сначала движемся по стрелочкам отображения $f$, а потом — по стрелочкам отображения $g$. Например, для изображённых на рис. 5 отображений $(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(0) = 3$. С точки зрения формул и функций, с которыми школьники обычно имеют дело на уроках алгебры, композиция означает подстановку одного выражения в другое в качестве переменной. Скажем, если $f(x) = x^3 + 3x$, $g(x) = |x - 1| + x^2$, то

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = |x^3 + 3x - 1| + (x^3 + 3x)^2.$$

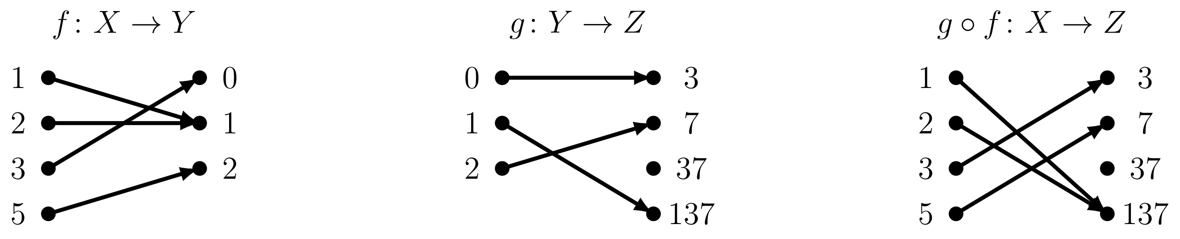


Рис. 5.

Обратим внимание читателя на тот факт, что композиция отображений $f$ и $g$ обозначается именно $g \circ f$, а не $f \circ g$. Это объясняется тем, в каком порядке мы применяем отображения к каждому конкретному элементу. Именно, если нас интересует образ элемента $x$, то сначала мы применяем к нему отображение $f$, а потом к полученному $f(x)$ применяем отображение $g$ и получаем $g(f(x))$.

**Определение 13.** Отображение $f : X \to X$ называется *тождественным*, если $f(x) = x$ для любого $x \in X$. Обозначение: $\mathrm{id}_X$.

Тождественное отображение является взаимно однозначным и определяется только множеством, на котором оно действует. С точки зрения картинок тождественность означает, что все стрелочки параллельны друг другу (если элементы множества $X$ слева и справа расположены в одном порядке). Композиция произвольного отображения $f$ с тождественным будет равна отображению $f$.

**Определение 14.** Пусть дано отображение $f : X \to Y$. Отображение $g : Y \to X$ называется *обратным* к отображению $f$ (обозначение: $g = f^{-1}$), если отображения $g \circ f$ и $f \circ g$ тождественны ($g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$). Отображение $f$, для которого существует обратное отображение, называется *обратимым*.

Здесь важно отметить, что символ $f^{-1}$ (в комбинации с разными другими знаками) означает довольно разные по сути вещи. Так, $f^{-1}$ — **отображение**, являющееся обратным для отображения $f$. Далее, если $B \subset Y$, то $f^{-1}(B)$ — это **множество**, состоящее из всех элементов множества $X$, образ которых лежит в $B$. Наконец, если $y \in Y$, то выражение $f^{-1}(y)$ зарезервировано сразу для двух понятий: полного прообраза элемента $y$ (это тоже **множество**) и значения обратного отображения на элементе $y$ (то есть образа элемента $y$ при отображении $f^{-1}$, если оно, конечно, существует), которое само по себе является **элементом** множества $X$.

**Утверждение 4.** *Отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.*

**Доказательство.** Предположим, отображение $f\colon X \to Y$ обратимо, то есть существует отображение $g\colon Y \to X$ такое, что $g \circ f = \mathrm{id}_X$ и $f \circ g = \mathrm{id}_Y$. Докажем, что отображение $f$ взаимно однозначно. Предположим противное. Это означает, что один из элементов множества $Y$ имеет более одного прообраза или не имеет прообразов вовсе, то есть не выполняется условие (1) или условие (2). Если неверно условие (1), то существуют такие различные $x_1$ и $x_2$ из множества $X$, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Но это противоречит тождественности отображения $g \circ f$, поскольку иначе получается, что $x_1 = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = x_2$, что противоречит предположению. Если же неверно условие (2), то существует $y \in Y$, у которого нет ни одного прообраза. Однако тогда отображение $f \circ g$ не может быть тождественным, поскольку по предположению $f(g(y)) \neq y$. Полученные противоречия показывают, что если отображение обратимо, то оно взаимно однозначно.

Пусть теперь отображение $f\colon X \to Y$ взаимно однозначно. Для того, чтобы доказать его обратимость, достаточно явным образом предъявить отображение $g\colon Y \to X$, для которого композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ будут тождественными. Это отображение мы построим согласно следующему правилу: элемент $x \in X$ будет образом элемента $y \in Y$ в том случае, когда $f(x) = y$. Поскольку при отображении $f$ каждый элемент имеет ровно один прообраз, заданное указанным выше способом отображение $g$ определено корректно (то есть каждому элементу $y \in Y$ сопоставлен ровно один элемент $x \in X$). А тот факт, что композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ являются тождественными, вытекает из построения отображения $g$. Следовательно, $g = f^{-1}$ ($g$ является обратным к $f$), и $f$ обратимо. $\square$