Ликбез – 1. Комбинаторика.

1. Индукция

Принцип математической индукции (ПМИ) есть свойство (аксиома) множества натуральных чисел, которое мы принимаем без доказательства. Заключается он в следующем. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Предположим, дополнительно известно, что выполнены следующие условия:

1) утверждение A_1 истинно,

2) при всех k из истинности утверждения A_k следует истинность утверждения A_{k+1}.

Тогда все утверждения A_n истинны.

Проверка первого условия называется *базой индукции*, а проверка второго — *индукционным шагом* или *индукционным переходом.*

Задача 1. Про бесконечную последовательность (a_n) известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n \geqslant 1$. Выразите a_n через n (найдите явную формулу).

Решение. Решение этой задачи, по существу, состоит из двух частей. Первая часть — самая интересная, исследовательская. Пока мы не знаем, какой должна быть формула, нам надо её найти, придумать, угадать. А уже когда у нас будет гипотеза о том, как должна выглядеть формула, наступит время для второй части решения — проверить гипотезу, доказать найденную формулу.

Чтобы придумать формулу, полезно выписать первые несколько элементов последовательности. В нашем случае это $1, 3, 7, 15, 31, \ldots$ Обычно первых пяти членов хватает, чтобы уловить закономерность и высказать гипотезу: $a_n = 2^n - 1$.

Теперь перейдём к проверке гипотезы. Справедливость формулы будем устанавливать при помощи принципа математической индукции. Для этого, прежде всего, сформулируем утверждение A_n: $a_n = 2^n - 1$. Дальше надо проверить выполнение двух условий. База индукции выполняется: утверждение A_1 (то есть $a_1 = 2^1 - 1 = 1$) истинно по условию. Проведём индукционный переход. Допустим, что для некоторого k справедливо равенство $a_k = 2^k - 1$. Тогда по условию

$$a_{k+1} = 2a_k + 1 = 2(2^k - 1) + 1 = 2^{k+1} - 2 + 1 = 2^{k+1} - 1.$$

То есть из истинности утверждения A_k следует истинность утверждения A_{k+1}. Таким образом, оба условия выполняются, и, согласно принципу математической индукции, $a_n = 2^n - 1$ для всех натуральных n. $\square$

Обобщённый принцип математической индукции (ОПМИ) есть свойство (аксиома) множества натуральных чисел, эквивалентное ПМИ, которое заключается в следующем. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ Предположим, дополнительно известно, что выполнены следующие условия:

1) утверждение A_1 истинно,

2) при всех k из истинности утверждений A_1, A_2, …, A_k следует истинность утверждения A_{k+1}.

Тогда все утверждения A_n истинны.

Как и для ПМИ, проверка первого условия называется *базой индукции*, а проверка второго — *индукционным шагом* или *индукционным переходом.*

Задача 2. Докажите, что если число $a + \dfrac{1}{a}$ целое, то и $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ — тоже целое.

Замечание. Отметим, что указанное в задаче утверждение не является тривиальным, то есть помимо 1 и -1 существуют и другие числа a, для которых $a + \dfrac{1}{a}$ — целое число. Они, правда, не будут рациональными. Например, таково число $a = 2 + \sqrt{3}$. В самом деле,

$$2 + \sqrt{3} + \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3} + \frac{2 - \sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4.$$

Решение. Воспользуемся обобщённым принципом математической индукции. Утверждение A_n выглядит следующим образом: $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ — целое число. База индукции: число $a + \dfrac{1}{a}$ целое по условию. Шаг индукции: Допустим, все числа $a + \dfrac{1}{a}, a^2 + \dfrac{1}{a^2}, \ldots, a^n + \dfrac{1}{a^n}$ целые. Тогда произведение любых двух из них также является целым числом. С другой стороны,

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) = \left(a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}\right) + \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Отсюда следует, что

$$\left(a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}}\right) = \left(a + \frac{1}{a}\right)\left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right).$$

Поскольку все числа, содержащиеся в скобках в правой части равенства, целые, то и выражение в левой части является целым. Именно это и требовалось проверить в индукционном шаге.

Таким образом, оба условия выполняются, и, согласно обобщённому принципу математической индукции, $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ — целое для всех натуральных n. □

2. Правила суммы и произведения

Правило суммы заключается в следующем. Пусть объект A можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами. Тогда выбор «либо A, либо B» можно осуществить $(m + n)$ способами.

Правило произведения заключается в следующем. Пусть объект A можно выбрать m способами, а объект B можно выбрать n способами. Тогда упорядоченную пару (A, B) можно осуществить $m \cdot n$ способами.

Замечание. Если объекты A и B выбираются последовательно, то важно подчеркнуть, что правило произведения работает только в том случае, если число способов выбора объекта B не зависит от того, какой именно объект A выбран.

Задача 3. У Хайдара есть 5 разных карандашей. Один из них он хочет отдать Вере, а ещё один — Жене. Сколькими способами он может это сделать?

Решение. Выдать Вере карандаш можно 5-ю способами. Вне зависимости от того, какой карандаш ей достанется, Жене можно отдать один из 4-х оставшихся. Следовательно, всего вариантов по правилу произведения $5 \cdot 4 = 20$. □

Замечание. Если бы оба карандаша Хайдар отдавал Вере, то общее число способов это сделать было бы меньше вышенайденного в 2 раза. В самом деле, каждый вариант при аналогичном подсчёте учитывается 2 раза, поскольку не имеет значения, выдаёт Хайдар Вере сначала красный карандаш, а потом жёлтый, или наоборот — результат-то один.

Задача 4. Из города A в город C ведёт 5 дороги, из города C в город B — 2 дороги, из города A в город D ведёт 3 дороги, города D в город B — 4 дороги. Сколькими способами можно добраться из A в B?

Решение. По правилу произведения, из A в B через город C можно добраться $5 \cdot 2 = 10$ путями, а через D — $3 \cdot 4 = 12$ путями. Следовательно, по правилу суммы, всего путей из A в B ровно $10 + 12 = 22$. □

3. Выборки

Пусть дано множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, состоящее из n различных элементов. Для наглядности мы будем считать, что это просто множество карандашей n различных цветов. *Выборкой объёма k* называется набор, содержащий какие-либо k элементов исходного множества.

Элементы выборки могут быть как различными, так и одинаковыми, а порядок элементов может как иметь, так и не значения. В зависимости от этого выборки делятся на следующие 4 вида.

I) *Размещения с повторениями* — это выборки, элементы которых могут быть одинаковыми, а порядок их важен. С точки зрения карандашей это означает, что у Хайдара есть коробка, в которой лежат карандаши n различных цветов (карандашей каждого цвета бесконечно много) и он раздаёт по одному карандашу каждому из k школьников. Общее количество размещений с повторениями обозначается $\overline{A_n^k}$ и равно n^k. Действительно, каждый школьник получает карандаш одного из n цветов вне зависимости от того, какие карандаши получили другие. Осталось воспользоваться правилом произведения.

II) *Размещения (без повторений)* — это выборки, все элементы которых разные, а порядок их важен. В этом случае у Хайдара есть набор из n различных карандашей, и он раздаёт по одному карандашу каждому из k школьников. Общее количество размещений (без повторений) обозначается A_n^k и равно $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$. В самом деле, первому школьнику можно выдать один из n карандашей. Вне зависимости от того, какой это был карандаш, второй школьник получит один из оставшихся $(n-1)$ карандашей, третий — один из $(n-2)$ карандашей и так далее. И снова остаётся только применить правило произведения.

В частном случае, когда число школьников совпадает с количеством карандашей ($k = n$), размещения называются *перестановками*. Можно интерпретировать перестановку также и другим способом: мы просто достаём все имеющиеся в наборе карандаши из коробки и выкладываем их в ряд. Количество всех перестановок, как ясно из вышесказанного, равно $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 1$.

III) *Сочетания (без повторений)* — это выборки, все элементы которых разные, а порядок неважен. Они отвечают ситуации, когда из набора из n различных карандашей Хайдар достаёт k карандашей (и держит в кулаке). Другая интерпретация сочетания — выбор из n-элементного множества k-элементного подмножества. Общее количество сочетаний (без повторений) обозначается C_n^k и равно $\dfrac{A_n^k}{k!}$. И правда, первый карандаш можно вытащить n способами, второй карандаш — $(n-1)$ способом, третий — $(n-2)$ способами и так далее; всего A_n^k. Однако, как и в замечании к задаче 3, каждый вариант достать k карандашей при таком подсчёте мы учли $k!$ раз (ровно столько раз, сколькими способами можно переставить k предметов). Следовательно, на $k!$ надо поделить.

IV) *Сочетания с повторениями* — это выборки, элементы которых могут быть одинаковыми, а их порядок неважен. Они отвечают ситуации, когда из коробки, в которой лежат карандаши n различных цветов, Хайдар достаёт k карандашей (и держит в кулаке). Общее количество сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C_n^k}$ и равно C_{n+k-1}^k.

Объясним, откуда возникает такое число, на конкретном примере. Пусть имеются карандаши 3-х цветов (скажем, красного, жёлтого и зелёного), и Хайдар хочет достать 5 карандашей (таким образом, $n = 3$ и $k = 5$). Каждому извлечённому набору карандашей мы сопоставим семизначную последовательность, составленную из 5-ти нулей и 2-х единиц согласно следующему принципу. В начале последовательности будет столько нулей, сколько в нашем наборе красных карандашей. Затем мы напишем единицу и столько нулей, сколько в наборе жёлтых карандашей. Наконец, за ещё одной единицей последуют оставшиеся нули. Например, набору из двух красных, двух жёлтых и зелёного карандаша будет сопоставлена последовательность 0010010, набору из трёх красных и двух жёлтых карандашей — последовательность 0001001, а набору из пяти зелёных карандашей — 1100000.

Нетрудно видеть, что указанное нами соответствие взаимно однозначно. То есть каждому набору карандашей сопоставляется ровно одна последовательность, и наоборот, каждая последовательность определяет ровно один набор карандашей. Таким образом, количество наборов карандашей совпадает с числом последовательностей. Однако последнее уже легко посчитать: нужно выбрать 5 из 7 позиций, на которых будут стоять нули, а остальные автоматически окажутся заняты единицами. Выбор же этот, как мы видели ранее, осуществляется C_7^5 способами.

Аналогичное рассуждение работает и в общем случае, только число нулей в последовательности будет равным k, а единиц — $(n-1)$.

Сведём полученные результаты в таблицу.

название выборки	порядок элементов	повторение элементов	число выборок	обозначение для числа выборок
размещение с повторениями	важен	допустимо	n^k	$\overline{A_n^k}$
размещение (без повторений)	важен	запрещено	$\dfrac{n!}{(n-k)!}$	A_n^k
сочетание (без повторений)	не важен	запрещено	$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	C_n^k
сочетание с повторениями	не важен	допустимо	$\dfrac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$	$\overline{C_n^k}$