Ликбез – 3. Логарифмы и пределы.

Определение 1. Функция $f(x) = x^a$ называется *степенной функцией* с показателем a.

Задача 1. (I) Найдите область определения степенной функции при различных a.

Задача 2. (II) Определите, когда степенная функция обратима, и найдите обратную к ней функцию.

Задача 3. (I) Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Верно ли, что при любом $x \in \mathbb{R}$ выполнено равенство
а) $x = \log_a a^x$; б) $x = a^{\log_a x}$?

Задача 4. Пусть числа a, b, x, y положительны, причём $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 0$. Докажите, что:
а) **(I)** $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; б) **(I)** $\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$; в) **(I)** $\log_a x^d = d \log_a x$;
г) **(I)** $\log_{a^c} x = \dfrac{1}{c} \log_a x$; д) **(II)** $\log_a b \cdot \log_b a = 1$; е) **(II)** $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$; ж) **(II)** $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

Задача 5. (II) Решите уравнение $\log_2 x = 2 \log_3 x$.

Задача 6. (II) Что больше: $\log_2 3$ или $\log_4 7$?

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если найдётся такое число C, что при всех натуральных n будет выполнено неравенство $|x_n| < C$.
Формально: $\exists C \in \mathbb{R} \ \forall n \in \mathbb{N} : \ |x_n| < C$.

Задача 7. (I) Придумайте ограниченную последовательность, у которой
а) есть и наибольший, и наименьший член;
б) есть наибольший член, но нет наименьшего члена;
в) нет ни наименьшего, ни наибольшего члена.

Задача 8. Какие из следующих последовательностей являются ограниченными:
а) **(I)** $x_n = n^5 - n^2 + 3$; б) **(II)** $x_n = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+1}$; в) **(II)** $x_n = 1 + q + \ldots + q^n$ $(q \in \mathbb{R})$; г) **(III)** $x_n = \sqrt[n]{n}$?

Определение 3. Последовательность (x_n) называется *бесконечно малой*, если для любого положительного числа ε для почти всех n выполняется неравенство $|x_n| < \varepsilon$.
Формально: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall n > k : \ |x_n| < \varepsilon$.

Определение 4. Число a называется *пределом последовательности* (x_n), если существует такая бесконечно малая последовательность (α_n), что при всех натуральных n выполнено равенство $x_n = a + \alpha_n$. Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Говорят также, что (x_n) *стремится (сходится) к a при n, стремящемся к бесконечности*, и пишут $x_n \to a$ при $n \to \infty$.

Можно заметить, что a — предел последовательности (x_n), если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число k, что при всех натуральных $n > k$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.
Формально: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k \in \mathbb{N} \ \forall n > k : \ |x_n - a| < \varepsilon$.

Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Про последовательность, у которой предела нет, говорят, что она *расходится*.

Задача 9. (I) Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена. Верно ли обратное?

Задача 10. (II) Найдите предел последовательности (x_n) (если он существует) в случае, если:
а) $x_n = \dfrac{n}{n+5}$; б) $x_n = \begin{cases} -1, & \text{если } n \text{ делится на } 2 \\ n, & \text{если } n \text{ не делится на } 2; \end{cases}$ в) $x_n = 0,\underbrace{2\ldots2}_{n}$;
г) $x_n = (-1)^n$; д) $x_n = q^n$ $(q \in \mathbb{R})$; е) $x_n = -\sqrt{n}$; ж) $x_n = \sqrt{n^2+1}$.

Задача 11. (II) Пусть (x_n) — бесконечно малая, а (y_n) — ограниченная последовательность. Докажите, что $(x_n + y_n)$ — ограниченная, а $(x_n y_n)$ — бесконечно малая последовательность.

Задача 12. (III) Любую ли последовательность можно представить как отношение
а) двух ограниченных последовательностей; б) двух бесконечно малых последовательностей?

Ликбез – 3. Логарифмы и пределы (ответы)

Задача 1. (I) Пусть $f(x) = x^a$. Если $a \in \mathbb{N}$, то $D(f) = \mathbb{R}$. Если $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, то $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Если $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, то $D(f) = \mathbb{R}_+ = \{x > 0 \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Задача 2. (II) Пусть $f(x) = x^a$. Если $a \in \mathbb{Z}$, то обратная функция существует в том случае, когда a — нечётное. Для $a \in \mathbb{N}$ имеем $f^{-1}(x) = \sqrt[a]{x}$, а для $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ имеем $f^{-1}(x) = (\sqrt[-a]{x})^{-1}$.

Если $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, то $f^{-1}(x) = x^{1/a}$. На самом деле если ограничить степенную функцию на $\mathbb{R}_+$, то она всегда будет обратима, и обратная функция будет выражаться именно так.

Задача 3. (I) а) Да. б) Нет, нужно выполнение условия $x > 0$.

Задача 4. Более или менее тривиальная проверка по определению.

Задача 5. (II) $x = 1$.

Задача 6. (II) $\log_2 3 > \log_4 7$.

Задача 7. (II) а) $x_n = (-1)^n$; б) $x_n = \dfrac{1}{n}$; в) $(-1)^n \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$.

Задача 8. (II) а) Последовательность не ограничена. б),г) Последовательность ограничена. е) Последовательность ограничена, если $|q| < 1$ или $q = -1$.

Задача 9. (I) По определению. Обратное неверно, например, $x_n = (-1)^n$.

Задача 10. (II) а) 1; б) предела нет; в) $\dfrac{2}{9}$; г),е),ж) предела нет; д) 0, если $|q| < 1$, 1, если $q = 1$, в остальных случаях предела нет.

Задача 11. (II) Более или менее по определению.

Задача 12. (III) Пусть дана последовательность a_n. Тогда x_n и y_n задаём так ($a_n = x_n/y_n$):

а) $x_n = \begin{cases} a_n, & \text{если } |a_n| \leqslant 1 \\ 1, & \text{если } |a_n| > 1, \end{cases}$ $\quad y_n = \begin{cases} 1, & \text{если } |a_n| \leqslant 1 \\ 1/a_n, & \text{если } |a_n| > 1; \end{cases}$

б) $x_n = \begin{cases} a_n/n, & \text{если } |a_n| \leqslant 1 \\ 1/n, & \text{если } |a_n| > 1, \end{cases}$ $\quad y_n = \begin{cases} 1/n, & \text{если } |a_n| \leqslant 1 \\ 1/na_n, & \text{если } |a_n| > 1. \end{cases}$

Комментарий. Зачёт за этот листок ставился за 4 верно решённые задачи уровня (II), каждая задача уровня (III) засчитывалась за задачу уровня (II). Однако во всех спорных случаях (когда у меня возникали какие-либо сомнения в том, что человек всё понимает) я оставлял за собой право поспрашивать сходу задачи уровня (I).

Главная проблема этого листочка заключается в малом количестве задач на логарифмы. Фактически я совместил две разные темы в одном листке, хотя было бы логично их разделить. Многие одну из тем знали лучше другой, и решали, в основном, задачи на неё — за счёт этого вторая тема страдала.

Если конкретно по задачам, то наибольшей популярностью пользовались задачи 4, 5, 6 (конечно, на самом деле они простые — не второго уровня). Задачи 8 (целиком, включая пункт г)) и 10 тоже активно сдавались. А вот задачи 1, 2 и 9, напротив. Впрочем, задача 9, равно как и задача 11, обсуждалась на четвёртой лекции.

Подводя итоги, я бы сказал, что темы необходимо чётко разграничить. Про тему "Предел последовательности" будет сказано в комментариям к четвёртому листочку. В теме "Логарифмы" задачи 1 и 2 я бы объединил в одну задачу уровня (II). Задачи 4 и 6 (а может, и задачу 5) я бы перевёл на уровень (I). Кроме того, я бы добавил некоторое количество вычислительных задач разной сложности. Например, тех, что приведены ниже. И ещё что-нибудь сложности (III). Например, что-нибудь, связанное с пределами (в частности, с замечательными пределами и вычислением производной экспоненты и логарифма).

Задача 13. (I) Вычислите:
а) $\log_{2\sqrt{2}} 8$; б) $-\log_3 \log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}$; в) $4^{\log_2 5+\log_{1/4} 10}$; г) $\log_{\sqrt{3}+1}(4+2\sqrt{3})$.

Ответ. а) $-\dfrac{3}{2}$; б) 2; в) $\dfrac{5}{2}$; г) 2.

Задача 14. (II) Вычислите: а) $\sqrt{169^{\frac{1}{\log_{20} 13}}+9^{\frac{1}{\log_{15} 3}}}$; б) $64^{-\log_{\frac{1}{3}} 2\cdot\log_{\frac{1}{4}} 9+1,5}$;
в) $\dfrac{\log_5 0,5}{\log_5 24-\log_5 3}$; г) $\log_2 \sin\dfrac{\pi}{2}+\log_2\cos\dfrac{\pi}{4}+\log_2 \operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}$; д) $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\cos\dfrac{\pi}{6}-\log_3\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

Ответ. а) 25; б) 8; в) -3; г) $-\dfrac{1}{2}$; д) 0.

Задача 15. (I) Сравните два числа:
а) $\log_5\dfrac{1}{3}$ и $\log_7\dfrac{1}{3}$; б) $\log_2 5$ и $\dfrac{5}{2}$; в) $\log_{\log_3 2}\dfrac{1}{2}$ и 1.

Ответ. а) $\log_5\dfrac{1}{3}<\log_7\dfrac{1}{3}$; б) $\log_2 5<\dfrac{5}{2}$; в) $\log_{\log_3 2}\dfrac{1}{2}>1$.

Задача 16. (II) Сравните два числа:
а) $\log_{189} 1323$ и $\log_{63} 147$; б) $\log_3 35$ и $\log_2 11$; в) $\log_2 3$ и $\log_3 4$.
Ответ. а) $\log_{189} 1323>\log_{63} 147$; б) $\log_3 35<\log_2 11$; в) $\log_2 3>\log_3 4$.

Задача 17. (II) Найдите:
а) $\log_{(\sqrt{a}/\sqrt[3]{b})} a^2$, если $\log_b a=2$; б) $\lg 2$ и $\lg 5$, если $\lg 2\cdot\lg 5=a$;
в) $\log_6 16$, если $\log_{12} 27=a$; г) $\log_{35} 28$, если $\log_{14} 7=a$, $\log_{14} 5=b$.

Ответ. а) 6; б) $\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$; в) $\dfrac{4(3-a)}{3+a}$; г) $\dfrac{2-a}{a+b}$.

Задача 18. (II) Решите уравнения:
а) $\log_4(2\log_3(1+2\log_2(1+3\log_3 x)))=0,5$; б) $\log_2 x+\log_3 x=1$;
в) $\log_3\dfrac{x}{3}\cdot\log_2 x-\log_3\dfrac{x^3}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$; г) $1+\log_{x-2}(4x-11)=2\log_{4x-11}(4x^2-19x+22)$;
д) $\log_{\frac{7x-x^2}{25}}(1-\sin 2x-\sin x+\cos x)=\log_{\frac{7x-x^2}{25}}(\cos 2x)$.

Ответ. а) $\{\sqrt[3]{3}\}$; б) $\{2^{\log_6 3}\}$; в) $\{1; 24\sqrt{3}\}$; г) $\left\{\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}; \dfrac{13\pi}{6}\right\}$; д) $\{0\}$.

Задача 19. (II) Решите неравенства: а) $\log_2(1+\log_{1/9}(x-3)-\log_9(x-3))<1$;
б) $\log_2(x-1)-\log_2(x+1)+\log_{\frac{x+1}{x-1}} 2>0$; в) $2\log_5\sqrt{x}-2\leqslant\log_x\dfrac{1}{5}$; г) $\log_x\left(\dfrac{4x-12}{x-4}\right)\leqslant 1$;
д) $\log_{2-x}(x+2)\log_{x+3}(3-x)\leqslant 0$; е) $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x)>1$.
Ответ. а) $\left(\frac{10}{3}; 6\right)$; б) $(3; +\infty)$; в) $(0; 1)\cup\{5\}$;
г) $(0; 1)\cup[2; 3)\cup[6; +\infty)$; д) $(-2; -1]\cup(1; 2)$; е) $\left(2^{-\sqrt{2}}; \frac{1}{2}\right)\cup\left(1; 2^{\sqrt{2}}\right)$.