Самоподобные Фигуры и Апериодические Замощения

Хайдар Нурлигареев

НИС
Геометрия и Динамика

3 февраля 2017

Понятие замощения

Замощением плоскости называется такое счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* замощения $\mathcal{T}$.

Понятие замощения

Замощением плоскости называется такое счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* замощения $\mathcal{T}$.

Если любая плитка замощения $\mathcal{T}$ является копией одной из плитки, входящей в множество $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, то $\mathcal{M}$ называется *протомножеством* замощения $\mathcal{T}$, а его элементы — *протоплитками*.

Понятие замощения

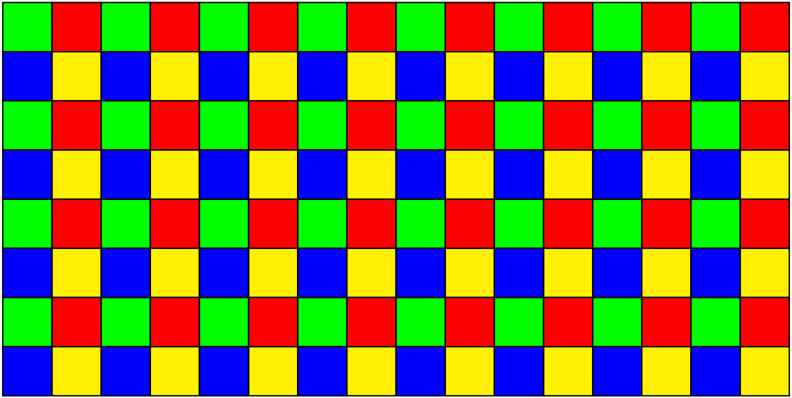
Замощением плоскости называется такое счётное семейство замкнутых множеств $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, T_3, \ldots\}$, которое покрывает всю плоскость без пробелов и наложений. Множества $T_1, T_2, T_3, \ldots$ называются *плитками* замощения $\mathcal{T}$.

Если любая плитка замощения $\mathcal{T}$ является копией одной из плитки, входящей в множество $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$, то $\mathcal{M}$ называется *протомножеством* замощения $\mathcal{T}$, а его элементы — *протоплитками*.

Будем называть замощения $\mathcal{T}_1$ и $\mathcal{T}_2$ *равными*, если одно из них переводится в другое преобразованием подобия.

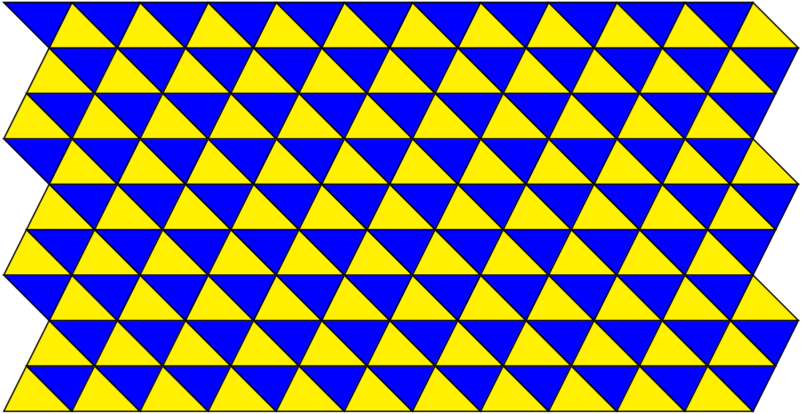
Первые примеры

Замощение плоскости копиями квадрата.



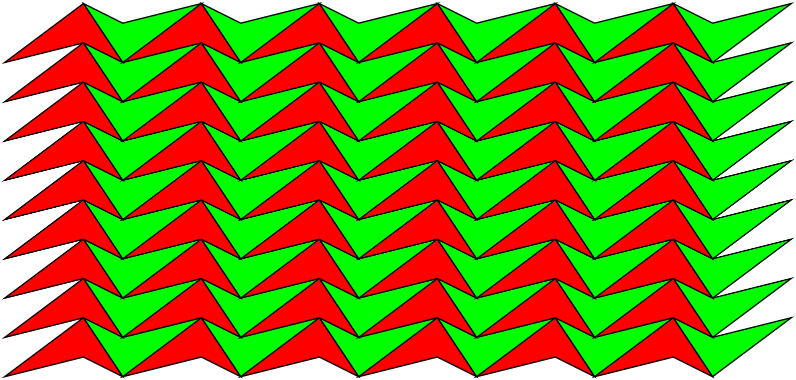
Первые примеры

Замощение плоскости копиями произвольного треугольника.



Первые примеры

Замощение плоскости копиями произвольного четырёугольника.



Рёбра и вершины замощений

Пересечение любых двух плиток замощения, если они вообще пересекаются, состоит из набора отдельных точек и ломаных. Каждая такая ломаная называется *ребром* замощения, а концы ломаных и отдельные точки — *вершинами* замощения.

Рёбра и вершины замощений

Пересечение любых двух плиток замощения, если они вообще пересекаются, состоит из набора отдельных точек и ломаных. Каждая такая ломаная называется *ребром* замощения, а концы ломаных и отдельные точки — *вершинами* замощения.

Важно отличать рёбра и вершины замощения от сторон и углов многоугольников, являющихся плитками.

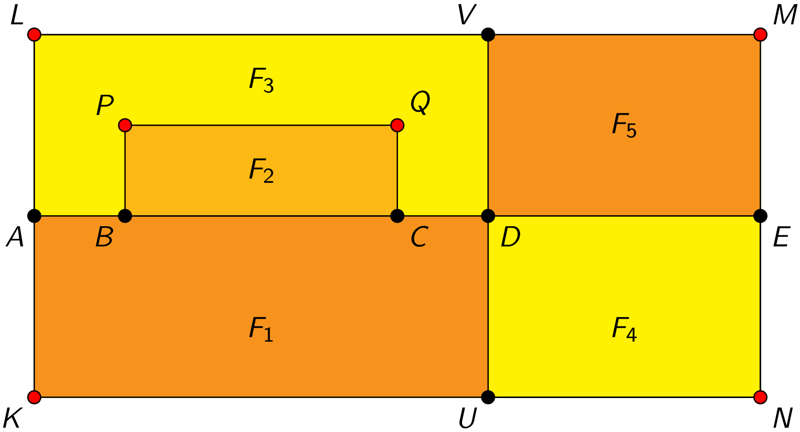
Рёбра и вершины замощений

Пересечение любых двух плиток замощения, если они вообще пересекаются, состоит из набора отдельных точек и ломаных. Каждая такая ломаная называется *ребром* замощения, а концы ломаных и отдельные точки — *вершинами* замощения.

Важно отличать рёбра и вершины замощения от сторон и углов многоугольников, являющихся плитками.

Замощения, у которых любые две пересекающиеся плитки пересекаются либо по углу, либо по стороне, мы будем называть *паркетами*.

Один скромный пример



Теорема существования для замощений

Теорема 1.

- Пусть для каждого $L > 0$ копиями многоугольных протоплиток $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ можно без пробелов и наложений покрыть круг радиуса L. Тогда на основе этого же набора $\mathcal{M}$ можно построить некоторое замощение $\mathcal{T}$.

Классификация движений плоскости

Движение или *изометрия* — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

Классификация движений плоскости

Движение или *изометрия* — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояние.

Теорема Шаля. Существует 4 вида движений плоскости:

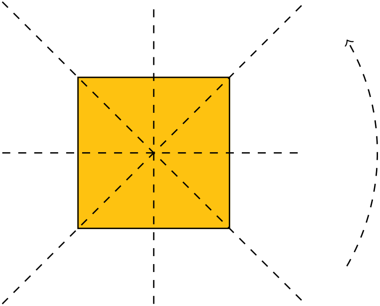
- параллельный перенос;
- поворот;
- осевая симметрия (отражение относительно прямой);
- скользящая симметрия.

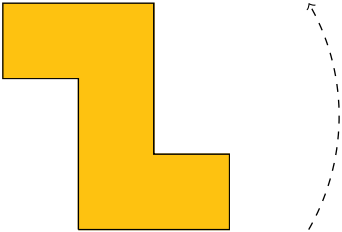
Понятие симметрии множества

Симметрия множества T — это движение, которое переводит множество T в себя.

Понятие симметрии множества

Симметрия множества T — это движение, которое переводит множество T в себя.





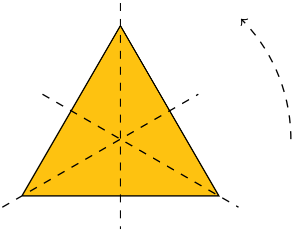
Понятие группы симметрии множества

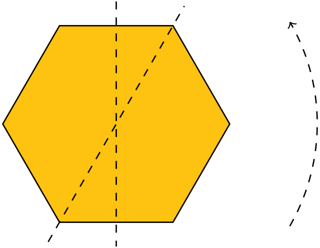
Группа симметрий множества T — это множество всех движений, которые переводят множество T в себя.

Понятие группы симметрии множества

Группа симметрий множества T — это множество всех движений, которые переводят множество T в себя.

Группа диэдра D_n — это группа симметрий правильного n-угольника.

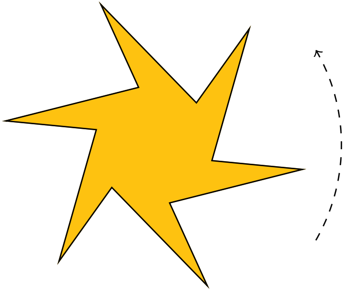


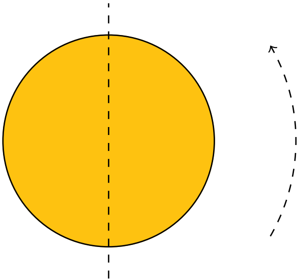


Понятие группы симметрии множества

Циклическая группа C_n — это группа симметрий «курносой звёздочки с n ручками».

Обобщённая группа диэдра D_∞ — это группа симметрий круга (она же — *ортогональная группа* O_2).





Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения $\mathcal{T}$ — это движение, которое переводит замощение $\mathcal{T}$ в себя.

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения $\mathcal{T}$ — это движение, которое переводит замощение $\mathcal{T}$ в себя.

Множество всех симметрий замощения $\mathcal{T}$ называется *группой симметрий* замощения $\mathcal{T}$.

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения $\mathcal{T}$ — это движение, которое переводит замощение $\mathcal{T}$ в себя.

Множество всех симметрий замощения $\mathcal{T}$ называется *группой симметрий* замощения $\mathcal{T}$.

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения $\mathcal{T}$ — это движение, которое переводит замощение $\mathcal{T}$ в себя.

Множество всех симметрий замощения $\mathcal{T}$ называется *группой симметрий* замощения $\mathcal{T}$.

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;
- 7 групп симметрии фризов, в них все параллельные переносы имеют одно и то же направление;

Понятие группы симметрии замощения

Симметрия замощения $\mathcal{T}$ — это движение, которое переводит замощение $\mathcal{T}$ в себя.

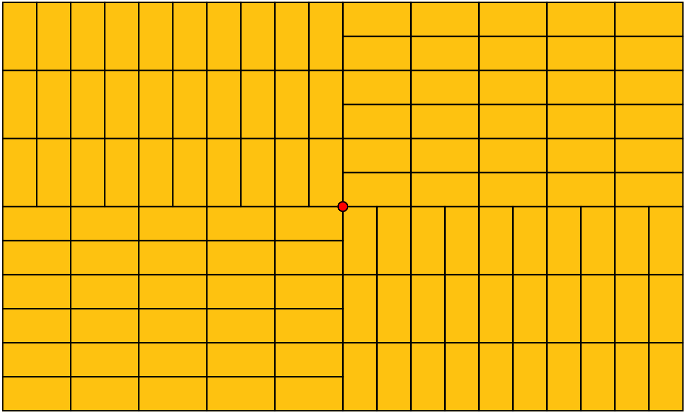
Множество всех симметрий замощения $\mathcal{T}$ называется *группой симметрий* замощения $\mathcal{T}$.

Группы симметрий бывают трёх видов:

- группы, не содержащие параллельных переносов;
- 7 групп симметрии фризов, в них все параллельные переносы имеют одно и то же направление;
- 17 групп симметрии орнаментов, в них входят параллельные переносы разных направлений.

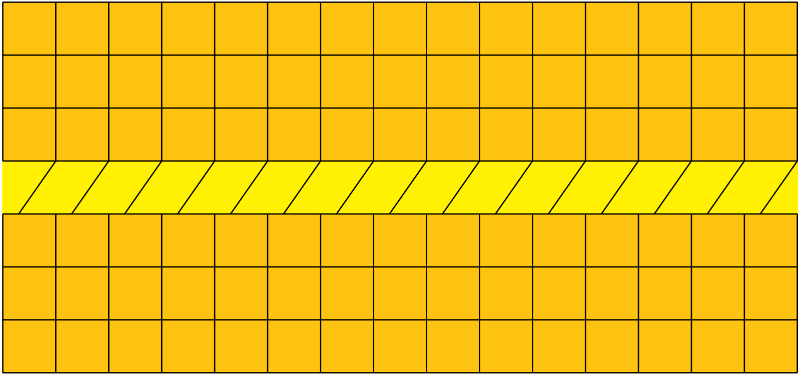
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии C_4.



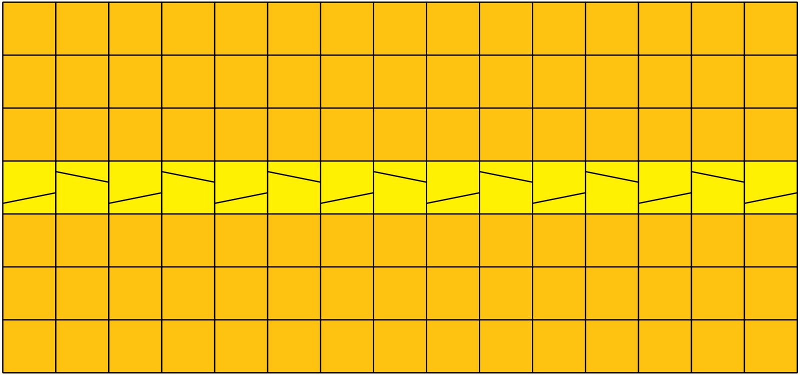
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p111$, содержащей только параллельный перенос.



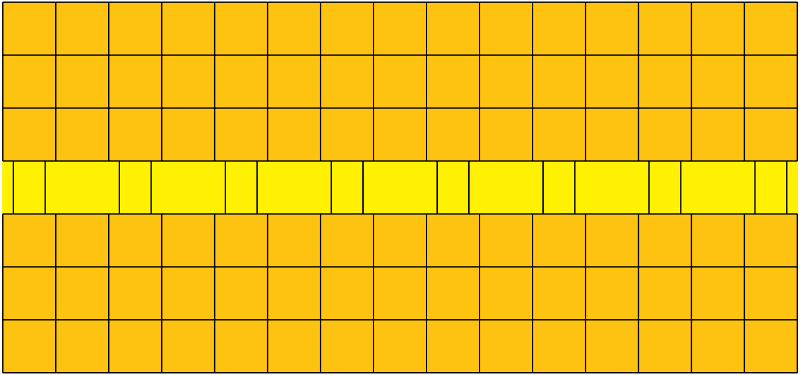
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p1a1$, содержащей параллельный перенос и скользящую симметрию.



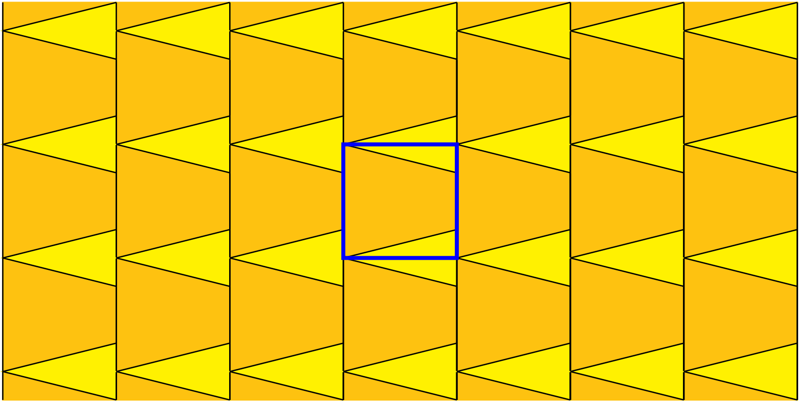
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии *pmm*2, содержащей параллельный перенос, повороты и осевую симметрию.



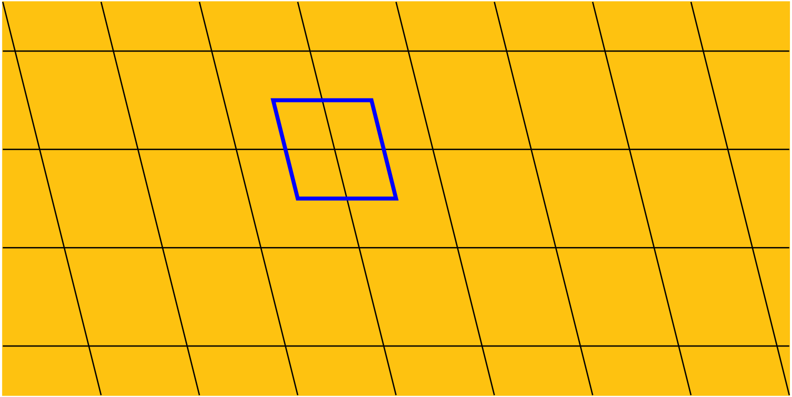
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии *pm*.



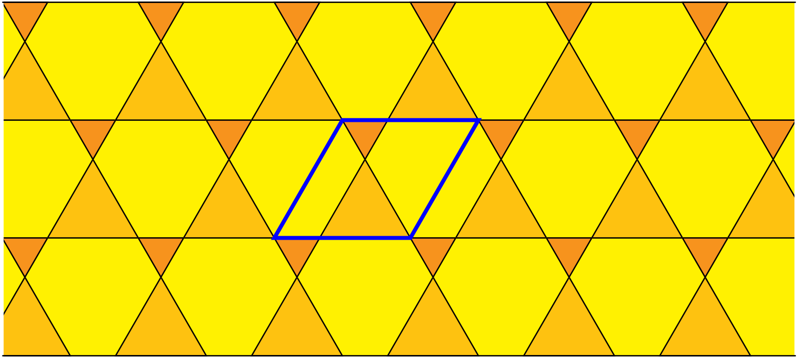
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p2$.



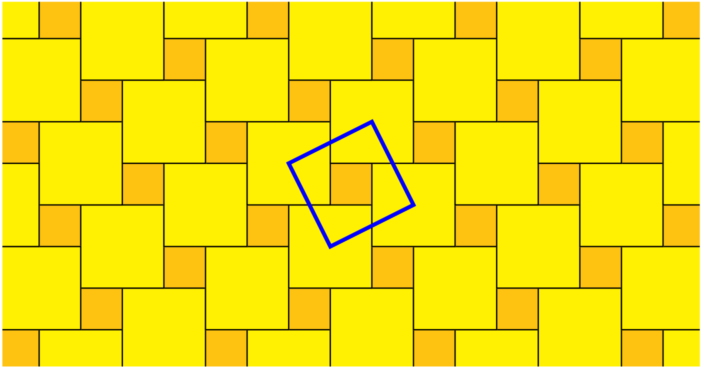
Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p3m1$.



Примеры групп симметрий

Замощение с группой симметрии $p4$.



Понятие периодического замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.

Понятие периодического замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.

Рассмотрим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, соответствующие двум несонаправленным параллельным переносам из группы симметрий замощения $\mathcal{T}$, порождают решётку на плоскости.

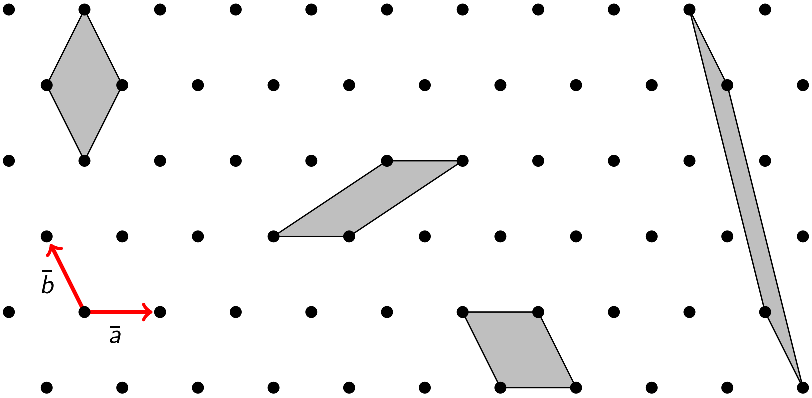
Понятие периодического замощения

Замощение $\mathcal{T}$ называется *периодическим*, если его группа симметрий содержит два несонаправленных параллельных переноса.

Рассмотрим векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, соответствующие двум несонаправленным параллельным переносам из группы симметрий замощения $\mathcal{T}$, порождают решётку на плоскости.

Любой параллелограмм, не содержащий внутри себя и на своей границе узлов решётки, отличных от вершин, называется *фундаментальным*.

Примеры фундаментальных параллелограммов



Формула Эйлера

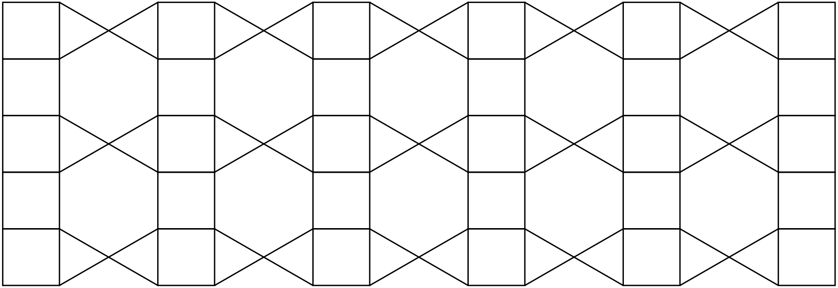
Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).

Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

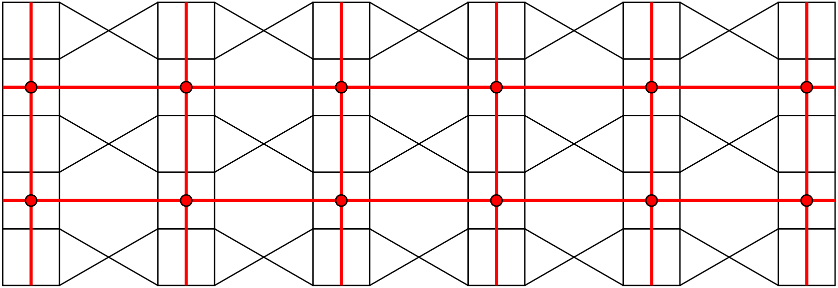
Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).



Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

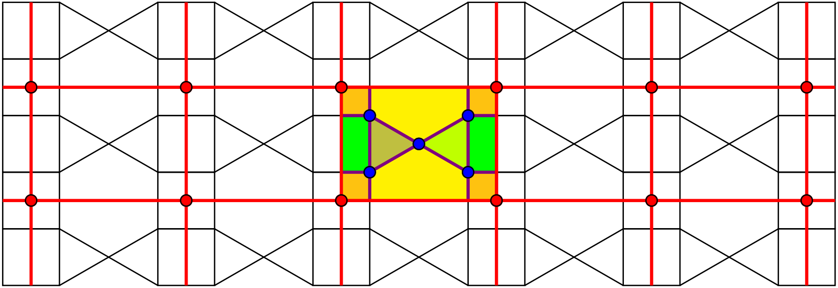
Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).



Формула Эйлера

Пусть внутри фундаментального параллелограмма:
V — число вершин, E — число рёбер, F — число плиток.

Тогда $V - E + F = 0$ (формула Эйлера).

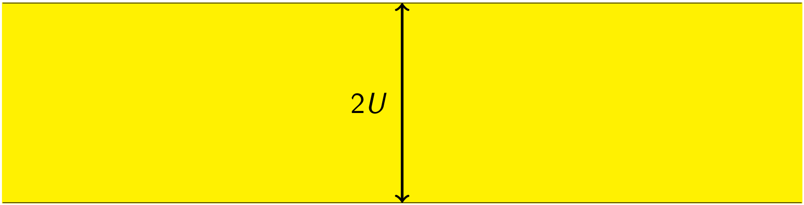


Теорема о периодичности для паркетов

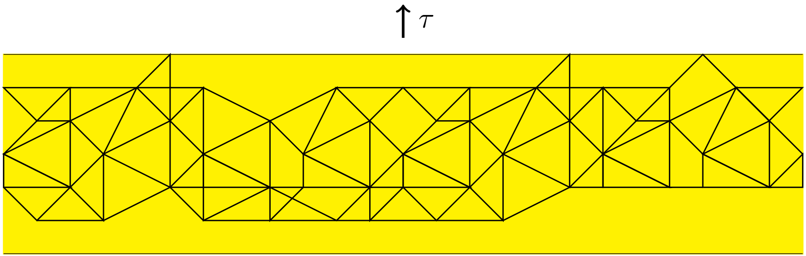
Теорема 2.

- Пусть на основе набора многоугольных протоплиток $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ можно построить паркет $\mathcal{T}$, группа симметрий которого содержит параллельный перенос. Тогда на основе этого же набора $\mathcal{M}$ можно построить периодический паркет.

Доказательство теоремы о периодичности

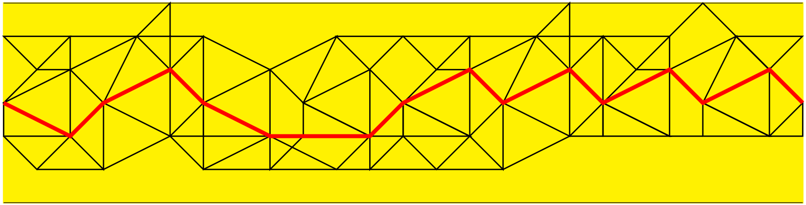


Доказательство теоремы о периодичности

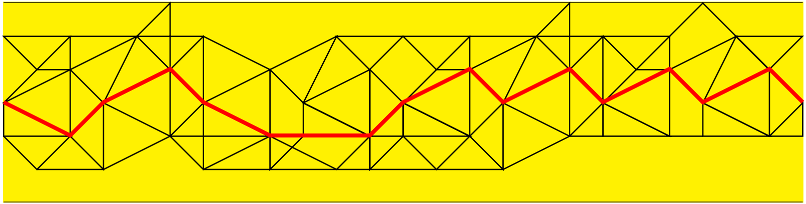


Доказательство теоремы о периодичности

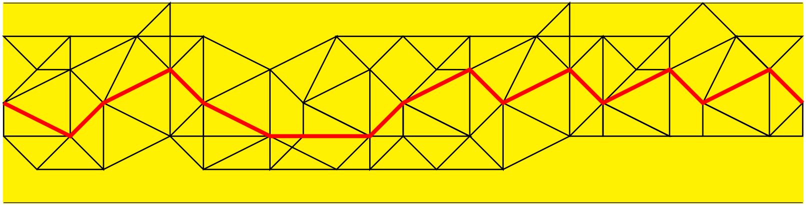
$\uparrow \tau$



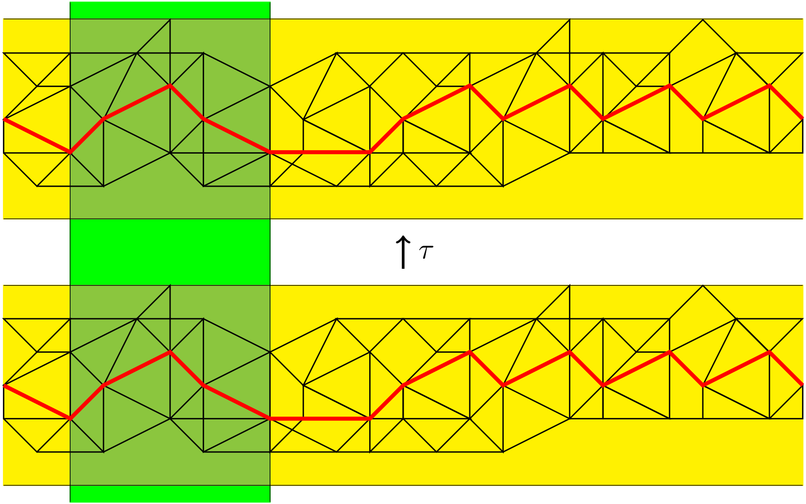
Доказательство теоремы о периодичности



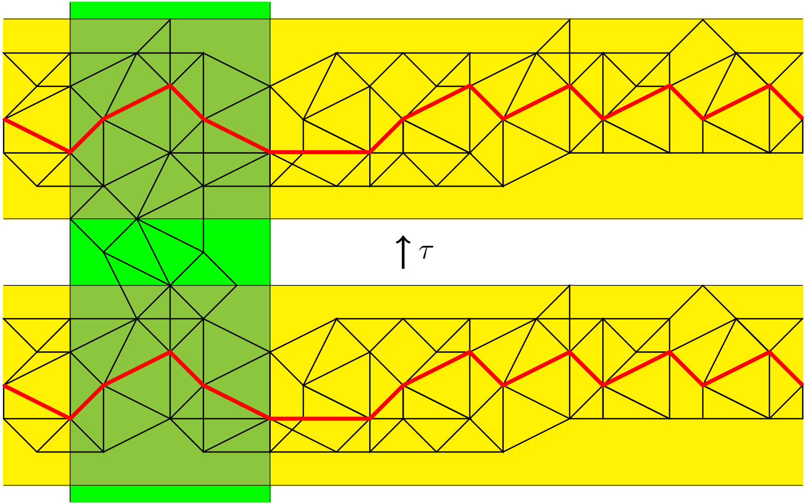
$\uparrow \tau$



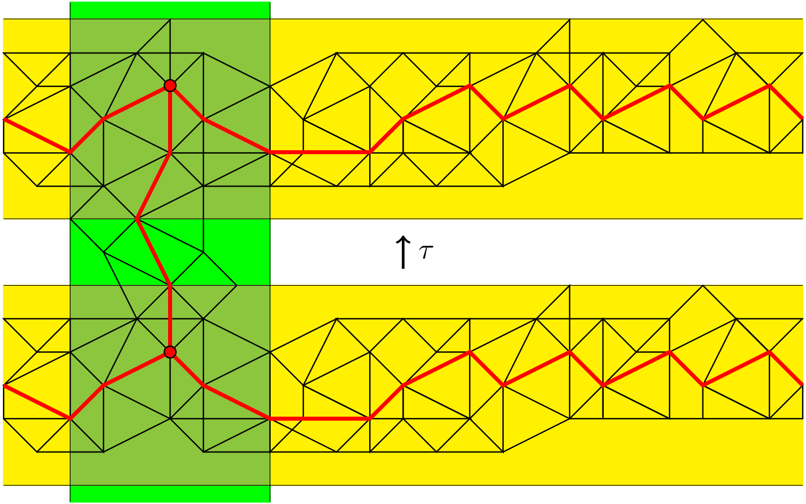
Доказательство теоремы о периодичности



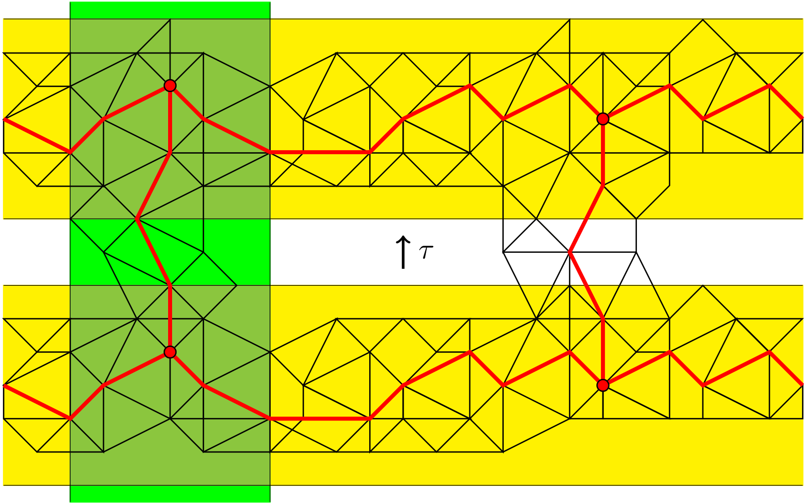
Доказательство теоремы о периодичности



Доказательство теоремы о периодичности

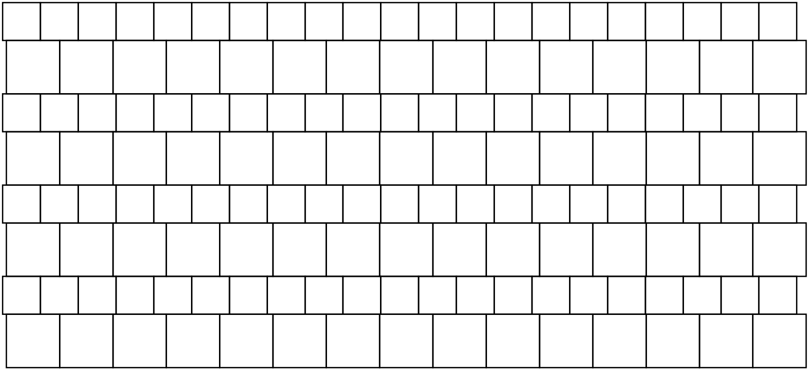


Доказательство теоремы о периодичности



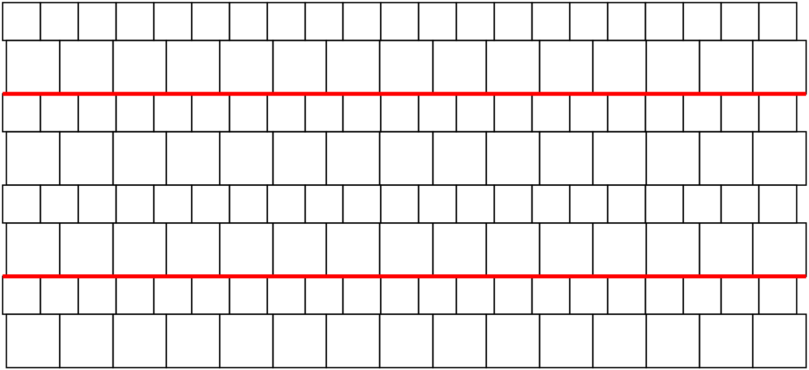
Замощение несоизмеримыми квадратами

Замощение, для которого не годится доказательство теоремы 1.



Замощение несоизмеримыми квадратами

Замощение, для которого не годится доказательство теоремы 1.



Теорема о периодичности для замощений

Теорема 2'.

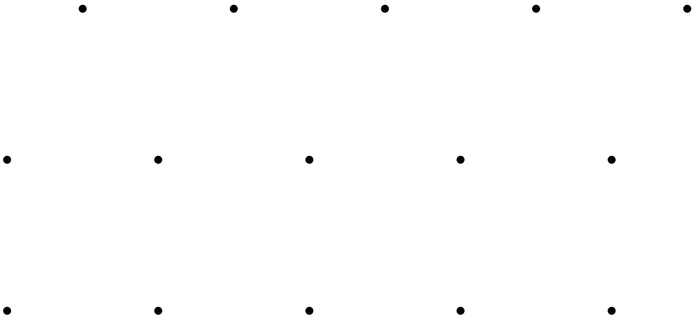
- Пусть на основе набора многоугольных протоплиток $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ можно построить замощение $\mathcal{T}$, группа симметрий которого содержит параллельный перенос. Тогда на основе этого же набора $\mathcal{M}$ можно построить периодическое замощение.

Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x, y) \leqslant d(x, z) \text{ для всех } z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.

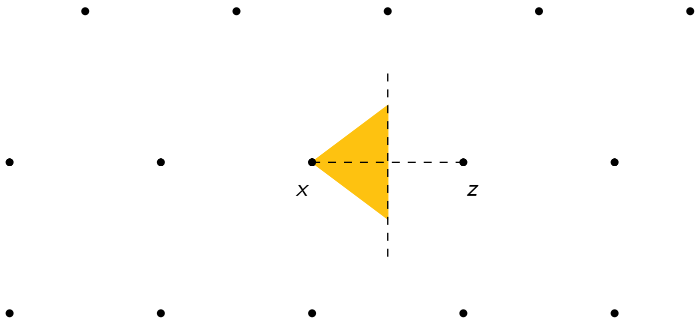
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z) \text{ для всех } z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



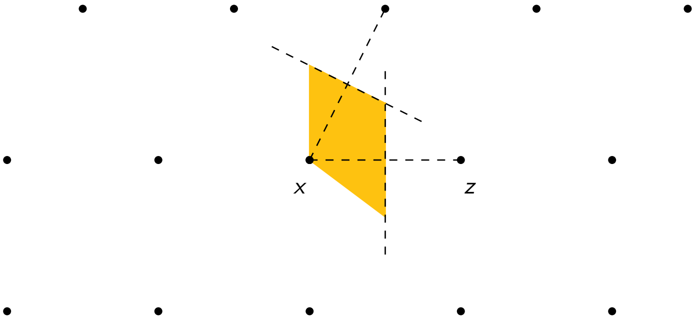
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x, y) \leqslant d(x, z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



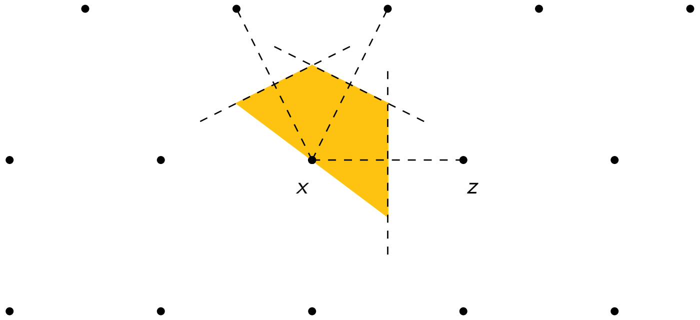
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z) \text{ для всех } z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



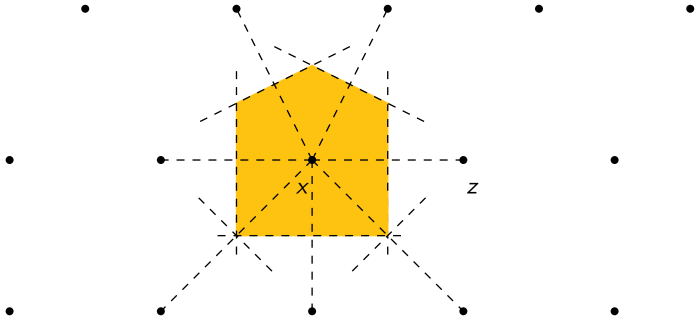
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z) \text{ для всех } z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.



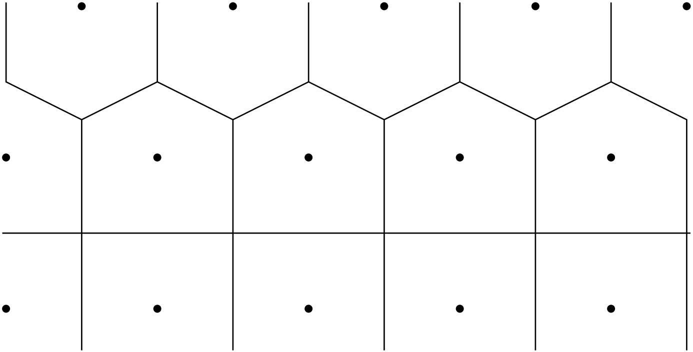
Понятие области Дирихле

Пусть дано дискретное множество точек X на плоскости, $x \in X$. Фигура $F_x = \{y \mid d(x,y) \leqslant d(x,z)$ для всех $z \in X\}$ называется *областью Дирихле*.

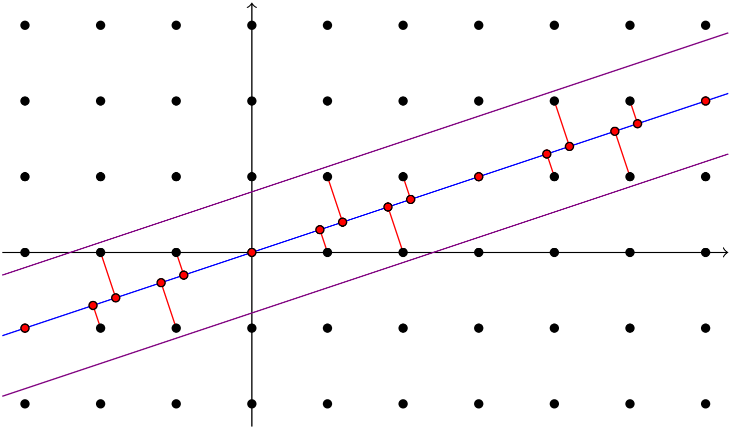


Понятие разбиения Вороного

Пусть дано дискретное множество точек на плоскости. *Разбиением (замощением) Вороного* называется замощение плоскости областями Дирихле.



Метод «слоёного пирога» (cut and project method)



Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

- Множество протоплиток разбиения конечно.

Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

- Множество протоплиток разбиения конечно.
- Параллельные переносы из группы симметрий для разбиения Вороного однозначно сопоставляются рациональным точкам на исходной плоскости.

Разбиение Вороного для слоёного пирога

Разбиение Вороного для «слоёного пирога» обладает следующими свойствами.

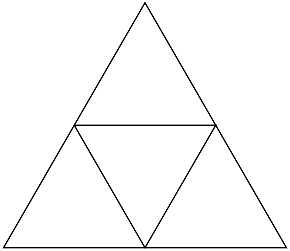
- Множество протоплиток разбиения конечно.
- Параллельные переносы из группы симметрий для разбиения Вороного однозначно сопоставляются рациональным точкам на исходной плоскости.
- В частности, если исходная плоскость не проходит ни через одну точку с рациональными координатами, за исключением начала координат (например, плоскость $x + y\sqrt{2} + z\sqrt{3}=0$), то получающееся замощение непериодично.

Понятие самоподобной фигуры

Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, ..., F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.

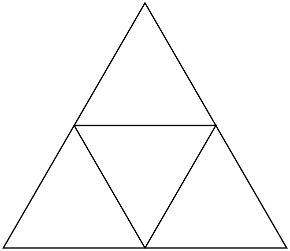
Понятие самоподобной фигуры

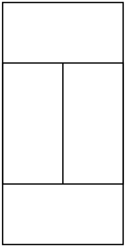
Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, ..., F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.



Понятие самоподобной фигуры

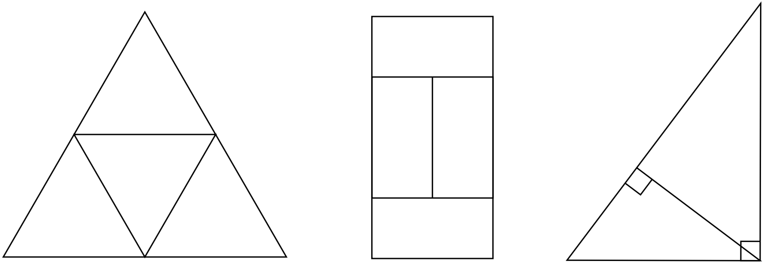
Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, …, F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.



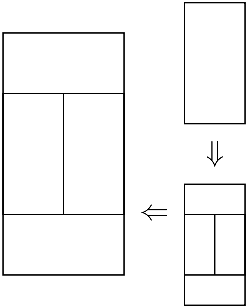


Понятие самоподобной фигуры

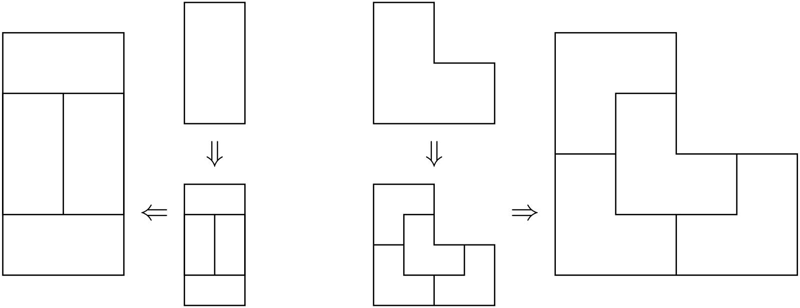
Фигура F называется *самоподобной*, если её можно разделить на несколько фигур F_1, F_2, ..., F_n, каждая из которых подобна исходной фигуре.



Процесс дефляции-инфляции



Процесс дефляции-инфляции



Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

- плитки этого замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;

Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

- плитки этого замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;
- плитки 2-го уровня могут быть объединены в плитки 3-го уровня, которые подобны плиткам 2-го уровня;

Понятие самоподобного замощения

Замощение называется *самоподобным*, если выполняются следующие условия:

- плитки этого замощения (плитки 1-го уровня) могут быть объединены в более крупные плитки (плитки 2-го уровня), которые подобны плиткам 1-го уровня;
- плитки 2-го уровня могут быть объединены в плитки 3-го уровня, которые подобны плиткам 2-го уровня;
- такое последовательное укрупнение возможно для любого k-го уровня.

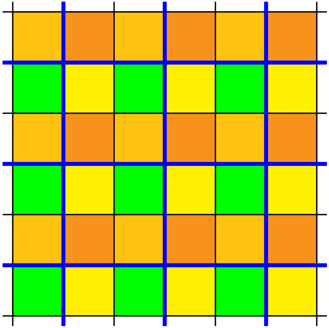
Уровни плиток замощения образуют *иерархию*, поэтому самоподобное замощение также называют *иерархическим*.

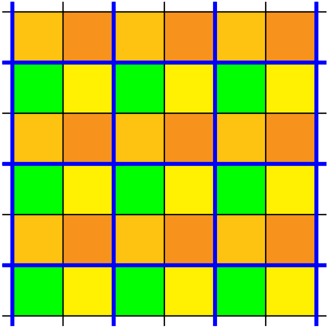
Замощения со слабой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *слабая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно несколькими способами.

Замощения со слабой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *слабая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно несколькими способами.



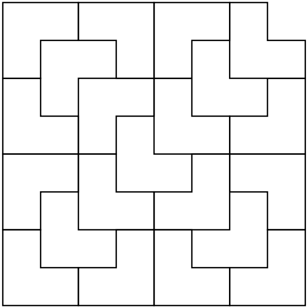


Замощения со строгой иерархией

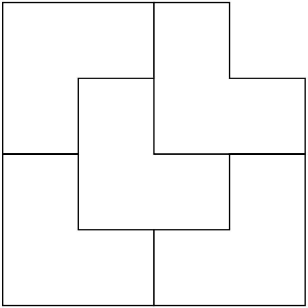
Иерархия самоподобного замощения — *строгая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно лишь одним способом.

Замощения со строгой иерархией

Иерархия самоподобного замощения — *строгая*, если объединение плиток k-го уровня в плитки $(k+1)$-го уровня возможно лишь одним способом.



$\Rightarrow$



Свойства самоподобных замощений

- Непериодичность: следует из того, что симметрия такого замощения должна быть симметрией замощения k-го уровня для любого натурального числа k.

Свойства самоподобных замощений

- Непериодичность: следует из того, что симметрия такого замощения должна быть симметрией замощения k-го уровня для любого натурального числа k.
- Каждый конечный фрагмент повторяется в любом таком замощении бесконечное число раз: потому что для достаточно большого числа k весь этот фрагмент содержится в некоторой плитке k-го уровня.

Свойства самоподобных замощений

- Непериодичность: следует из того, что симметрия такого замощения должна быть симметрией замощения k-го уровня для любого натурального числа k.
- Каждый конечный фрагмент повторяется в любом таком замощении бесконечное число раз: потому что для достаточно большого числа k весь этот фрагмент содержится в некоторой плитке k-го уровня.
- Различных самоподобных замощений, основанных на одном и том же разбиении, бесконечное количество (даже несчётное): следует из того, что, например, для фигуры «домино» каждому замощению можно сопоставить последовательность из чисел 1, 2, 3, 4.

Апериодические протомножества и замощения

Протомножество $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ называется *апериодическим*, если оно допускает только непериодические замощения (то есть параллельный перенос не входит в группу симметрий ни одного замощения плоскости копиями протоплиток из $\mathcal{M}$).

Апериодические протомножества и замощения

Протомножество $\mathcal{M} = \{T_1, T_2, \ldots, T_n\}$ называется *апериодическим*, если оно допускает только непериодические замощения (то есть параллельный перенос не входит в группу симметрий ни одного замощения плоскости копиями протоплиток из $\mathcal{M}$).

Любое замощение $\mathcal{T}$ с апериодическим протомножеством $\mathcal{M}$ также называется *апериодическим*.

История апериодических замощений

- В 1964 году Роберт Бергер привёл пример первого апериодического протомножества. Оно состояло из более, чем 20000 плиток.

История апериодических замощений

- В 1964 году Роберт Бергер привёл пример первого апериодического протомножества. Оно состояло из более, чем 20000 плиток.
- В 1968 году Дональд Кнут улучшил модификацию примера Бергера, получив апериодическое подмножество из 92 плиток.

История апериодических замощений

- В 1964 году Роберт Бергер привёл пример первого апериодического протомножества. Оно состояло из более, чем 20000 плиток.
- В 1968 году Дональд Кнут улучшил модификацию примера Бергера, получив апериодическое подмножество из 92 плиток.
- В 1971 году Рафаэль Робинсон построил апериодическое протомножество из 6 плиток.

История апериодических замощений

- В 1964 году Роберт Бергер привёл пример первого апериодического протомножества. Оно состояло из более, чем 20000 плиток.
- В 1968 году Дональд Кнут улучшил модификацию примера Бергера, получив апериодическое подмножество из 92 плиток.
- В 1971 году Рафаэль Робинсон построил апериодическое протомножество из 6 плиток.
- В 1974 году Роджер Пенроуз сократил количество плиток до 2.

Задача Конвея

Задача Конвея (Einstein problem): существует ли апериодическое протомножество, состоящее ровно из одной плитки?

Задача Конвея

Задача Конвея (Einstein problem): существует ли апериодическое протомножество, состоящее ровно из одной плитки?

Для аналогичного вопроса в пространстве ответ положительный. Пример доставляет бипризма Шмитта-Конвея-Данцера.

Задача Конвея

Задача Конвея (Einstein problem): существует ли апериодическое протомножество, состоящее ровно из одной плитки?

Для аналогичного вопроса в пространстве ответ положительный. Пример доставляет бипризма Шмитта-Конвея-Данцера.

На плоскости Лобачевского апериодическое протомножество из одной плитки также существует.

Литература I

- Коксетер Г.С.М.
  Введение в геометрию.
  Москва: Наука, 1966.
- Grünbaum Branco, Shephard G.C.
  Tilings and Patterns.
  New-York: W.H. Freeman and Company, 1986.
- Долбилин Н.
  Самоподобные мозаики
  Квант, 1998, N2, стр. 10-15.