# Полуправильные многоугольники на правильных паркетах

Х. Д. Нурлигареев

Московский Государственный Университет им. Ломоносова

IX Колмогоровские чтения
17-20 мая 2011

# Содержание

# Паркеты

- *Паркет* — любое покрытие плоскости правильными многоугольниками без пробелов и наложений, при котором любые два многоугольника имеют либо общую сторону, либо общую вершину, либо не пересекаются вовсе.
- *Базисные плитки паркета* — правильные многоугольники, составляющие паркет.
- *Узлы паркета* — вершины базисных плиток.
- *Тип узла* — порядок, в котором базисные плитки паркета встречаются при обходе данного узла против часовой стрелки.

# Правильные паркеты

- Паркет — *правильный*, если его можно наложить самого на себя так, чтобы любая заданная вершина совместилась с другой произвольной наперёд заданной вершиной.
- Все вершины правильного паркета имеют одинаковый тип. Он называется *типом правильного паркета*.

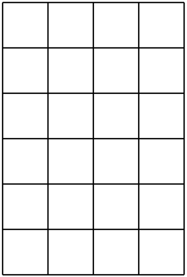
# Правильные паркеты

- Паркет — *правильный*, если его можно наложить самого на себя так, чтобы любая заданная вершина совместилась с другой произвольной наперёд заданной вершиной.
- Все вершины правильного паркета имеют одинаковый тип. Он называется *типом правильного паркета*.

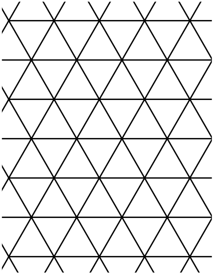
Существует ровно 11 различных типов правильных паркетов.

# Типы правильных паркетов

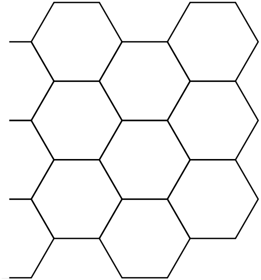
- Паркеты, составленные из базисных плиток одного вида.



(4)4



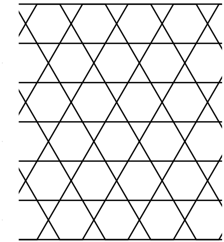
(6)3



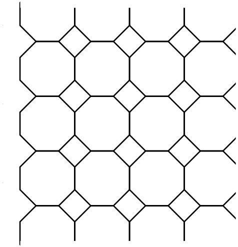
(3)6

# Типы правильных паркетов

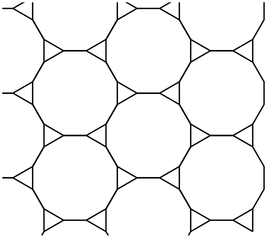
- Паркеты, составленные из базисных плиток двух видов.



$3, 6, 3, 6$



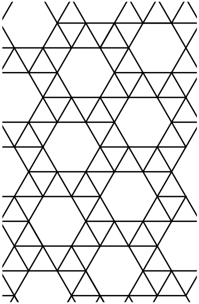
$4, 8, 8$



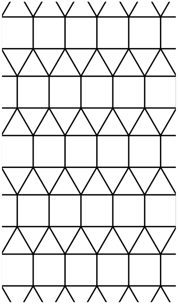
$3, 12, 12$

# Типы правильных паркетов

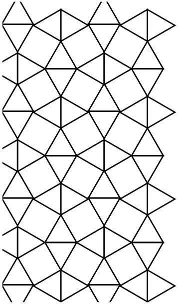
- Паркеты, составленные из базисных плиток двух видов.



(4)3, 6



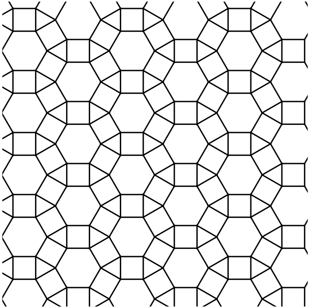
(3)3, (2)4



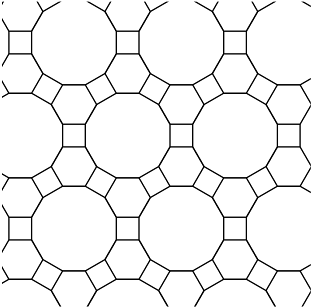
(2)3, 4, 3, 4

# Типы правильных паркетов

- Паркеты, составленные из базисных плиток трёх видов.



3, 4, 6, 4



4, 6, 12

# Полуправильные многоугольники

- Многоугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны между собой.
- Многоугольник называется *равноугольным*, если все его углы равны между собой.

# Полуправильные многоугольники

- Многоугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны между собой.
- Многоугольник называется *равноугольным*, если все его углы равны между собой.

- Будем говорить, что *многоугольник $F$ лежит на паркете $T$*, если каждая вершина многоугольника $F$ является узлом паркета $T$.

# Полуправильные многоугольники на паркете (4)4

- К середине XX века было доказано, что из правильных многоугольников на паркете (4)4 может быть расположен только квадрат ([3], [5] и [4]).
- В 1973 году Д. Болл показал, что равносторонний многоугольник может лежать на паркете (4)4 тогда и только тогда, когда количество его сторон чётно ([2]).
- В той же работе было доказано, что из равноугольных многоугольников на паркете (4)4 могут быть расположены лишь квадрат и восьмиугольник.

# Правильные многоугольники на паркетах

- В 2001 году десятиклассники И. Седошкин и Е. Мычка, продолжая тему, впервые рассмотренную на одном из геометрических кружков, которым руководил А.Н. Колмогоров, показали, что на каждом из правильных паркетов можно расположить только такие правильные многоугольники, которые "видны невооружённым глазом" (то есть базисные плитки и их простейшие комбинации).

# Формулировка основного вопроса

- Какие равносторонние многоугольники можно расположить на каждом из правильных паркетов?
- Какие равноугольные многоугольники можно расположить на каждом из правильных паркетов?

# Равносторонние многоугольники на паркетах.

- На паркетах (4)4 и 4,8,8 равносторонний многоугольник может лежать тогда и только тогда, когда количество его сторон чётно.
- На каждом из остальных паркетов можно расположить равносторонний многоугольник с произвольным числом сторон.

# Равносторонние многоугольники на паркетах.

- На паркетах (4)4 и 4,8,8 равносторонний многоугольник может лежать тогда и только тогда, когда количество его сторон чётно.
- На каждом из остальных паркетов можно расположить равносторонний многоугольник с произвольным числом сторон.
- (Следствие.) На решётке $\mathbb{Z}^3$ можно расположить равносторонний многоугольник с произвольным числом сторон.

# Равноугольные многоугольники на паркетах.

Для равноугольных многоугольников результат сведён в нижеследующие таблицы:

- | | | | |
  |---|---|---|---|
  | Тип паркета | (4)4 | 4,8,8 | (3)3,(2)4 |
  | Число сторон | 4,8 | 4,8,16 | 3,4,6,8 |

- | | | |
  |---|---|---|
  | Тип паркета | (6)3<br>(3)6<br>3,6,3,6<br>(4)3,6 | 3,12,12<br>(2)3,4,3,4<br>3,4,6,4<br>4,6,12 |
  | Число сторон | 3,4,6,12 | 3,4,6,8,12,24 |

# Случай равносторонних многоугольников

- Возможность расположения соответствующих равносторонних многоугольников на паркетах (4)4; 4,8,8; (2)3,4,3,4 и (6)3 доказывается конструктивно (строятся примеры).

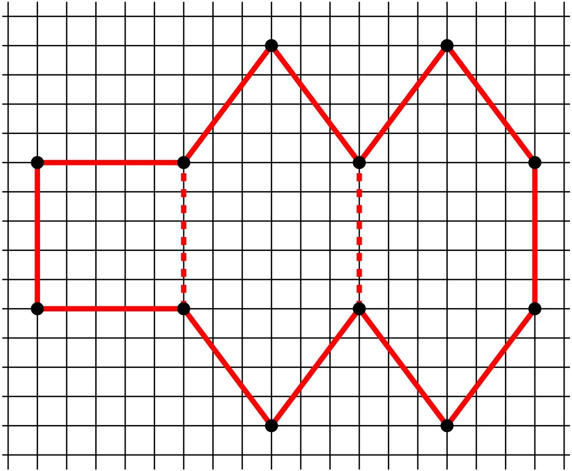
# Случай равносторонних многоугольников

- Возможность расположения соответствующих равносторонних многоугольников на паркетах (4)4; 4,8,8; (2)3,4,3,4 и (6)3 доказывается конструктивно (строятся примеры).
- Для каждого из остальных паркетов указывается подмножество узлов, являющееся одновременно множеством узлов паркета (6)3.

# Случай равносторонних многоугольников

- Возможность расположения соответствующих равносторонних многоугольников на паркетах (4)4; 4,8,8; (2)3,4,3,4 и (6)3 доказывается конструктивно (строятся примеры).
- Для каждого из остальных паркетов указывается подмножество узлов, являющееся одновременно множеством узлов паркета (6)3.
- Невозможность расположения равносторонних многоугольников с нечётным числом сторон на паркетах (4)4 и 4,8,8 доказывается простейшими методами теории чисел.

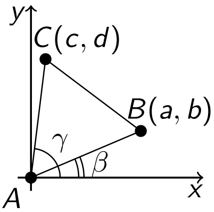
# Пример построения на паркете (4)4



# Случай равноугольных многоугольников

.

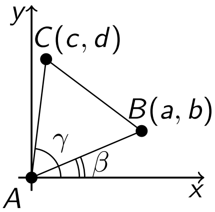
- Если координаты точек $A$, $B$ и $C$ равны $(0,0)$, $(a,b)$ и $(c,d)$, то тангенс угла $\angle BAC$ выражается формулой $\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}(\gamma-\beta) = \dfrac{ad-bc}{ac+bd}$.



# Случай равноугольных многоугольников

.

- Если координаты точек $A$, $B$ и $C$ равны $(0,0)$, $(a,b)$ и $(c,d)$, то тангенс угла $\angle BAC$ выражается формулой $\operatorname{tg}\angle BAC = \operatorname{tg}(\gamma-\beta) = \dfrac{ad-bc}{ac+bd}$.
- Внутренний угол равноугольного $n$-угольника равен $\frac{(n-2)\pi}{n}$; внешний угол равен $\frac{2\pi}{n}$.



# Рассмотрение тангенса угла $\frac{2\pi}{n}$

- Выбором подходящей системы координат можно добиться того, чтобы координаты всех узлов каждого из паркетов принадлежали одному из следующих четырёх множеств:
  - $\{p \mid p \in \mathbb{Q}\}$;
  - $\{q\sqrt{3} \mid q \in \mathbb{Q}\}$;
  - $\{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$;
  - $\{p + q\sqrt{3} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$.

# Рассмотрение тангенса угла $\frac{2\pi}{n}$

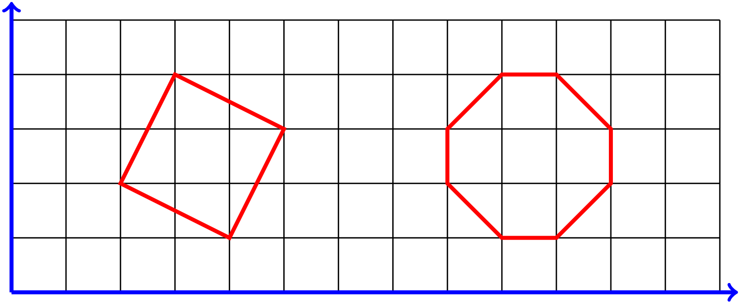
- Выбором подходящей системы координат можно добиться того, чтобы координаты всех узлов каждого из паркетов принадлежали одному из следующих четырёх множеств:
  - $\{p \mid p \in \mathbb{Q}\}$;
  - $\{q\sqrt{3} \mid q \in \mathbb{Q}\}$;
  - $\{p + q\sqrt{2} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$;
  - $\{p + q\sqrt{3} \mid p, q \in \mathbb{Q}\}$.
- Для каждого из этих множеств указывается, какие значения может принимать $n \in \mathbb{N}$, если $\operatorname{tg} \frac{2\pi}{n}$ принадлежит соответствующему множеству или не существует.

| Вид | $p$ | $q\sqrt{3}$ | $p+q\sqrt{2}$ | $p+q\sqrt{3}$ |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | 1,2,4,8 | 1,2,3,4,6,12 | 1,2,4,8,16 | 1,2,3,4,6,8,12,24 |

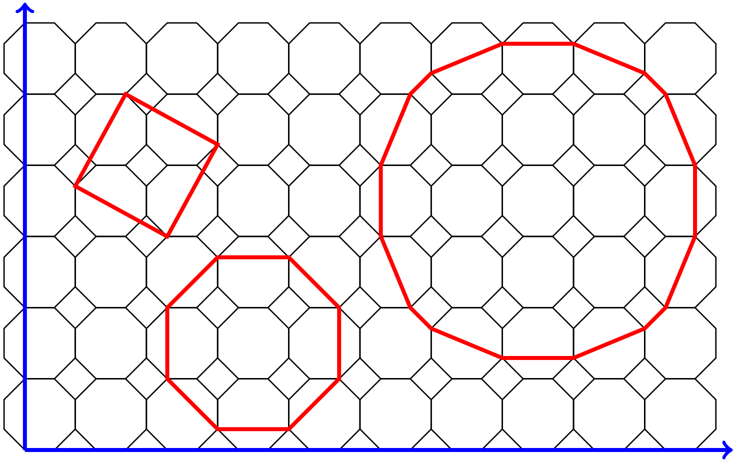
# Исключительный паркет (2)3,4,3,4

Почти для всех паркетов после проведённого исследования тангенсов углов вида $\frac{2\pi}{n}$ остаётся привести примеры соответствующих равноугольных многоугольников. Исключение составляет паркет (2)3,4,3,4. Выясняется, что на нём нельзя расположить также ни один равноугольный 12-угольник и 24-угольник. Доказательство этого факта рутинно и базируется на перечислении всех возможных расположений углов $\frac{2\pi}{12}$ и $\frac{2\pi}{24}$.

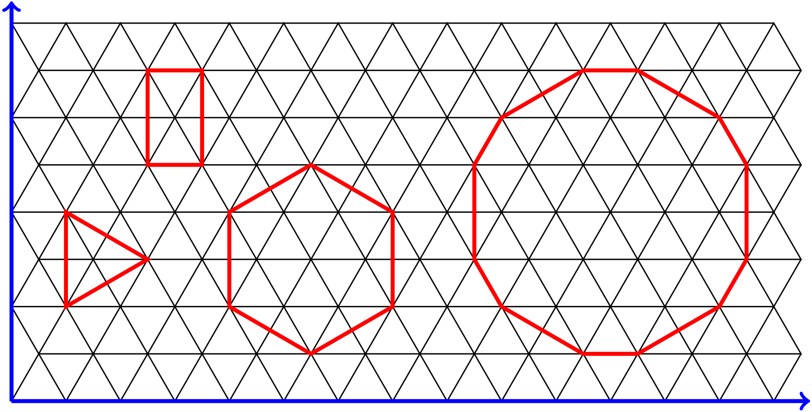
# Равноугольные многоугольники на паркете (4)4



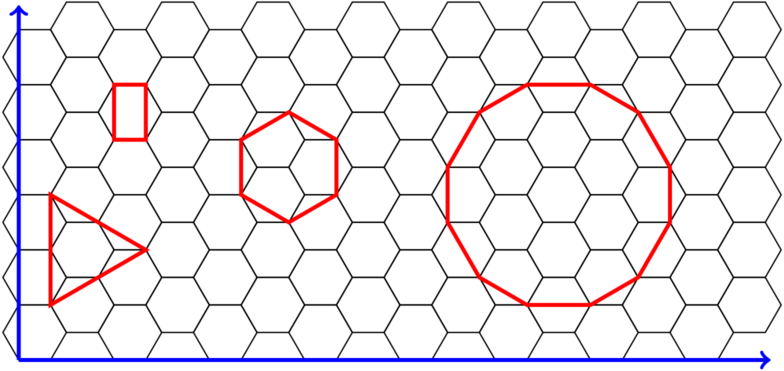
# Равноугольные многоугольники на паркете 4,8,8



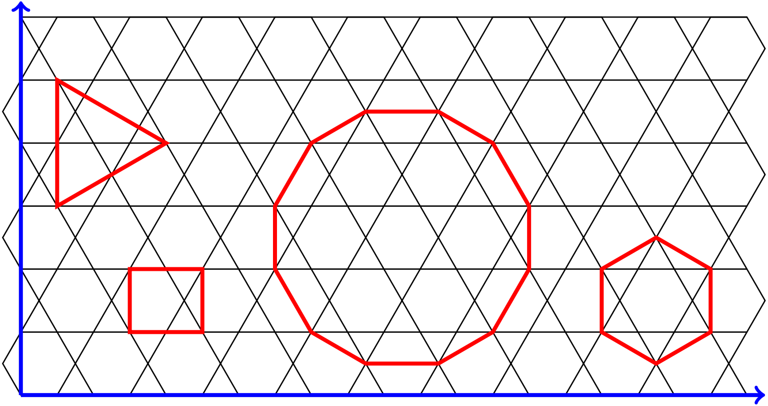
# Равноугольные многоугольники на паркете (6)3



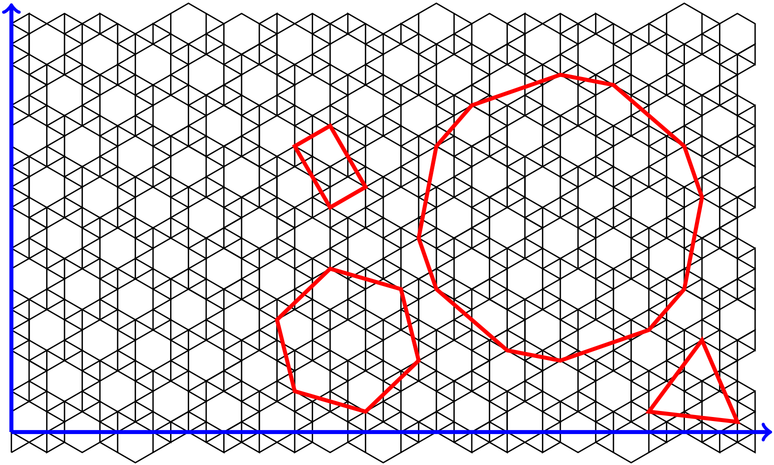
# Равноугольные многоугольники на паркете (3)6



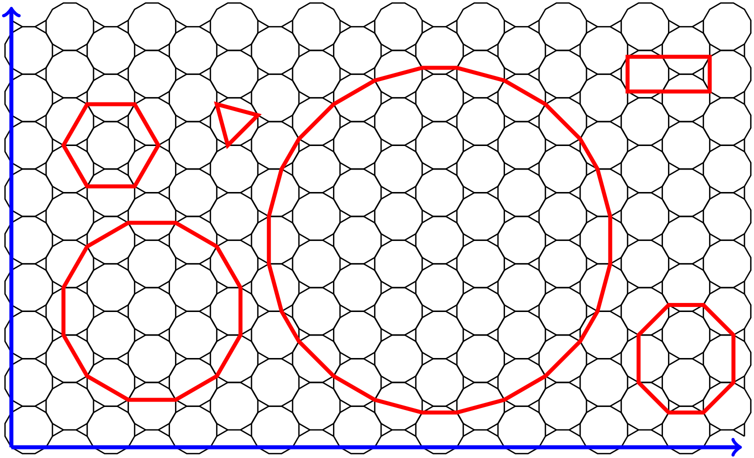
# Равноугольные многоугольники на паркете 3,6,3,6



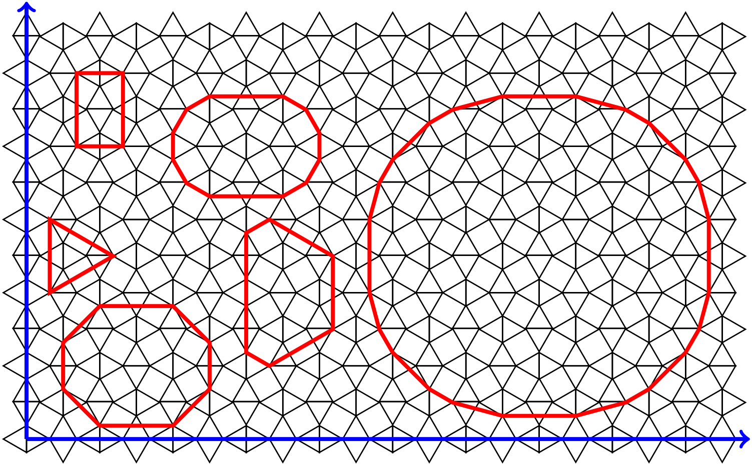
# Равноугольные многоугольники на паркете (4)3,6



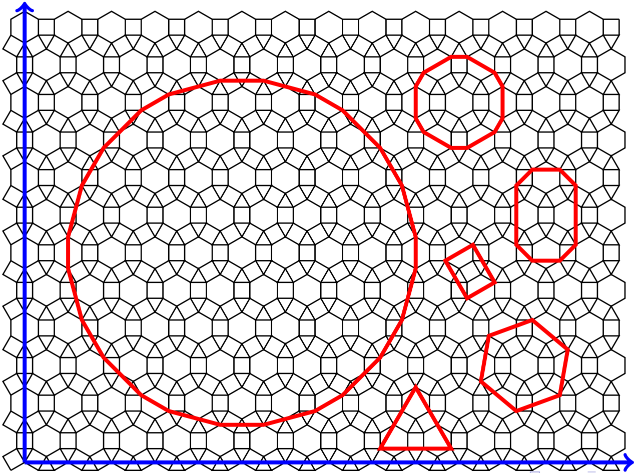
# Равноугольные многоугольники на паркете 3,12,12



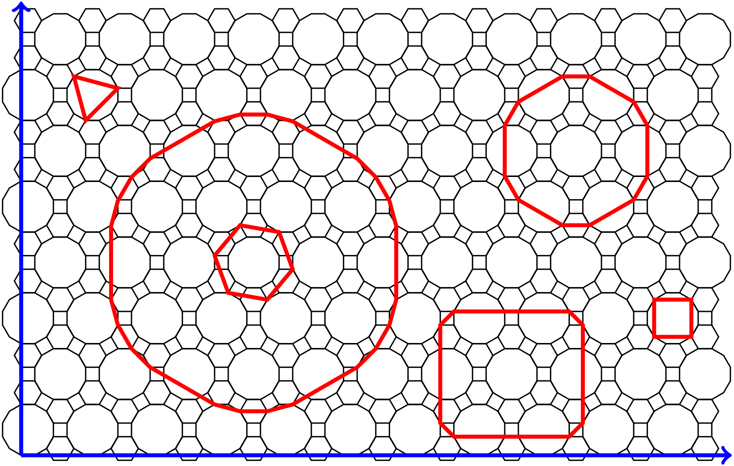
# Равноугольные многоугольники на паркете (2)3,4,3,4



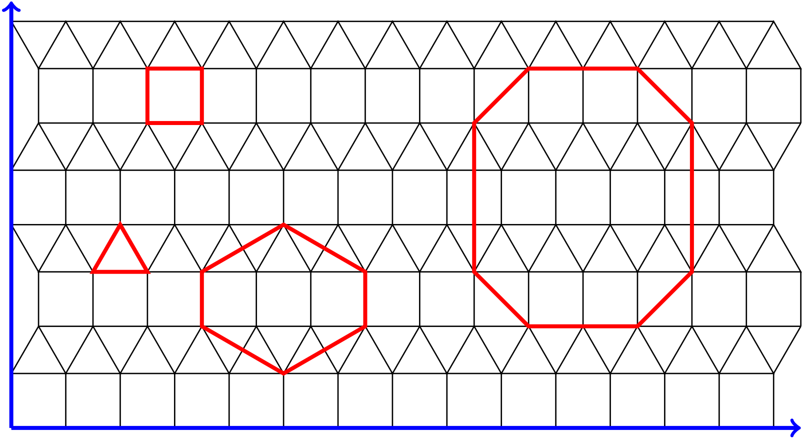
# Равноугольные многоугольники на паркете 3,4,6,4



# Равноугольные многоугольники на паркете 4,6,12



# Равноугольные многоугольники на паркете (3)3,(2)4



# Резюме

Автором впервые получен ответ на вопрос, какие равносторонние и равноугольные многоугольники можно расположить на каждом из правильных паркетов.

Представляются интересными также следующие вопросы, смежные с рассмотренными.

- Для каких натуральных $n$ на решётке $\mathbb{Z}^3$ можно расположить замкнутую равноугольную ломаную из $n$ звеньев?
- Какие полуправильные многоугольники можно расположить на плоскости так, чтобы все их вершины имели координаты из $\mathbb{Q}(\alpha)$ (здесь $\alpha$ — алгебраическое число)?

# Литература I


Вавилов В.В., Устинов А.В.
*Многоугольники на решётках.*
Москва, МЦНМО, 2006.

Ball D.G.
The constructibility of regular and equilateral polygons on square pinboard.
*Math. Gaz.*, V.57, P.119–122, 1973.

Lucas E.
Theoreme sur la geometrie des quinconces.
*Bull. Soc. Math. France*, V.6, P.9–10, 1878.

# Литература II


Scherrer W.
Die Einlagerung eines regularen Vielecks in ein Gitter.
*Elemente der Mathematik*, V.1, P.97–98, 1946.

Schenberg I.J.
Regular simplices and quadratic forms.
*J. London Math. Soc.*, V.12, P.48–55, 1937.