Докладчик

Хайдар Нурлигареев

Конференция

Колмогоровские чтения – VII

Место и время

ЯПГУ, Ярославль, 19 мая 2009

Тема

Дискретная геометрия в курсе математики школы им. А.Н. Колмогорова

Анонс (Тезисы)

Клетчатая бумага, под которой здесь и далее мы будем подразумевать множество всех точек плоскости с целыми координатами, является своеобразным мостом с интенсивным двусторонним движением, который дает возможность при решении чисто геометрических задач воспользоваться методами алгебры, теории чисел и математического анализа, и наоборот, задачи аналитического характера позволяет переводить на геометрический язык. Это замечательное наблюдение во многом объясняет несомненную актуальность вопросов, рассматриваемых в данной статье. Своими корнями они восходят ко временам Диофанта, и связаны с такими значительными именами, как Гаусс и Эйлер, но с методической точки зрения нас будут более других интересовать результаты, которых математикам удалось добиться лишь в 20-м веке.

В школе имени А.Н. Колмогорова Специализированного Учебно-Научно-го Центра МГУ имени М.В. Ломоносова тематика, связанная с задачами арифметики, алгебры и геометрии на клетчатой бумаге была апробирована довольно давно и с тех пор успешно преподается в старших классах в рамках курса геометрии. Та часть программы, которая является обязательной для изучения, включает в себя понятие решетки и основные ее свойства, изучение вопроса о правильных многоугольниках, координаты вершин которых являются целочисленными, а также формулу Пика для площади многоугольника на целочисленной решетке. Здесь мы приведем формулировки центральных теорем курса, знание которых развивает интерес к изучению математики и повышает уровень математической культуры учащихся.

Теорема 1. *Плоский правильный n-угольник при $n = 5$ и $n > 6$ нельзя расположить ни на одной решетке на плоскости и в пространстве.*

К вопросу о правильных фигурах мы возвращаемся в курсе стереометрии, где показывается, что все вершины куба, тетраэдра и октаэдра могут иметь целочисленные координаты в трехмерном пространстве, а все вершины икосаэдра и додекаэдра — нет.

Теорема 2. *При любом натуральном $q > 3$ число $\cos\frac{\pi}{q}$ иррационально. При любом натуральном $q \geqslant 3$ и $q \neq 6$ число $\sin\frac{\pi}{q}$ иррационально.*

Теорема 3 (Г. Пик, см. [1]). *Для площади $[P]$ простого многоугольника P на целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$ справедлива формула*

$$[P] = N_i + \frac{1}{2}N_e - 1,$$

где N_i — число узлов решетки, расположенных строго внутри многоугольника, а N_e — число узлов решетки, расположенных на его границе (включая все его вершины).

Приведем также примеры задач на эту тему, даваемых школьникам на занятиях в классе.

Задача 1. Бильярдный стол имеет форму правильного треугольника. Докажите, что если шар после удара прошел через некоторую точку семь раз, то он пройдет через нее еще хотя бы один раз.

Задача 2. Докажите, что если числа p и q взаимно просты и $\cos\frac{p\pi}{q}$ является рациональным числом, то число $\cos\frac{\pi}{q}$ также рационально.

Задача 3. Вершины треугольника являются узлами решетки $\mathbb{Z}^2$, и на его сторонах нет других узлов решетки. Докажите, что если такой треугольник содержит внутри себя ровно один узел решетки, то этот узел является точкой пересечения медиан данного треугольника.

Задача 4. Шахматный король обошел доску 8×8 клеток, побывав в каждом поле ровно один раз и последним ходом вернувшись на начальную позицию. Ломаная, соединяющая последовательно центры клеток, через которые проходил король, не имеет самопересечений. Какую площадь может ограничивать эта ломаная?

Задача 5. Середины сторон квадрата соединены отрезками со всеми вершинами квадрата; таким образом, квадрат оказывается разделенным восемью отрезками на двадцать треугольников и один восьмиугольник. Найдите отношение площади квадрата к площади восьмиугольника.

Задача 5 является наиболее показательной в методическом плане. Будучи сформулированной в совершенно независимых от понятия решетки терминах, она, тем не менее, может быть решена при помощи формулы Пика. Для того, чтобы ясно себе это представить, достаточно разбить исходный квадрат на 144 одинаковых квадратика и заметить, что все точки пересечения рассматриваемых в условии отрезков будут лежать в вершинах этих квадратиков. Та же формула Пика выдает решение задачи 4 в одну строчку: неожиданным образом выясняется, что площадь исследуемоей фигуры не зависит от траектории движения короля и равна 31.

Помимо обязательного обучения базовым знаниям постановка всей системы математического образования в школе имени А.Н. Колмогорова предполагает широкую сеть специальных курсов, семинаров и кружков, в работе которых учащиеся участвуют на добровольной основе. Программа подобных факультативов практически всегда содержит дополнительные главы к тем курсам, которые включены в учебный план школы. Так, программа специального курса «Задачи на клетчатой бумаге» включает в себя такие разделы, как окружности на решетках, диофантовы приближения, дискретные гармонические функции и многие другие. Стоит отметить, что часть задач, предлагаемых школьникам для собственных исследований, существенно выходит за рамки обычного школьного курса и представляет самостоятельный научный интерес.

Список литературы

[1] Pick G. Geometrisches zur Zahlenlehre. *Sitzungber. Lotos (Prague).* — 19: 311-319, 1899.

[2] Вавилов В.В., Устинов А.В. *Задачи на клетчатой бумаге.* Москва: Школа имени А.Н. Колмогорова, 2006.

[3] Вавилов В.В., Устинов А.В. *Многоугольники на решетках.* Москва: МЦНМО, 2006.