

ISSN 1992-6138

Математическое Образование

Журнал Фонда математического
образования и просвещения

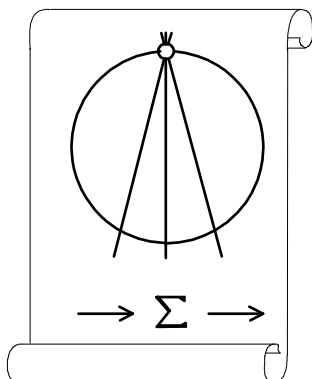
Год шестнадцатый

№ 1 (61)

январь-март 2012 г.

Москва

Периодическое издание в области математического образования



Издатель и учредитель: Фонд
математического образования и просвещения
117419 Москва, ул. Донская, д. 37

Главный редактор

Имайкин В.М.

Редакционная коллегия

Боңдал А.И.
Дубовицкая Н.В. (ответственный секретарь)
Дубовицкий А.В.
Комаров С.И.
Константинов Н.Н.
Костенко И.П.
Саблин А.И.

№ 1 (61), 2012 г.

© “Математическое образование”, составление, 2012 г.

Фонд математического образования и просвещения, Москва, 2012 г.
“Математическое образование”, периодическое издание.
Зарегистрировано в Роскомпечати РФ, лицензия № 015955 от 15.04.97.
Подписано к печати 30.03.2012 г.
Компьютерный набор и верстка, компьютерная графика: С. Кулешов.
Экспедиторы: Давыдов Д.А., Ермишкин И.А., Истомин Д.Н.
Отпечатано в типографии Академии внешней торговли, г. Москва, ул. Пудовкина, д.4.
Объем 4 п.л. Тираж 1000 экз. Цена свободная.

Математическое образование

Журнал Фонда математического образования и просвещения

№ 1 (61), январь – март 2012 г.

Содержание

Памятные даты	
<i>От редакции.</i> Два столетних юбилея	2
Современная математика	
<i>А. И. Бондал.</i> От алгебр к многообразиям	3
Учащимся и учителям средней школы	
<i>С. В. Дворянинов, З. Краутер.</i> Чем центр тяжести треугольника отличается от центра тяжести четырехугольника	10
<i>В. Б. Дроздов.</i> Малоизвестное свойство биссектрис треугольника	20
<i>Х. Д. Нурлигареев.</i> О многолистных правильных паркетах	23
<i>Е. В. Потоскуев.</i> В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач	30
Студентам и преподавателям математических специальностей	
<i>С. В. Шведенко.</i> Заметки по математическому анализу (продолжение)	41
Математический практикум	
<i>А. В. Жуков.</i> Экспериментальная математика	47
Библиография	
Математическая книга для младшеклассников	64
Информация	
<i>От редакции.</i> О деятельности ФМОП в 2011г.	66

Памятные даты

Два столетних юбилея

От редакции

В этом году исполняется 100 лет со дня первого Всероссийского съезда преподавателей математики, а также 100 лет первого выпуска журнала “Математическое образование”.

Всероссийский съезд преподавателей математики хорошо отражен в отечественной специальной литературе, см. [1] и цитированные там источники. В [1] читаем: “С 9 по 16 января 1912г. (н. ст.) в Санкт-Петербурге проходил I Всероссийский съезд преподавателей математики, собравший свыше 1200 делегатов со всей страны. Преподаватели средней и высшей школы обсуждали на своих заседаниях различные вопросы обучения математике, преимущественно в мужской средней школе. Среди наиболее актуальных вопросов были и профильная дифференциация школы, и введение в курс гимназии элементов аналитической геометрии и дифференциального и интегрального исчисления, и подготовка учителей математики и многое другое.

В числе проблем математического образования, обсуждавшихся на съезде, было немало таких, которые и сегодня, спустя сто лет, не менее актуальны.”

По результатам работы съезда в 1913г. были изданы Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики в двух томах, см. [2].

Из источников, не упомянутых в [1], отметим посвященную съезду брошюру Д. Мордухай-Болтовского [3], статью [4], а также книгу Н. В. Метельского [5], см. гл. 1, §2.

В настоящее время традицию проведения Всероссийских съездов учителей возрождает Московский Государственный университет, см. информацию на сайте teacher.msu.ru/teacher/congress

Так, Всероссийский съезд учителей математики состоялся 28-30 октября 2010г. Итогом работы съезда явилось создание Ассоциации учителей и преподавателей математики, см. math.teacher.msu.ru

а также издан сборник Тезисов докладов Всероссийского съезда учителей математики, см. teacher.msu.ru/teacher/math/thesis2010

Далее, в [1] сказано: “В январе 1012г. в Москве начал выходить журнал “Математическое образование” Московского математического кружка, которым руководил профессор Московского университета Б. К. Млодзеевский.” О Московском математическом кружке и о начале издания журнала более подробно будет рассказано в наших следующих выпусках. А в текущем выпуске мы постарались максимально широко представить область интересов современной серии журнала “Математическое образование”, выходящей с 1997г.

Литература

1. Р. Гушель, К столетию первого съезда преподавателей математики, Математика (методический журнал для учителей математики), №2(729), 2012г., с. 39-43.
2. Труды I Всероссийского съезда преподавателей математики. – Т. 1, Т. 2. – СПб., 1913.
3. Проф. Д. Мордухай-Болтовской, О первом всероссийском съезде преподавателей математики, Варшава, 1912.
4. Н. Н. Никитин, Съезды преподавателей математики в России, “Известия АПН СССР”, вып. VI, М., 1946.
5. Н. В. Метельский, Очерки истории методики математики, Минск: “Вышэйшая школа”, 1968, 340 с.

От алгебр к многообразиям

А. И. Бондал

Статья представляет читателям глубокую и плодотворную идею современной математики о рассмотрении различных алгебраических и геометрических структур и изучении их свойств с точки зрения категорий, в частности, производных категорий, введенных Александром Гротендиком.

Работа была напечатана на английском языке в журнале “IPMU News”, №14, июнь 2011г. Перевод на русский язык и настоящая публикация выполнены с разрешения автора и редакции указанного журнала.

Производные категории по Гротендику

Математики считают гомологическую алгебру одним из наиболее формальных разделов своей науки. Ее формальная строгость требует больших усилий, чтобы прорваться через основные определения, и отпугивает многих начинающих изучать предмет. Такой высокий уровень формальности теории создает впечатление, что это *ding an sich*¹, нечто недоступное пониманию непосвященного, и что попытки изучить теорию никогда не окупятся.

После того как Александр Гротендик, великий основатель современной гомологической алгебры, создавший понятие производной категории, оставил математическую сцену, где он десятилетиями занимал центральное место, в математическом сообществе широко распространилось мнение, что гомологическая теория достигла своих границ и стала бесполезной формальной теорией. Как ни парадоксально, подобные настроения были особенно сильны в тех странах, вроде Франции, где влияние идей Гротендика было особенно сильным. Когда я посетил университеты Париж 6/7 в начале нового столетия, то с удивлением обнаружил, что алгебраическая геометрия — раздел математики, в которой гомологические методы продемонстрировали свою исключительную полезность, — разделилась во Франции на два отдельных течения: были те, кто изучал геометрию классическими методами и не хотели ничего слышать о производных категориях, а также те, кто изучал очень формальные аспекты производных категорий и ничего не знал о классической геометрии многообразий, превосходно развитой итальянской школой в конце 19 – начале 20 вв. В обеих группах были очень яркие представители, но пересечение областей их исследований было на редкость скудным.

Возможно, одной из причин такого странного положения дел был побочный эффект великого достижения одного из лучших учеников Гротендика, Пьера Делиня, который применил сложную гомологическую алгебру для доказательства гипотез Вейля. Эти гипотезы, вероятно, более арифметической природы и не так сильно связаны с геометрией алгебраических многообразий в классическом смысле итальянской школы. Годами приложения производных категорий развивались скорее в отношении теоретико-числовых и топологических аспектов многообразий, а также, позднее, в теории представлений, чем в классической геометрии многообразий.

Ассоциативные алгебры

Проследим идею гомологической алгебры на примере категорий модулей над ассоциативной алгеброй. Когда математики начали изучать разнообразные математические структуры, допускающие операции вроде сложения и умножения, был выделен важный класс такого рода объектов, называемых ассоциативными кольцами. В общих чертах, требуется, чтобы сложение

¹Вещь в себе (нем.) — *Прим. перев.*

было ассоциативным и коммутативным, умножение — также ассоциативным, и чтобы умножение было дистрибутивным относительно сложения:

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= a + (b + c), \\ a + b &= b + a, \\ (ab)c &= a(bc), \\ (a + b)c &= ac + bc.\end{aligned}$$

Если добавить свойство, что каждый элемент можно умножать на скаляры, то ассоциативное кольцо становится ассоциативной алгеброй.

Могут спросить: почему эти условия на операции повсеместно встречаются в математике? Действительно, даже если начать с другой математической структуры, такой как, например, алгебра Ли, значительная часть такой теории, в частности, вся соответствующая гомологическая алгебра, может быть проинтерпретирована в терминах ее универсальной обертывающей алгебры, которая является ассоциативной алгеброй. Должен сказать, что ответ на этот вопрос, видимо, довольно трудно сформулировать, хотя сам вопрос очень важен.

Когда теория, особенно ее гомологические аспекты, достаточно развиты, возникает необходимость расширить определение ассоциативной алгебры и обобщить его до DG-алгебр, A_∞ -алгебр и т.д. Когда идет игра с различными определениями, особенно важно иметь четкое основание для базовых определений. Нынешнее состояние дел в гомологической алгебре все еще требует ясного понимания основ теории. Ассоциативность умножения по существу связана с тем фактом, что композиция отображений является ассоциативной операцией. Сложение и умножение на скаляры основываются на идее *линеаризации*, которая, видимо, происходит из формализации того “наблюдения”, что окружающее нас пространство (пространство-время) локально выглядит, как векторное пространство. Можно пуститься в спекуляции, что этот предмет напрямую связан с базовым принципом суперпозиции в квантовой механике, где линейность является краеугольным камнем. Потребность в DG-алгебрах и A_∞ -алгебрах — ясное указание на гомотопический характер основных алгебраических конструкций. Недавнее продвижение в теории типов наводит на мысль, что, возможно, и для логических оснований математики естественно иметь корни в гомотопической теории.

Гомологическая алгебра

Посмотрим, как математики пришли к идее гомологической алгебры. Сначала они заметили, что ассоциативные алгебры — сложные объекты. Чтобы понять почему это так, надо рассмотреть эти алгебры в их “социуме” — месте где они “живут, работают, общаются, играют в теннис”. Это место — категория алгебр, последнее означает, что ассоциативные алгебры рассматриваются вместе с их отображениями друг в друга (посредством которых алгебры “общаются”) — морфизмами алгебр, т.е. отображениями

$$f : A \rightarrow B,$$

сохраняющими сложение и умножение. С алгебрами было бы проще работать, если бы для любого такого отображения ядро (т.е. элементы алгебры A , которые отображаются в ноль), образ (т.е. элементы алгебры B , которые являются образами элементов из A), и фактор-алгебра по образу были бы объектами того же вида, что и сами алгебры. И ядро, и образ являются подалгебрами в A , соответственно, в B , но не всякая подалгебра может быть ядром морфизма, для этого она должна быть так называемым *идеалом*, т.е. подмножеством, выдерживающим умножение на любой элемент алгебры. Образ отображения тоже не обязательно является идеалом, что препятствует образованию фактор-алгебры алгебры B по образу. Это делает изучение алгебр сложной задачей.

Теперь вспомним, что ассоциативность происходит из композиции отображений. Это наводит на мысль представить элементы алгебры как отображения в некотором пространстве M .

Естественно предположить, что это пространство тоже имеет некоторые свойства линейности, такие как сложение и умножение на скаляры. Таким образом мы приходим к понятию модуля, или представления, над данной алгеброй.

“Социум” модулей над фиксированной алгеброй, т.е. категория модулей, устроена гораздо лучше, чем категория алгебр. Ядро и образ любого морфизма модулей над некоторой алгеброй, так же как и фактор по образу, снова являются модулями над той же самой алгеброй. Другими словами, категория модулей над фиксированной алгеброй является *абелевой*.

Обратив эту идеологию, разумно представлять, что сами алгебры важны только в том аспекте, который касается их категорий модулей. Это ведет к понятию *эквивалентности в смысле Мориты*. Две алгебры эквивалентны в смысле Мориты, если их категории модулей эквивалентны. Разумно принять точку зрения, что алгебры важны только в силу их категорий модулей. Фундаментальная идея теории категорий заключается в том, что необходимо рассматривать различные структуры, например, алгебры или модули над алгебрами, не как индивидуальные объекты, а скорее как членов “социумов”, т.е. подходящих категорий.

Теперь мы готовы перейти к основам гомологической алгебры. Рассмотрим подмодуль K модуля L . Мы знаем, что существует модуль M , который является фактором L по K . Мы можем считать, что L некоторым образом расщеплен или разложен на два простых куска, K и M .

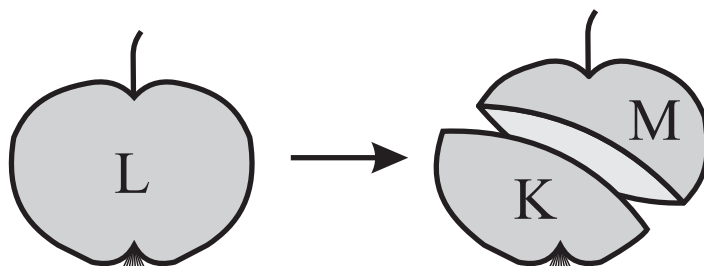


Рис. 1. Разложение модуля в подмодуль и фактор-модуль

Поскольку роли K и M , очевидно, различны, эта ситуация описывается словами “ L является расширением M посредством K ”. Как можно описать все такие расширения с фиксированными M и K ?

Основное наблюдение гомологической алгебры заключается в том, что все такие расширения нумеруются элементами некоторой аддитивной группы, более того, последняя допускает умножение на скаляры! Это было удивительное открытие, что можно суммировать два расширения с данными M и K и получить новое расширение с тем же самым свойством. Это как трюк фокусника: он берет два яблока, желтое и зеленое, разрезает каждое на два куска, большой и маленький, быстро перемешивает руками все куски, достает из них два новых куска — большой и маленький — красного яблока и, наконец, соединяет эти два куска и показывает новое целое красное яблоко.



Рис. 2. Сложение расширений

Замечательная идея производных категорий в том, что надо увеличить категорию модулей — сообщество, где живут модули — до включения в нее “потомков и предков”, так что расширения для данных M и K можно интерпретировать как морфизмы из M в первого потомка

К:

$$M \rightarrow K[1],$$

где $K[1]$ обозначает первого потомка K (“сына” K). Тогда странная операция суммирования расширений приобретает смысл сложения морфизмов, которое всегда существует в аддитивных категориях. Эта категория, включающая потомков исходной категории, была введена Александром Гротендиком, который окрестил ее *производной категорией*. Точное определение производной категории использует старые идеи сизигий, или, в современной терминологии, резольвент, которые восходят по крайней мере к британскому математику 19 века Артуру Кэли и великому немцу Давиду Гильберту.

Идея производных категорий на самом деле вполне универсальна и приложима ко многим другим математическим теориям — всегда, когда изучаемые объекты образуют абелеву категорию. Типичная психологическая проблема для исследователей заключается в том, что когда они изучают некоторую специальную область, например, комплексный анализ, с многими собственными техническими деталями и подходят к моменту, когда им надо применить гомологические методы, идея производных категорий выглядит настолько перпендикулярной их математическому опыту и сама так абстрактна и технически сложна, что требуется большое мужество, чтобы нырнуть в это “враждебное” море с надеждой достичь островка интересных приложений. У меня только один совет для начинающих исследователей: начинайте практиковаться плавать в этом море около берега, пока вы еще в детском саду!

Производные категории когерентных пучков

В алгебраической геометрии объекты вроде алгебраических многообразий в своем “социальном поведении” похожи на алгебры; они не образуют абелевой категории. Так что если мы хотим использовать гомологическую алгебру, нам надо найти аналог категории модулей. Это категория когерентных пучков над алгебраическим многообразием.

Посмотрим, что представляют собой эти пучки и как они естественным образом возникают из идеи *линеаризации*. Если мы рассмотрим гладкое многообразие X , которое является очень искривленным объектом, и посмотрим на него в окрестности некоторого гладкого подмногообразия Y , мы увидим, что многообразие хорошо приближается своей линеаризованной версией — нормальным расслоением. Теперь предположим, что многообразие не гладкое, в то время как подмногообразие гладкое, тогда аппроксимация представляет собой нечто похожее на “векторное расслоение со скачком размерности некоторых слоев”. Это формализуется понятием когерентного пучка. В качестве примера рассмотрим двумерный конус X и прямую Y на X , проходящую через центральную точку конуса. Слой нормального расслоения является прямой в каждой точке Y , кроме центральной точки, где слой является плоскостью — векторным пространством размерности 2.

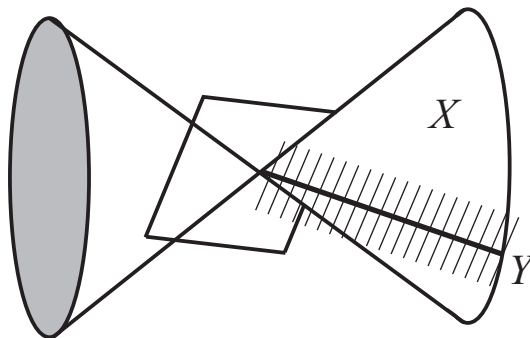


Рис. 3. Скачок размерности слоя нормального расслоения к Y в X .

Этот скачок размерности слоев когерентных пучков всегда расположен на подмногообразии, скажем, Y_1 , многообразия Y . Дальнейший, более высокого ранга скачок размерности слоев может произойти на подмногообразии многообразия Y_1 и т.д.

Может показаться удивительным, что в некотором смысле проще иметь дело с когерентными пучками, чем с векторными расслоениями. Они относительно “ручные” существа, потому что живут в хорошо организованном социуме — абелевой категории. Поэтому к ним можно применить всю технику производных категорий: включив “потомков” и “предков”, мы получим производную категорию когерентных пучков.

Идеи Гротендика о производных категориях были поставлены на твердую основу и значительно расширены многими из его учеников, в первую очередь, Жаном-Луи Вердьером. Важные формальные свойства ограниченных производных категорий когерентных пучков на многообразиях — наиболее подходящих для классической алгебраической геометрии категорий — были тщательно изучены в основном в работах Люка Иллюзи, но структура когерентных производных категорий алгебраических многообразий оставалась полностью непонятой, и их взаимосвязь с геометрией многообразий оставалась неизвестной в течение десятилетий.

Идеи Гротендика были контрабандой доставлены в Россию за железный занавес Юрием Ивановичем Маниным во время советской политической оттепели в эпоху Хрущева. Манин встречался с Гротендиком в 60-е годы и полностью осознал важность этих новых гомологических идей. Манин и его ученики и сотрудники в Москве использовали идею производных категорий и начали изучать производные категории когерентных пучков для некоторых алгебраических многообразий.

Ситуация в Москве была похожа на положение в Париже: семинар Манина изучал формальные, топологические и арифметические свойства алгебраических многообразий при помощи производных категорий, в то время как семинар Шафаревича и многие представители его школы, например, Андрей Тюрин, Василий Исковских и другие, работали над классической алгебраической геометрией в итальянском стиле. Они существовали параллельно, хотя разделение не было таким глубоким, как во Франции: достаточно напомнить выдающееся достижение в статье Атьи-Дринфельда-Хитчина-Манина по классической геометрии инстантонов, имеющее очевидный гомологический привкус. Стоит также отметить, что производные категории начали активно применяться в теории представлений. Одним из наиболее ярких достижений было доказательство в начале 80-х годов гипотезы Каждана-Люстига Бейлинсоном и Бернштейном, также независимо полученное Брылинским и Кашиварой. Но структура производных категорий когерентных пучков оставалась вне основного потока.

Существовала ясная концептуальная логика дискурса в исследовании производных категорий, а также очевидная глубина результатов изучения бирациональной геометрии и теории маломерных многообразий, хотя эти результаты выглядели очень разрозненными и трудными для усвоения, особенно для новичка, каковым я был в то время.

В какой-то момент я осознал, что к различным современным достижениям классической алгебраической геометрии можно было бы подойти при помощи производной категории когерентных пучков на алгебраическом многообразии, если рассмотреть категорию как инвариант многообразия. Немедленно возникли естественные вопросы. Как извлечь какую-либо информацию из этого инварианта? Можно ли восстановить обычные инварианты многообразий и векторных расслоений на них, такие как когомологии Ходжа и классы Черна? Можно ли восстановить само многообразие по его производной категории? Как производная категория преобразуется под действием различных геометрических операций, например, бирациональных преобразований?

Оказалось, что категории некоторых многообразий имеют своего рода базисы, называемые исключительными наборами, которые напоминают ортонормальные базисы в векторном пространстве со скалярным произведением. Хотя, обычно с не симметричным и не кососимметричным скалярным произведением, так что более подходящей аналогией будет полуортонормальность. Элементы полуортонормального базиса упорядочены. Если поменять порядок и применить процесс полуортонормализации, напоминающий ортогонализацию Грамма-Шмидта, то мы быстро приходим к действию группы кос на множестве базисов. Это отражает глубокую связь производных категорий с гомотопической теорией.

Проблема извлечения какой-либо информации из производной категории, если рассматри-

вать ее как абстрактную триангулированную категорию, связана с тем фактом, что морфизмы в этой категории не имеют ядер и коядер, что обычно бывает в абелевых категориях. Полезный инструмент был открыт совместно с Михаилом Капрановым. Это оказался функтор Серра, категориальное воплощение канонического класса алгебраического многообразия. С его помощью мне удалось восстановить столбцы ромбика Ходжа по производной категории, а также характер Черна. Было поистине удивительно видеть, что выведенные инварианты оказались столбцами, а не строками ромба Ходжа, поскольку имелось стандартное “знание”, что важное значение имеют строки, они отвечают за сингулярные гомологии многообразия. К тому времени появилась гипотеза зеркальной симметрии, о том что строки и столбцы трехмерных многообразий Калаби-Яу переходят друг в друга при симметрии. Я выдвинул гипотезу, что производные категории должны играть центральную роль в зеркальной симметрии. Позже это было сформулировано в более точной форме в “Гомологической зеркальной симметрии” Максима Концевича, который предложил соотносить производные категории комплексного многообразия с категориями Фукайи симплектического многообразия по другую сторону зеркала.

Совместно с Дмитрием Орловым мы доказали, что многообразие можно восстановить по производной категории при условии, что многообразие имеет достаточно обильный канонический или анти-канонический класс. С другой стороны, примеры производных эквивалентностей уже были известны из работ Шигеру Мукайи для поверхностей КЗ и абелевых многообразий. Мы обнаружили, что производные категории хорошо себя ведут под действием некоторого специального бирационального преобразования из программы минимальной модели Шигефуми Мори. Мы предположили, что они эквивалентны под действием так называемых преобразований типа флоп, при этом флопы должны индуцировать строго полные функторы между производными категориями. Это открыло программе новые перспективы, в интерпретации, что именно производные категории должны в определенном смысле хорошо минимизироваться. В пользу этой гипотезы имеются результаты Тома Бриджеленда, Юджири Каваматы и других, но до доказательства все еще далеко.

Когда мы рассматриваем производную категорию как первичный инвариант алгебраического многообразия, мы естественно приходим к вопросу, какие категорные свойства выделяют класс производных категорий когерентных пучков на гладких алгебраических многообразиях. Некоторые хорошие свойства таких категорий были найдены сравнительно быстро в сотрудничестве с Михаилом Капрановым и, позже, с Мишелем Ван дер Бергом. Эти свойства относятся также к алгебраическим пространствам — небольшому расширению класса алгебраических многообразий. Бертран Тоен и Мишель Вакье доказали красивую теорему, что если производная категория любого комплексного многообразия удовлетворяет этим свойствам, то многообразие должно быть алгебраическим пространством.

С другой стороны, было совершенно ясно с самого начала, что нет легко формулируемого свойства абстрактной категории, которое бы выделяло класс производных категорий когерентных пучков. В начале 90-х мне пришла идея, что следует рассматривать все категории, удовлетворяющие вышеупомянутым хорошим свойствам, но не являющиеся производными категориями геометрических объектов, как категорные образы некоммутативных многообразий. Несмотря на ряд результатов в этом направлении, таких как классификация некоммутативных проективных плоскостей в совместной работе с Александром Полецуком (вдохновленной более ранней работой Артина, Тэйта и Ван ден Берга) и работы Ван ден Берга, Стаффорда и других по некоммутативным раздутиям, мы все еще очень далеки от всеобъемлющей геометрии этих некоммутативных категорных многообразий, по сравнению с результатами в коммутативном случае. Лучшее понимание инвариантов категорий, аналогично когомологиям Ходжа для коммутативных многообразий, безусловно помогло бы этому направлению.

Глядя вперед, представляется разумным рассматривать категорию всех гладких алгебраических многообразий с вполне точными функторами в качестве морфизмов между ними, а также по возможности разумные небольшие расширения как классов объектов, так и морфизмов, и стараться понять структуру этого “социума” средствами гомотопической теории. Обь-

екты производных категорий когерентных пучков могут интерпретироваться как граничные условия для В-моделей в топологической теории струн. Таким образом, правильное понимание этой структуры могло бы пролить свет на ландшафт возможных компактификаций струнного пространства-времени.

*Бондал Алексей Игоревич,
ведущий научный сотрудник отдела алгебры
МИАН им. В. А. Стеклова РАН,
Principal Investigator, IPMU,
директор Института фундаментальных наук (ИФН),
доктор физ.-мат. наук.*

E-mail: bondal@mi.ras.ru

*Перевод с английского:
Имайкин В.М., под редакцией автора.*

Чем центр тяжести треугольника отличается от центра тяжести четырехугольника

С. В. Дворянинов, З. Краутер

В статье показано, как находятся центры масс треугольника и четырехугольника при различных вариантах распределения масс по этим фигурам.

Рассмотрим три треугольника с вершинами A, B, C . У первого треугольника в его вершинах находятся одинаковые массы m . Масса второго равномерно распределена по его поверхности. Это означает, что масса любой части треугольника вычисляется по формуле $M = p \cdot S$ где S — площадь этой части, постоянный коэффициент p — поверхностная плотность. Таков, например, треугольник, вырезанный из картона. Масса третьего равномерно распределена вдоль его сторон (примером служит треугольник, сделанный из проволоки).

Каждый из этих трех треугольников имеет замечательную точку — центр тяжести. Обозначим эти точки $\Pi_{\text{верш}}$, $\Pi_{\text{плоч}}$, $\Pi_{\text{стор}}$ соответственно. Первая и вторая из этих точек обязательно совпадают. А будут ли соответствующие точки совпадать для четырехугольника? Об этом рассказано в статье.

Закон Архимеда

В математике понятие точки относится к основным неопределяемым понятиям. Это абстрактное понятие. В физике геометрическая точка превращается в материальную точку — каждой такой точке приписывается значение находящейся в ней массы. Это тоже идеальное абстрактное понятие. В действительности всякая масса распространена в пространстве, т.е. мы имеем дело с материальными телами (карандаш, крышка от кастрюли, хоккейная шайба...). При расчетах мы можем полагать, что карандаш — это материальный отрезок, а крышка — это круг, не имеющий толщины. Подобная идеализация обычно упрощает расчеты. Каждое материальное тело имеет особую точку — центр тяжести.

Центр тяжести тела — это точка, через которую проходит линия действия равнодействующей сил веса всех частиц тела при любой ориентации тела.

Если точка опоры (или точка подвеса) совпадает с центром тяжести тела, то тело находится в равновесии. Так, круг, вырезанный из картона, можно подпереть в центре или же подвесить на нити. В этом случае равновесие легко наблюдать. Если же центр тяжести находится внутри тела и не достижим, то для получения равновесия опора должна располагаться на вертикальной прямой, проходящей через центр тяжести.

Рассмотрим простейший случай — две материальные точки, связанные невесомым стержнем (рис. 1). Можно представлять себе гантель из двух тяжелых свинцовых шаров, укрепленных на легком стержне, например, сделанном из алюминия. Положение центра тяжести определяется согласно закону Архимеда, или закону рычага:

$$P \cdot x = Q \cdot y.$$

Если точку опоры стержня поместить в точке S , то стержень будет находиться в равновесии. Условие равновесия можно записать по-другому:

$$x : y = Q : P,$$

— центр тяжести делит отрезок AB в отношении, обратном отношению масс, находящихся в этих точках. В частности, центр тяжести однородного материального стержня, например тонкого стального прутка, находится в середине стержня.

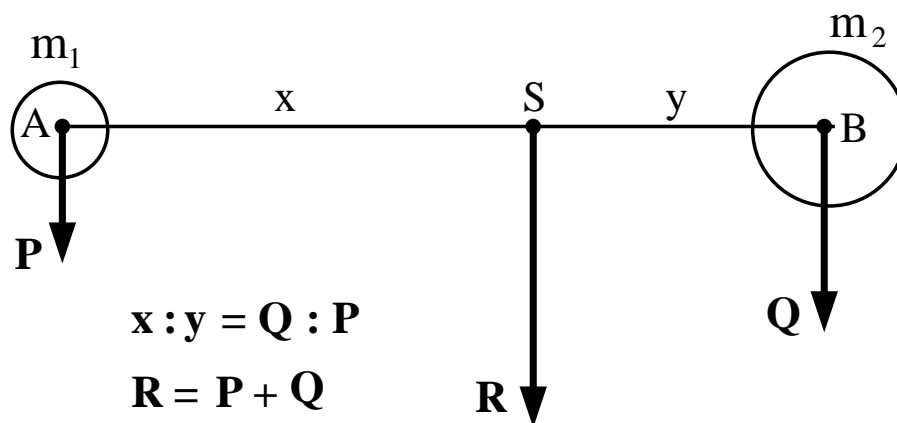


Рис. 1.

Треугольник, трехсторонник, трехвершинник

В математике слово “треугольник” обозначает и часть плоскости, и фигуру, составленную из трех отрезков. Мы сейчас будем рассматривать материальные фигуры, имеющие массу, и для удобства будем говорить о треугольнике, трехстороннике и трехвершиннике. В первом случае масса треугольника равномерно распределена по части плоскости (рис. 2), во втором случае масса равномерно распределена по трем отрезкам, в третьем случае в каждой из трех точек находится масса m .



Рис. 2.

Центр тяжести трехвершинника $\Pi_{\text{верш}}$

Пусть каждая из трех точек A , B и C является материальной и ее масса равна m (рис. 3). Две точки A и B заменим серединой стороны AB с массой $2m$ - точкой C_1 . Рассматривая теперь две материальные точки C и C_1 с массами m и $2m$ соответственно, заключаем, что их центр тяжести S лежит на отрезке CC_1 (то есть на медиане треугольника) и делит этот отрезок в отношении $2 : 1$, считая от вершины C . Но из курса геометрии известно, что такая точка S является точкой пересечения медиан треугольника.

Вывод: центр тяжести трехвершинника $\Pi_{\text{верш}}$ лежит в точке пересечения медиан соответствующего треугольника.

Центр тяжести треугольника $\Pi_{\text{плоч}}$

Рассмотрим треугольник ABC , масса которого равномерно распределена по его поверхности.

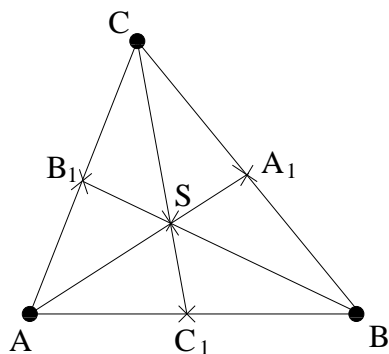


Рис. 3.

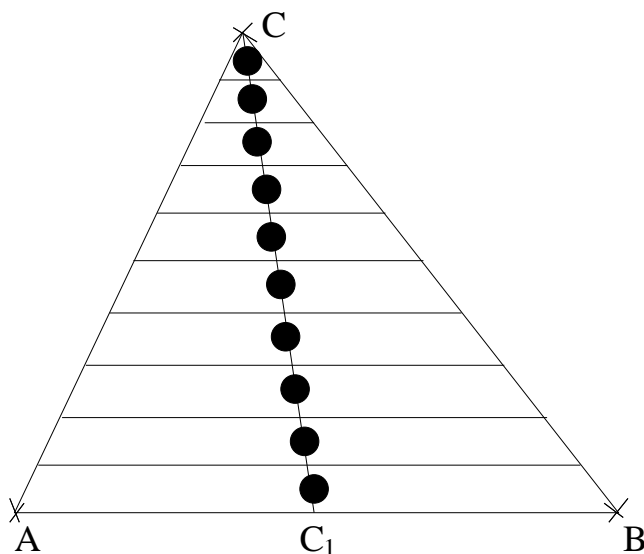


Рис. 4.

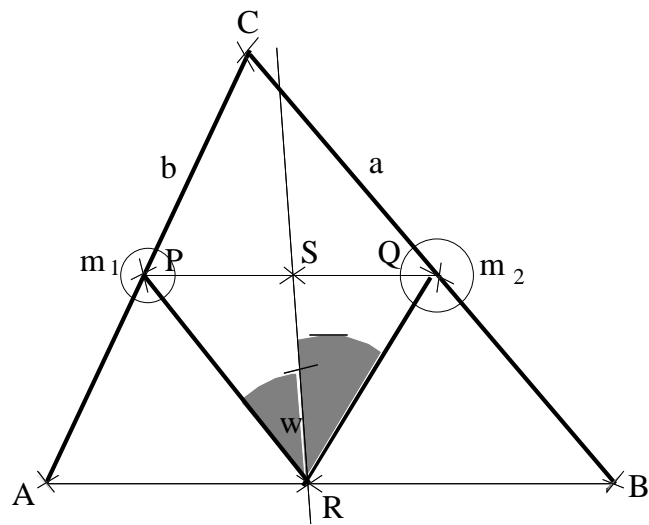
Рассмотрим одну сторону такого треугольника (например, AB) и вообразим, что этот треугольник состоит из бесконечного количества отрезков, параллельных этой стороне, рис. 4. Легко понять, что центр тяжести каждого такого отрезка совпадает с его серединой и что все эти середины лежат на медиане AC_1 треугольника. Отсюда следует, что центр тяжести всех отрезков (то есть центр тяжести треугольника) также лежит на медиане AC_1 . Такие рассуждения можно провести для каждой стороны треугольника, и всякий раз центр тяжести $\Pi_{\text{плоч}}$ будет лежать на ответствующей медиане. Известно из геометрии, что все медианы треугольника пересекаются в одной точке. Следовательно, центр тяжести треугольника $\Pi_{\text{плоч}}$ совпадает с точкой пересечения его медиан.

Итак, точки $\Pi_{\text{верш}}$ и $\Pi_{\text{плоч}}$ для треугольника всегда совпадают с точкой пересечения медиан, поэтому точку пересечения медиан называют центром тяжести треугольника.

Задача. На тонком вертикальном столбике в положении равновесия находится треугольный лист фанеры. Нарушится ли равновесие, если на каждую вершину этого треугольника одновременно прилетят три одинаковых воробья?

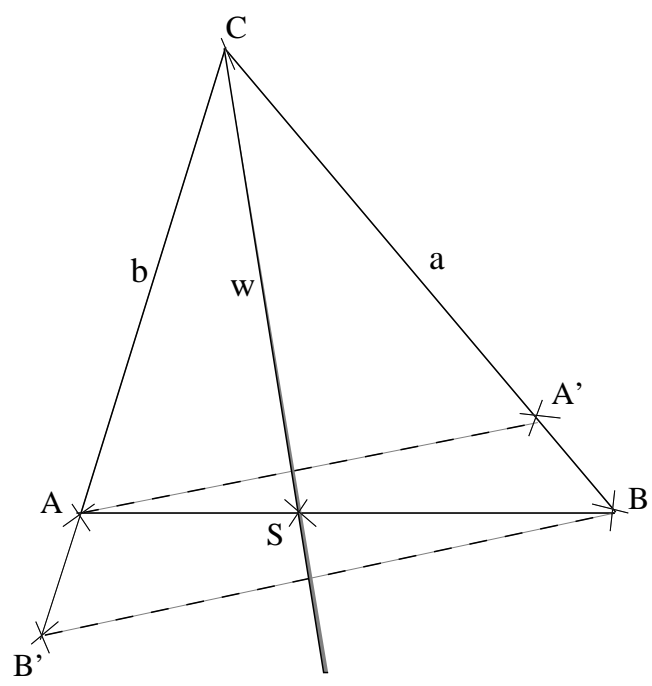
Центр тяжести двухсторонника

Изучим теперь центр тяжести двух однородных жестко связанных стержней. Назовем такую систему двухсторонником (рис. 5). Двухсторонник получится, если прямолинейный кусок проволоки согнуть под произвольным углом.



1

Рис. 5.



$$AA' : BB' = b : a$$

$$AS : SB = AA' : BB' = b : a$$

Рис. 6.

Массы сторон двухсторонника пропорциональны длинам сторон: $m_1 : m_2 = b : a$ Вследствие однородности, центр тяжести каждой стороны двухсторонника лежит в ее середине — в точках P и Q. Следовательно, центр тяжести двухсторонника делит отрезок PQ в отношении $a : b$,

считая от точки P . Такую точку легко построить. Рассмотрим треугольник, образованный средними линиями соответствующего треугольника ABC . Биссектриса угла QRP делит сторону PQ пропорционально сторонам треугольника PQR :

$$PS : SQ = PR : QR = \frac{a}{2} : \frac{b}{2} = a : b.$$

Итак, точка S делит отрезок PQ в требуемом отношении, и потому является центром тяжести угольника.

Сейчас мы использовали свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника. Это важная теорема планиметрии. Приведем ее доказательство, отличное от того, которое обычно излагается в школе.

Теорема. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону угла на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.

Доказательство. Отразим треугольник ABC симметрично относительно биссектрисы w угла C (рис. 6). Отрезки AA' и BB' параллельны друг к другу, так как оба перпендикулярны прямой w . Из подобия треугольников ACA' и $B'CB$ следует равенство

$$AA' : B'B = b : a.$$

Из подобия треугольников ASA' и $B'SB$ следует равенство

$$AS : SB = AA' : B'B.$$

Следовательно, $AS : SB = b : a$, что и требовалось доказать.

Центр тяжести трехсторонника $\Pi_{\text{стор}}$

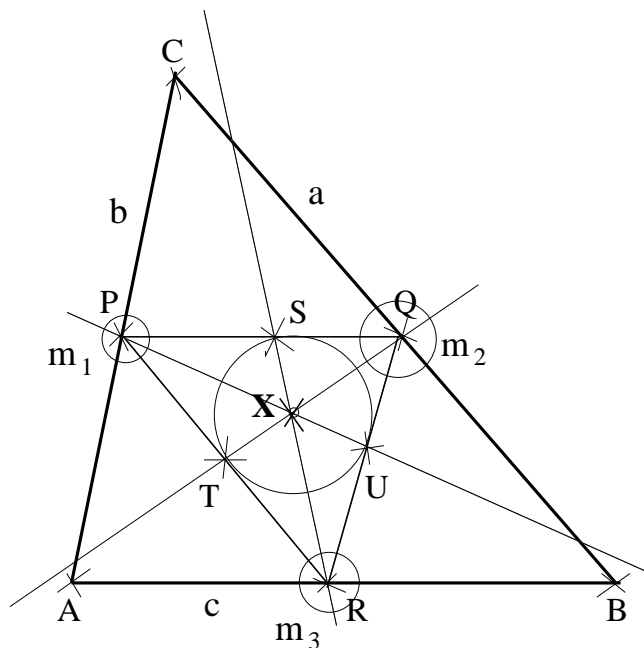


Рис. 7.

Рассмотрим трехсторонник ABC (рис. 7). Сторону AB можно заменить материальной точкой R — серединой стороны AB — с массой m_2 . Две другие стороны заменяются материальной

точкой S , лежащей на биссектрисе угла треугольника PQR , образованного средними линиями исходного треугольника. Следовательно, центр тяжести трехсторонника ABC лежит на этой биссектрисе.

Но в треугольнике PQR биссектрисы трех его углов совершенно равноправны! Значит, искомый центр тяжести лежит и на второй, и на третьей его биссектрисах.

Вывод: центр тяжести $\Pi_{\text{стор}}$ трехсторонника ABC — это точка пересечения биссектрис треугольника, который образован средними линиями треугольника ABC . Другими словами, это центр окружности, вписанной в треугольник, образованный средними линиями.

Иногда все три точки $\Pi_{\text{верш}}$, $\Pi_{\text{плоч}}$, $\Pi_{\text{стор}}$ совпадают. Так бывает, очевидно, для правильного треугольника, у которого равны все три стороны. В общем случае такого совпадения нет. Для доказательства последнего утверждения достаточно привести пример. Рассмотрим “длинный и узкий” равнобедренный треугольник, у которого боковые стороны равны 3 м, основание равно 1 см. Если при этом масса распределена по сторонам, то такой треугольник практически является отрезком, и его центр тяжести $\Pi_{\text{стор}}$ лежит на оси симметрии треугольника вблизи середины этого отрезка. Ясно, что точка $\Pi_{\text{стор}}$ делит самую длинную медиану треугольника примерно пополам. Это отношение весьма далеко от отношения 2:1, и, следовательно, в этом случае точка $\Pi_{\text{стор}}$ не совпадает с точкой пересечения медиан.

Задача для исследования. В каком случае центр тяжести трехсторонника совпадает с центром тяжести соответствующего треугольника?

Центр тяжести четырехвершинника и некоторые геометрические следствия

Рассмотрим четыре материальные точки одинаковой массы m (рис. 8). Прийти к центру тяжести этой системы точек можно разными путями.

Путь первый. Заменим пару точек A и B точкой T — серединой стороны AB , пару точек C и D — точкой V , серединой стороны CD . Ясно, что центр тяжести точек T и V — это середина отрезка TV . Итак, центр тяжести S четырехвершинника лежит в середине отрезка, соединяющего середины противоположных сторон четырехугольника.

Но мы можем рассматривать другие пары точек — A и D , B и C , — и получить ту же самую точку S .

Отсюда следует, что два отрезка, соединяющих середины противоположных сторон четырехугольника точкой пересечения S делятся пополам.

Отсюда в свою очередь вытекает, что четырехугольник $TUVW$ с вершинами в серединах сторон четырехугольника является параллелограммом.

Путь второй. Будем группировать точки парами по-другому. Центр тяжести точек A и C лежит на середине X диагонали AC . Центр тяжести точек B и D лежит на середине Y диагонали BD . При нахождении центра тяжести вместо четырех материальных точек можно рассматривать две точки X и Y с равными массами $2m$. Середина отрезка XY и есть центр тяжести четырехвершинника — точка S .

Итак, рассматривая центр тяжести четырехвершинника (то есть решая физическую задачу), мы установили такие геометрические факты:

- середины сторон любого четырехугольника являются вершинами параллелограмма;
- стороны этого параллелограмма параллельны диагоналям четырехугольника; длины сторон параллелограмма равны половине длин диагоналей.
- центр этого параллелограмма делит пополам отрезок, соединяющий середины диагоналей четырехугольника.

Заметим, что это обстоятельство еще раз подтверждает, что разделение науки на отдельные направления — математику, физику, химию — условно. Каждая наука по-своему, своими специальными средствами отражает этот мир. И только их единство дает нам подлинную картину мира.

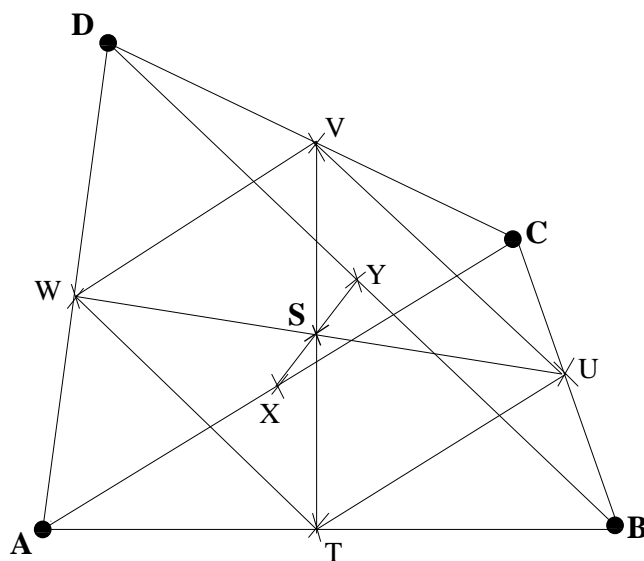


Рис. 8.

Задача. При каких условиях на четырехугольник $ABCD$ параллелограмм с вершинами в середине его сторон является ромбом, или прямоугольником или квадратом?

Совпадают ли точки $\Pi_{\text{верш}}$, $\Pi_{\text{площ}}$ для четырехугольника?

В некоторых случаях совпадают. Например, для квадратов, вырезанных из картона, сделанных из проволоки, а также для квадратов, в вершинах которых находятся одинаковые массы, совпадают все три точки $\Pi_{\text{верш}}$, $\Pi_{\text{площ}}$, $\Pi_{\text{стор}}$. В общем случае у четырехугольника точки $\Pi_{\text{верш}}$, $\Pi_{\text{площ}}$ не совпадают. Этим отличаются все четырехугольники от всех треугольников.

Для доказательства последнего утверждения рассмотрим “вырождающийся” четырехугольник с длинами сторон 1 м, 1 м, 1 см, 1 см (не параллелограмм!). Если в каждой вершине помещена масса m , то этот четырехугольник “похож” на отрезок длиной 1 м, на концах которого сосредоточены массы m и $3m$. Ясно, что центр тяжести исходных четырех вершин $\Pi_{\text{верш}}$ делит ось симметрии четырехугольника (то есть его большую диагональ) в отношении, близком к 3:1.

Далее рассмотрим четырехугольник с распределенной по его поверхности массой. Ось симметрии делит его на два равных треугольника. Как известно, центр тяжести каждого треугольника $\Pi_{\text{площ}}$ делит его самую длинную медиану в отношении 2:1. Эти медианы близки к оси симметрии четырехугольника. Отсюда следует, что отрезок, соединяющий центры тяжести этих двух треугольников, пересекает ось симметрии четырехугольника в точке $\Pi_{\text{площ}}$, которая делит ось симметрии в отношении близком к 2:1.

Поэтому в рассматриваемом случае точки $\Pi_{\text{верш}}$ и $\Pi_{\text{площ}}$ не совпадают.

Для каких четырехугольников точки $\Pi_{\text{верш}}$ и $\Pi_{\text{площ}}$ совпадают

Ответ таков: для параллелограммов и только для них.

Как найти точку $\Pi_{\text{верш}}$ для четырехвершинника

Далее будем использовать векторы. Рассмотрим произвольную, но фиксированную точку O (такую точку можно назвать началом координат). Каждой точке M на этой плоскости сопоставим вектор \vec{OM} .

Лемма. Пусть дан треугольник ABC , M — точка пересечения медиан треугольника. Тогда

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \quad (1)$$

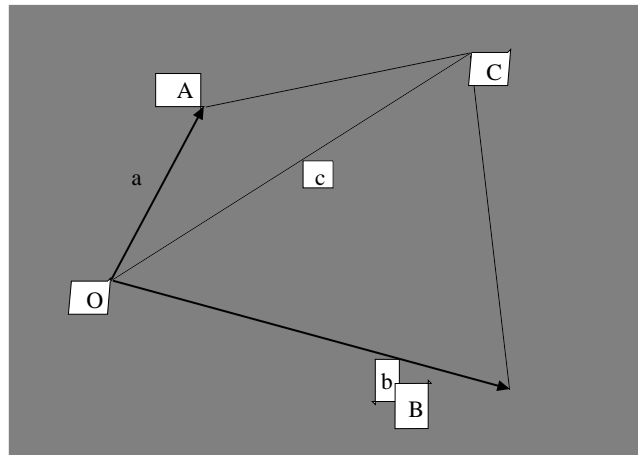


Рис. 9.

Формула (1) задает центр тяжести произвольного треугольника. Оставим доказательство леммы читателям.

Рассмотрим четырехугольник $OACB$, в каждой вершине которого находится масса m . $\vec{OA} = a$, $\vec{OB} = b$, $\vec{OC} = c$ (рис. 9). Середине стороны OA соответствует вектор $\frac{1}{2}a$. Используя правило сложения векторов, получим, что середине стороны CB соответствует вектор $\frac{1}{2}(c + b)$. Следовательно, середине отрезка, соединяющего середины сторон AB и CD , соответствует вектор равный полусумме двух последних векторов, то есть

$$O\Pi_{\text{верш}} = \frac{1}{4}(a + b + c) \quad (2)$$

Как найти точку $\Pi_{\text{площ}}$ для четырехугольника

Геометрический способ построения такой точки очень простой. Проведем в четырехугольнике диагональ. В каждом из двух получившихся треугольников найдем точку пересечения медиан. Эти точки — центры тяжести треугольников. Центр тяжести $\Pi_{\text{площ}}$ четырехугольника лежит на отрезке, соединяющем эти точки.

Затем проведем другую диагональ, и в этом случае найдем другой отрезок, на котором лежит центр тяжести $\Pi_{\text{площ}}$ четырехугольника. Точка пересечения двух построенных отрезков и есть точка $\Pi_{\text{площ}}$ четырехугольника.

Теперь реализуем сказанное с помощью векторов.

Сначала проведем диагональ OC . Вершинам треугольника OAC соответствуют векторы 0 , a , c . По формуле (1) точке пересечения медиан этого треугольника соответствует вектор

$$\vec{OM}_1 = \frac{1}{3}(a + c)$$

Вершинам треугольника OCB соответствуют векторы 0 , b , c . По формуле (1) точке пересечения медиан этого треугольника соответствует вектор $\vec{OM}_2 = \frac{1}{3}(b + c)$ Следовательно,

$$\vec{M_1M_2} = \frac{1}{3}(b - a)$$

Теперь рассмотрим прямую, проходящую через точки M_1M_2 . Точкам M этой прямой соответствует вектор

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(a + c) + \frac{t}{3}(b - a) \quad (3)$$

В уравнении (3) числовой параметр $t \in (-\infty; \infty)$.

Проведем диагональ AB . Вершинам треугольника ABO соответствуют векторы $0, a, b$. По формуле (1) точке пересечения медиан этого треугольника соответствует вектор $\overrightarrow{ON_1} = \frac{1}{3}(a+b)$.

Вершинам треугольника ABC соответствуют векторы a, b, c . По формуле (1) точке пересечения медиан этого треугольника соответствует вектор

$$\overrightarrow{ON_2} = \frac{1}{3}(a+b+c)$$

Следовательно, $\overrightarrow{N_1N_2} = \frac{1}{3}c$.

Рассмотрим прямую, проходящую через точки N_1, N_2 . Точкам N этой прямой соответствует вектор

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}(a+b) + \frac{s}{3}c. \quad (4)$$

В уравнении (4) числовой параметр $s \in (-\infty; \infty)$.

Точке пересечения прямых (3) и (4) соответствуют значения параметров t и s , которые удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{3}(a+c) + \frac{t}{3}(b-a) = \frac{1}{3}(a+b) + \frac{s}{3}c,$$

или

$$a+c+t(b-a) = a+b+sc. \quad (5)$$

На первый взгляд кажется, что мы имеем одно уравнение (5) относительно двух неизвестных скалярных величин t и s . Оказывается, нет! Векторы a и b соответствуют двум смежным сторонам четырехугольника, следовательно, они неколлинеарны. Любой вектор плоскости единственным образом раскладывается по этим двум векторам. Пусть $c = xa + yb$ где x, y — некоторые числа. В этом случае уравнение (5) принимает вид

$$a + xa + yb + t(b-a) = a + b + s(xa + yb). \quad (6)$$

Теперь из одного векторного уравнения (6) получим два скалярных уравнения

$$1 + x - t = 1 + sx \quad (7)$$

$$y + t = 1 + sy \quad (8)$$

Уравнение (7) получается приравниванием коэффициентов при векторе a в левой и правой частях уравнения (6), уравнение (8) — приравниванием коэффициентов при векторе b .

Из системы уравнений (7), (8) несложно найти $s = \frac{x+y-1}{x+y}$ (находить t необязательно).

Теперь по формуле (4) находим вектор, соответствующий центру тяжести четырехугольника

$$O\Pi_{\text{плоч}} = \frac{1}{3}(a+b) + \frac{x+y-1}{3(x+y)}(xa+yb) \quad (9)$$

Вспомним теперь формулу (2), которую запишем в виде

$$O\Pi_{\text{верш}} = \frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}(xa+yb). \quad (10)$$

Теперь мы можем ответить на вопрос, для каких четырехугольников точки $\Pi_{\text{верш}}$ и $\Pi_{\text{плоч}}$ совпадают.

Для ответа приравняем правые части уравнений (9) и (10). Получим векторное уравнение. Неизвестными в этом уравнении являются числа x и y . Приравнявая в левой и правой частях

этого уравнения отдельно коэффициенты при векторах a и b , получим систему двух скалярных уравнений относительно неизвестных x и y :

$$\frac{1}{3} + \frac{(x+y-1)x}{3(x+y)} = \frac{1}{4} + \frac{x}{4} \quad (11)$$

$$\frac{1}{3} + \frac{(x+y-1)y}{3(x+y)} = \frac{1}{4} + \frac{y}{4} \quad (12)$$

Легко убедиться, что система уравнений (11), (12) имеет единственное решение $x = 1$, $y = 1$. Следовательно, $c = a + b$.

Итак, если в четырехугольнике точки $\Pi_{\text{верш}}$ и $\Pi_{\text{плоч}}$ совпадают, то диагональ в этом четырехугольнике получается по правилу параллелограмма. Отсюда следует, что этот четырехугольник является параллелограммом, как и было сказано выше.

*Дворянинов Сергей Владимирович,
доцент, кандидат физ.-мат.наук.*

E-mail: dvoryan@yandex.ru

*Краутер Зигфрид,
профессор Высшей педагогической школы,
г. Людвигсбург, Германия.*

E-mail: siegfried.krauter@t-online.de

Малоизвестное свойство биссектрис треугольника

В. Б. Дроздов

В статье изучены необходимые и достаточные условия на длины трех отрезков, чтобы эти отрезки могли быть медианами, высотами, биссектрисами некоторого треугольника.

Рассмотрим произвольный треугольник ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Не умаляя общности, считаем что $a < b < c$, Неравенство треугольника

$$a + b > c \quad (1)$$

определяет необходимое и достаточное условие существования треугольника со сторонами a , b , c .

Очевидно, что не любые три отрезка могут быть длинами высот треугольника. Пусть h_a , h_b , h_c — длины высот, проведенных к сторонам a , b , c треугольника ABC соответственно. Так как

$$a = \frac{2S}{h_a}, \quad b = \frac{2S}{h_b}, \quad c = \frac{2S}{h_c},$$

где S — площадь треугольника ABC , то из неравенства (1) получим необходимое и достаточное условие существования треугольника с высотами h_a , h_b , h_c :

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} > \frac{1}{h_c}. \quad (2)$$

Докажем, что не любые три отрезка могут быть длинами медиан треугольника. Пусть m_a , m_b , m_c — длины медиан, проведенных соответственно к сторонам a , b , c треугольника ABC , см. рис. 1.

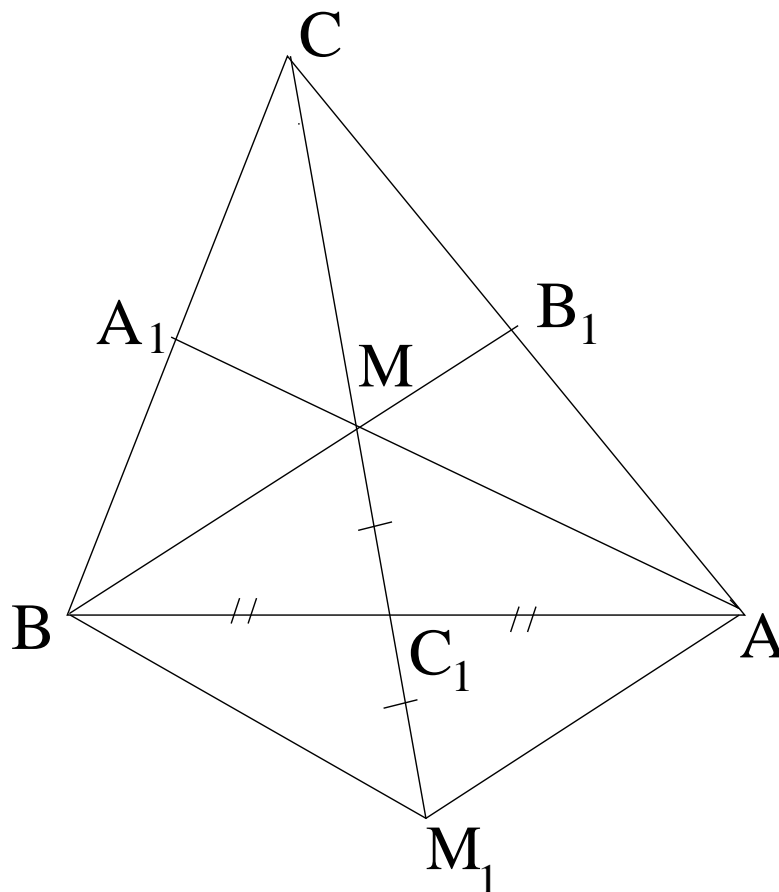


Рис. 1

Проложим медиану CC_1 на отрезок $C_1M_1 = MC_1$ и соединим точку M_1 с точками A и B . Четырехугольник $AMBM_1$ является параллелограммом, ибо его диагонали в точке пересечения делятся пополам.

Очевидно, что стороны треугольника BMM_1 равны

$$BM_1 = \frac{2}{3}m_a, \quad BM = \frac{2}{3}m_b, \quad MM_1 = \frac{2}{3}m_c.$$

Из известных школьных формул длин медиан треугольника

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \quad m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}, \quad m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$$

вытекает что если $a < b < c$, то $m_a > m_b > m_c$. Поэтому нам достаточно чтобы выполнялось одно неравенство $MM_1 + BM > BM_1$, то есть

$$m_c + m_b > m_a. \tag{3}$$

Неравенство (3) выражает необходимое и достаточное условие существования треугольника BMM_1

Из существования треугольника BMM_1 следует существование треугольников, из которых он состоит: $\triangle BMC_1$ и $\triangle BC_1M_1$. Но $\triangle BC_1M_1 = \triangle AMC_1$. Значит, неравенство (3) гарантирует существование треугольника AMB . Рассуждая аналогично, докажем существование треугольников AMC и BMC при условии (3).

Геометрически ясно, что для существования $\triangle ABC$ необходимо и достаточно одновременное существование $\triangle AMB$, $\triangle AMC$, $\triangle BMC$. Таким образом, неравенство (3) является необходимым и достаточным условием существования треугольника ABC .

Выясним, какому условию должны удовлетворять длины биссектрис l_a, l_b, l_c углов A, B, C треугольника ABC соответственно. (См. рис. 2).

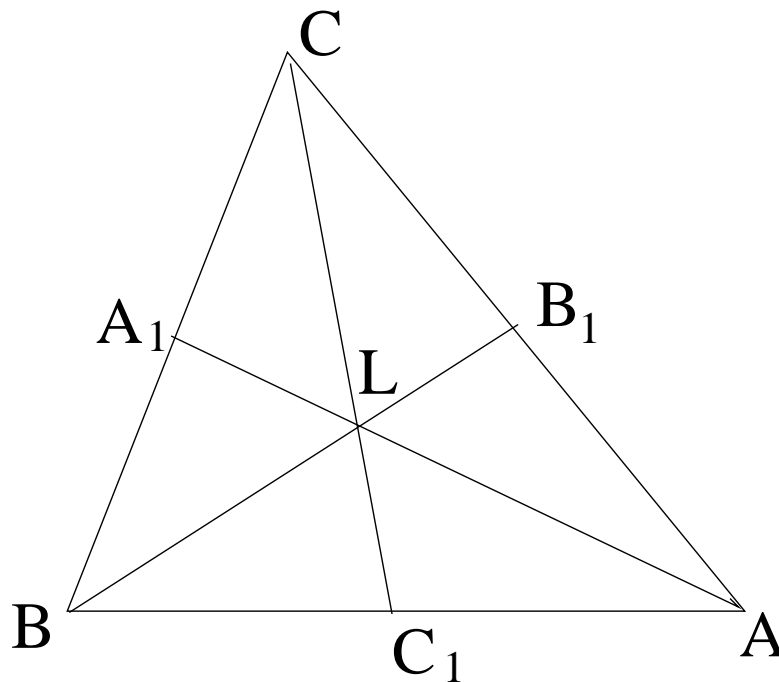


Рис. 2

Рассмотрим $\triangle ABB_1$. По свойству биссектрисы CC_1

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a}.$$

Кроме того, $AC_1 + C_1B = c$. Отсюда легко получим

$$C_1B = \frac{ac}{a+b}, \quad AC_1 = \frac{bc}{a+b}.$$

Аналогично найдем, что

$$BA_1 = \frac{ac}{b+c}, \quad A_1C = \frac{ab}{b+c}, \quad AB_1 = \frac{bc}{a+c}, \quad CB_1 = \frac{ab}{a+c}.$$

Рассмотрим $\triangle BCC_1$. По свойству биссектрисы BL

$$\frac{CL}{LC_1} = \frac{a+b}{c}.$$

Но $CL + LC_1 = l_c$. Значит $LC = l_c \left(\frac{a+b}{a+b+c} \right)$. Аналогично выражаются отрезки

$$BL = l_b \left(\frac{a+c}{a+b+c} \right) \text{ и } AL = l_a \left(\frac{b+c}{a+b+c} \right).$$

Геометрически очевидно, что для существования треугольника ABC необходимо и достаточно одновременное существование $\triangle ALC$, $\triangle BLC$, $\triangle ABL$:

$$\left\{ \begin{array}{l} l_a \left(\frac{b+c}{a+b+c} \right) + l_c \left(\frac{a+b}{a+b+c} \right) > b, \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_a \left(\frac{b+c}{a+b+c} \right) + l_b \left(\frac{a+c}{a+b+c} \right) > c, \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l_b \left(\frac{a+c}{a+b+c} \right) + l_c \left(\frac{a+b}{a+b+c} \right) > a. \end{array} \right. \quad (6)$$

Неравенство (4) легко приводится к квадратному относительно b :

$$b^2 + (a+c-l_a-l_c)b - (al_c+cl_a) < 0. \quad (7)$$

Дискриминант соответствующего квадратного уравнения положителен, а его корни b_1 и b_2 разных знаков (пусть $b_1 < 0$, $b_2 > 0$). Поэтому неравенство (7) верно при $0 < b < b_2$. То есть существуют b удовлетворяющие неравенству (7) при любых l_a и l_c . Значит, $\triangle ALC$ существует при любых l_a , l_c , а также l_b , ибо l_b не входит в неравенство (7).

Аналогично из неравенств (5) и (6) следует существование $\triangle BLC$ и $\triangle ABL$ соответственно при любых l_a , l_b , l_c . Поэтому искомое условие отсутствует. Но тогда мы приходим к интересному и несколько неожиданному выводу: любые три отрезка могут быть длинами биссектрис некоторого треугольника!

*Дроздов Виктор Борисович,
г. Рязань.*

О многолистных правильных паркетах

Х. Д. Нурлигареев

Если примыкающие к точке правильные многоугольники с одинаковой длиной сторон не укладываются в однослойный правильный паркет, может случиться, что они образуют многослойный (или *многолиственный*) правильный паркет. В статье изучены возможные случаи существования многолистных правильных паркетов и исследован вопрос, когда такие паркеты оказываются *конечнолиственными*, т.е. состоят из конечного числа слоев.

1. Постановка задачи

Исходная задача заключалась в классификации правильных паркетов, см. [2, 3]. Поскольку каждый правильный паркет определяется типом своих вершин, для классификации достаточно найти все возможные типы вершин, а потом для каждого найденного типа определить, существует ли правильный паркет, соответствующий этому типу. Под “возможным типом вершины” мы подразумеваем последовательность правильных многоугольников со сторонами одной и той же длины, которые можно расположить на плоскости так, чтобы все они пересекались по одной вершине, а любые два соседних пересекались по стороне (при этом два многоугольника, не являющиеся соседними, будут пересекаться по вершине, а первый и последний многоугольники мы считаем соседними). Соответствующее расположение этих многоугольников на плоскости мы назовём *ростком*.

В ходе решения исходной задачи некоторые возможные типы вершин приходилось исключать из рассмотрения, поскольку соответствующие им ростки не продолжались до правильного паркета. Так получалось потому, что рассматривая движения, переводящие центр данного ростка в другие вершины многоугольников, мы получали накладывающиеся друг на друга плитки. Поэтому возник следующий вопрос: а что будет, если мы разрешим плиткам перекрываться? Вообще говоря, у нас получится *многолиственный* паркет. Будет ли он *конечнолиственным*? И если да, то каково количество слоев?

Ответам на эти вопросы и посвящена настоящая работа.

2. Возможные типы вершин

Перечислим все возможные типы вершин, ростки которых не продолжают до правильных паркетов.

В каждой вершине ростка может сходиться три, четыре, пять или шесть правильных многоугольников. Если их шесть, то все они — треугольники (и росток продолжается до треугольного паркета). Если их пять, то либо это шестиугольник и четыре треугольника, либо два квадрата и три треугольника (причём в последнем случае у нас может быть два типа вершины в зависимости от того, в каком порядке мы эти квадраты и треугольники расположим). Все три ростка, соответствующие этим типам вершин, достраиваются до правильных паркетов.

Рассмотрим теперь две оставшиеся возможности. Допустим, к вершине ростка A примыкает четыре многоугольника, количество вершин которых равно k , l , m и n соответственно. Тогда, записывая условия того, что сумма примыкающих к A углов равна развернутому, мы имеем равенство:

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(l-2)\pi}{l} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi$$

Преобразования приводят нас к следующему уравнению:

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = 1$$

Считая без ограничения общности, что $k \leq l \leq m \leq n$, мы видим, что либо $k = 3$, либо $k = 4$ (потому что при $k \geq 5$ сумма дробей в левой части меньше единицы). Во втором случае решение единственно: $k = l = m = n = 4$; оно приводит нас к паркету $((4)4)$. А первый случай сводится к уравнению

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3}$$

Здесь снова есть две возможности: $l = 3$ и $l = 4$. Рассматривая их аналогичным способом, мы видим, что они дают решения $(k, l, m, n) \in \{(3, 3, 4, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6)\}$. Из этих решений два ростка $((3, 6, 3, 6)$ и $(3, 4, 6, 4)$ достраиваются до правильного паркета, а остальные четыре — нет.

Осталось исследовать тип вершины, в которой сходится три многоугольника. Снова считаем, что количество их вершин равно k, m и n соответственно, причём $k \leq m \leq n$. В этом случае условие для суммы углов плиток, сходящихся в A , принимает вид

$$\frac{(k-2)\pi}{k} + \frac{(m-2)\pi}{m} + \frac{(n-2)\pi}{n} = 2\pi$$

или

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$$

Очевидно, $k \leq 6$. Осталось рассмотреть четыре возможные значения.

Если $k = 6$, то единственное возможное решение $m = 6, n = 6$. Оно даёт нам правильный шестиугольный паркет.

Если $k = 5$, то единственное возможное решение $m = 5, n = 10$. Соответствующий росток до паркета не достраивается.

Если $k = 4$, то $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$. Здесь имеется целых три решения — $(4, 5, 20), (4, 6, 12), (4, 8, 8)$, два последних из которых соответствуют правильным паркетам.

Наконец, если $k = 3$, то $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} = \frac{1}{6}$. Тут решений целых пять: $(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (3, 12, 12)$. И лишь одно из них (последнее) приводит нас к правильному паркету.

Таким образом, подлежат дальнейшему исследованию десять следующих типов вершин, ростки которых не достраиваются до правильных паркетов: $(3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15), (4, 5, 20), (5, 5, 10), (3, 3, 4, 12), (3, 4, 3, 12), (3, 3, 6, 6), (3, 4, 4, 6)$.

3. Кристаллографические леммы

Рассмотрим некоторое дискретное множество точек V на плоскости, которое удовлетворяет следующему условию: для любых двух элементов $a, b \in V$ существует такое движение g плоскости, которое переводит a в b , оставляя при этом V неподвижным. Пусть G — группа всех движений, V инвариантно. Тогда справедлив следующий результат, см. [1], гл. 4.

Лемма 1. Если $g \in G$ — вращение, то его порядок не может принимать значения, отличные от 2, 3, 4, 6.

Доказательство. Пусть P — произвольный центр вращения порядка n . Рассмотрим его орбиту при действии группы G . Поскольку множество V дискретно, то найдётся точка Q орбиты, самая близкая к точке P . Очевидно, она тоже будет центром вращения порядка n .

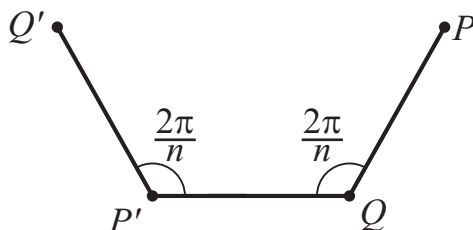


Рис. 1

Пусть P' — образ точки P при вращении вокруг Q на угол $\frac{2\pi}{n}$, а Q' — образ точки Q при вращении вокруг P' на тот же самый угол. Ясно, что $PQ = QP' = P'Q'$. Вполне возможно, точки Q' и P совпадают. Тогда $n = 6$. Во всех остальных случаях, в силу выбора точки Q , должны быть выполнены неравенства $PP' \geq PQ$ и $PQ' \geq PQ$. Отсюда следует, что $n < 5$. Действительно, если $n = 5$, то

$$PQ' = \left(1 - 2 \cos \frac{2\pi}{5}\right) \cdot PQ < PQ.$$

Если же $n > 6$, то

$$PP' = 2 \sin \frac{\pi}{n} \cdot PQ < PQ.$$

Полученное противоречие доказывает утверждение леммы.

Лемма 2. Если правильный n -угольник является базисной плиткой правильного конечнолиственного паркета, причём в тип паркета число n входит только один раз, то $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$.

Доказательство. Пусть базисной плиткой некоторого правильного конечнолиственного паркета является многоугольник $A_1A_2\dots A_n$, причём в тип паркета число n входит только один раз.

Рассмотрим преобразование g паркета, которое переводит A_1 в A_2 . Это либо поворот на угол $\frac{2\pi}{n}$ с центром в центре многоугольника $A_1A_2\dots A_n$, либо симметрия относительно срединного перпендикуляра к стороне A_1A_2 . В первом случае, поскольку множество всех вершин правильного конечнолиственного паркета дискретно, из леммы 1 следует, что $n \in \{2, 3, 4, 6\}$. Во втором случае рассмотрим также преобразование h , которое переводит A_2 в A_3 . Если это поворот, то снова можно воспользоваться леммой 1. Если же h — симметрия, то поворотом на угол $\frac{4\pi}{n}$ является композиция $h \circ g$. Таким образом, всё из той же леммы 1 можно сделать вывод, что $n \in \{3, 4, 6, 8, 12\}$. Непосредственно из леммы 2 вытекает следующий результат.

Следствие. Правильные многолистные паркетные типы с типами вершин $(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$, $(3,10,15)$, $(4,5,20)$, $(5,5,10)$ не являются конечнолиственными.

Итак, из десяти правильных многолистных паркетов шесть оказались бесконечнолиственными. Осталось изучить четыре паркета, типы которых есть $(3,3,4,12)$, $(3,4,3,12)$, $(3,3,6,6)$, $(3,4,4,6)$. Для того, чтобы выяснить, какие из них являются конечнолиственными, исследуем каждый из них по отдельности.

4. Паркет типа $(3,3,4,12)$

Рассмотрим какой-нибудь росток паркета $(3,3,4,12)$ и посмотрим, как выглядят окрестности базисных плиток, если мы начнём строить паркет из этого ростка. Для того, чтобы построить такую окрестность, будем двигаться от данной вершины по рёбрам фиксированной базисной плитки от вершины к вершине, симметрично отражая многоугольники, сходящиеся в вершине, относительно срединного перпендикуляра к ребру. На рис. 2 показан один шаг такого движения. Исходная вершина отмечена чёрным, следующая по ходу движения — белым. Ось, относительно которой мы отражаем, изображена пунктиром, исходные плитки закрашены светло-серым, новые — темно-серым.

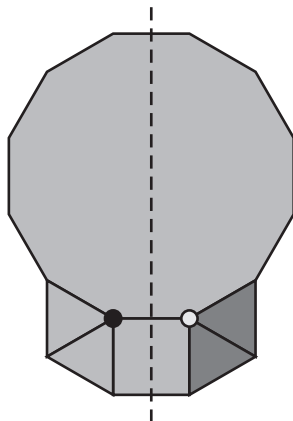


Рис. 2

Рис. 3 иллюстрирует получающиеся окрестности. Вершины базисной плитки, через которые мы проходим, дополнительно выделены. Разными типами линий — сплошной, штриховой, пунктирной — обозначены границы накладывающихся друг на друга многоугольников.

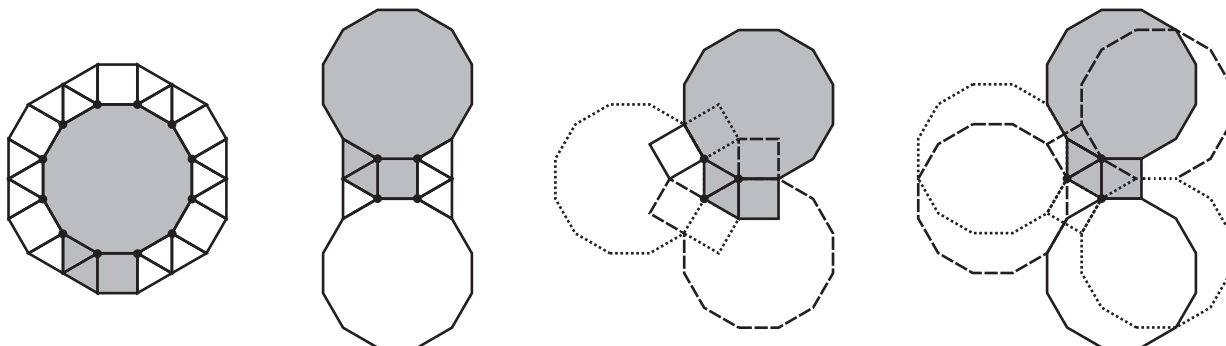


Рис. 3

Будем считать длину стороны базисной плитки паркета равной единице. Исходя из того, как выглядят окрестности базисных плиток, мы можем утверждать, что правильный многолистный паркет $(3,3,4,12)$ содержит в себе паркет T типа $((6)3)$ в качестве подпаркета. С другой стороны, рассмотрение окрестности квадрата показывает, что в исходном многолистном паркете содержится также подпаркет T' типа $((6)3)$, сдвинутый относительно T на величину $d = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В силу трансляционных свойств паркетов, а также из-за того, что число d несоизмеримо с единицей, отсюда следует, что правильный паркет $(3,3,4,12)$ конечнолистным не является.

5. Паркет типа $(3,4,3,12)$

Как и в предыдущем случае, рассмотрим какой-нибудь росток паркета $(3,4,3,12)$ и посмотрим на окрестности базисных плиток, если мы начнём строить паркет, исходя из этого ростка (результат изображён на рис. 4).

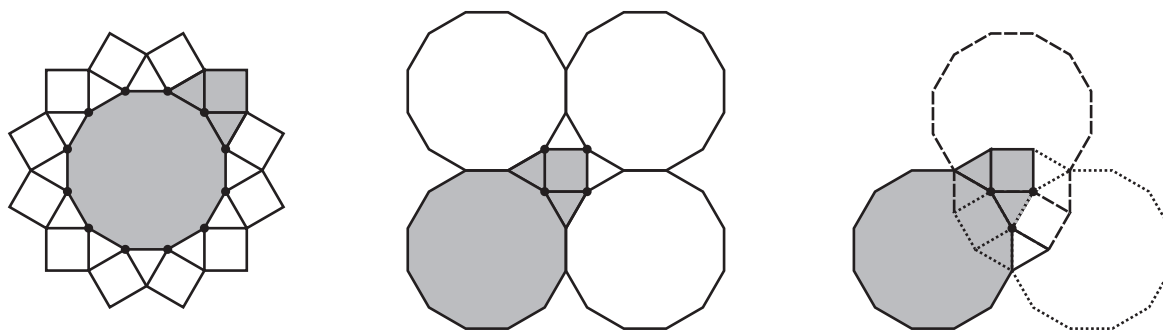


Рис. 4

Возьмём за основу окрестность треугольника и продолжим построение паркета, накладывая такие окрестности на появляющиеся новые треугольники (для облегчения понимания на рис. 5, иллюстрирующем этот процесс, двенадцатиугольники не изображены).

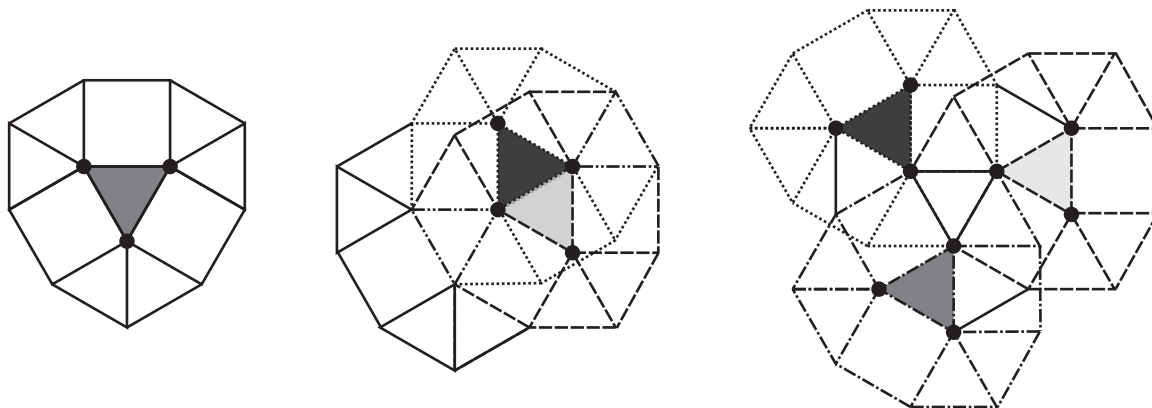


Рис. 5

Экстраполируя указанное построение, мы можем утверждать, что правильный многолиственный паркет $(3,4,3,12)$ содержит в себе паркеты T типа $((6)3)$ и T_2 типа $((3)3,(2)4)$ в качестве подпаркетов. С другой стороны, продолжая этот процесс построения от треугольника, лежащего на другом уровне подпаркета T_2 , мы обнаружим, что в исходном многолиственном паркете содержится также подпаркет T'_1 типа $((6)3)$, сдвинутый относительно T_1 на величину $d = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (как и ранее, длину стороны базисной плитки паркета мы считаем равной единице). В силу трансляционных свойств паркетов, а также из-за того, что число d несоизмеримо с единицей, отсюда следует, что правильный паркет $(3,4,3,12)$ конечнолиственным не является.

6. Паркет типа $(3,4,4,6)$

Аналогично случаям, разобранным ранее, рассмотрим какой-нибудь росток паркета $(3,4,4,6)$ и посмотрим на окрестности базисных плиток (см. рис. 6).

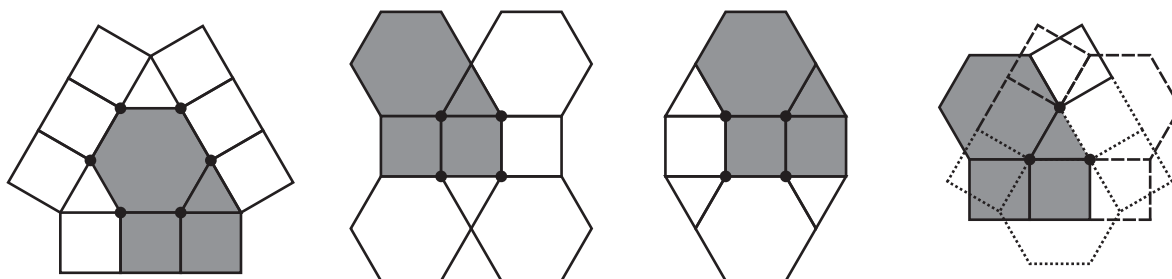


Рис. 6

Возьмём за основу окрестность квадрата и продолжим построение паркета, накладывая окрестности разных базисных плиток на появляющиеся новые многоугольники, см. рис. 7.

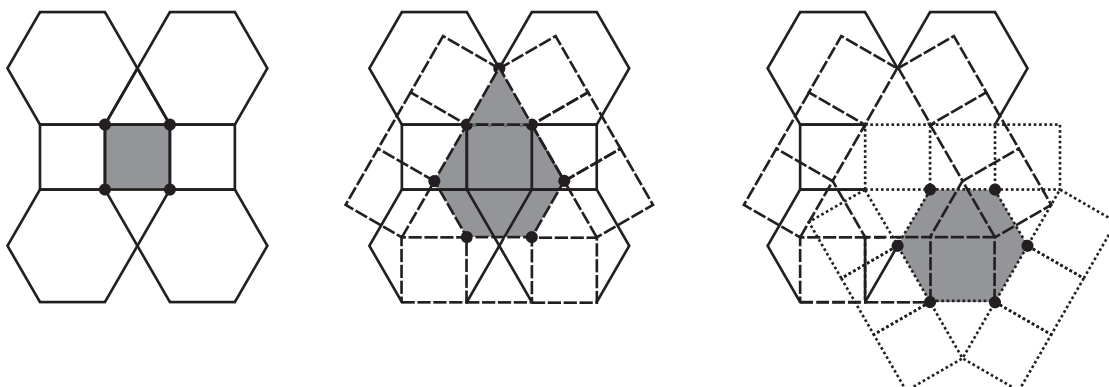


Рис. 7

Теперь рассмотрим бесконечные полосы квадратов единичной ширины, которые регулярно встречаются в многолистном правильном паркете $(3,4,4,6)$. Из второй иллюстрации на рис. 7 ясно, что существуют параллельные полосы, расстояние между нижними границами которых равно $\sqrt{3}$. А из третьей иллюстрации видно, что существуют также такие полосы, расстояние между нижними границами которых составляет $d = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (более того, квадраты этих полос сдвинуты друг относительно друга по горизонтали). Из несоизмеримости этих двух чисел вместе с трансляционными свойствами паркетов мы делаем вывод, что правильный паркет $(3,4,4,6)$ конечнолистным не является.

7. Паркет типа $(3,3,6,6)$

Последний из нашего списка паркетов является конечнолистным. Это следует из того факта, что множество всех его узлов дискретно (и совпадает с множеством узлов паркета $((6)3)$, которых можно рассматривать как подпаркет искомого паркета), а количество различных возможных ростков, вершины которых являются одной и той же фиксированной точкой, конечно. Окрестности базисных плиток произвольного ростка изображены на рис. 8.

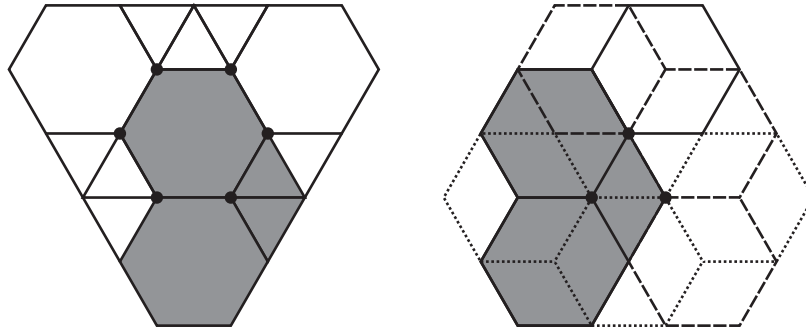


Рис. 8

Для того, чтобы выяснить, каково количество слоев, покрывающих каждую точку плоскости, необходимо уточнить, что именно мы считаем слоем. На текущий момент по этому вопросу полной ясности не наблюдается. Однако кажется логичным считать, что приведённая на рис. 8 окрестность правильного шестиугольника представляет собой один слой, а окрестность правильного треугольника — два слоя.

Чтобы выяснить, сколькими слоями покрывается каждая точка плоскости, мы рассмотрим всевозможные ростки, которыми её можно накрыть. Для удобства будем считать, что данная точка является узлом правильного многолистного паркета $(3,3,6,6)$. Все варианты ростков представлены на рис. 9 (накрываемая точка жирная).

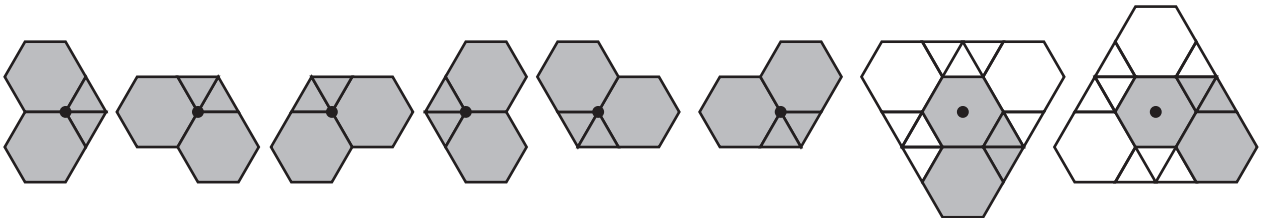


Рис. 9

Таким образом, правильный паркет $(3,3,6,6)$ является восьмилистным.

8. Заключение

Итак, исследование всех возможных типов вершин и продолжений их ростков до правильных многолистных паркетов дало следующие результаты:

Всего возможных типов вершин 21.

11 типов вершин соответствуют однолистным паркетам. Это стандартные правильные паркетки: $((6)3)$; $((4)4)$; $((3)6)$; $(3,12,12)$; $(4,8,8)$; $(3,6,3,6)$; $((4)3,6)$; $(3,4,6,4)$; $((3)3,(2)4)$; $((2)3,4,3,4)$; $(4,6,12)$.

Один тип вершины соответствует восьмилистному паркету: $(3,3,6,6)$.

Остальные девять типов вершин соответствуют бесконечнолистным паркетам. Это типы вершин: $(3,7,42)$, $(3,8,24)$, $(3,9,18)$, $(3,10,15)$, $(4,5,20)$, $(5,5,10)$, $(3,3,4,12)$, $(3,4,3,12)$, $(3,4,4,6)$.

Литература

- [1] Кокстер Г.С.М. Введение в геометрию, — Москва, “Наука”, 1966.
- [2] Колмогоров А.Н. Паркеты из правильных многоугольников, — Квант, 1986, №8, стр. 3–7.
- [3] Михайлов О. Одиннадцать правильных паркетов, — Квант, 1979, №2, стр. 9–14.

*Нурлигареев Хайдар Джамилевич,
аспирант Кабинета методики преподавания
элементарной математики механико-математического
факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.*

E-mail: haidar_nur@yahoo.com

В единстве логической и графической культуры залог решения геометрических задач

Е. В. Потоскуев

В статье, с использованием многочисленных примеров, показано, что соблюдение определенных принципов грамотного построения планиметрических и стереометрических чертежей, в совокупности с культурой логических рассуждений, помогает успешно справляться с решением геометрических задач, в том числе достаточно сложных.

“Мой карандаш бывает еще остроумней моей головы”.

Леонард Эйлер (1707–1783).

При изучении школьной геометрии, особенно — стереометрии, мы пользуемся рисунками, чертежами: они помогают нам понять, представить, проиллюстрировать то, о чем идет речь в задаче, теореме. Вместе с тем, при строгом подходе к изучению геометрии рисунок не имеет доказательной силы, даже если он выполнен безупречно. Но если построение фигур по условию задачи выполняется *с аргументацией*, основанной на логической строгости и свойствах параллельного проектирования при изображении фигур, то *верно, наглядно и хорошо выполненный рисунок (чертеж) к задаче становится надежным помощником при ее решении.*

Таким образом, *воплощенное в рисунок интуитивное, живое пространственное воображение в сочетании со строгой логикой мышления — это ключ к изучению геометрии.* Поэтому, прежде чем приступить к решению геометрической задачи, необходимо наглядно представить, вообразить и верно изобразить фигуры, о которых идет речь. *Необходимо выработать понимание учащимися того, что аргументированные объяснения шагов построений изображения фигур составляют своеобразный анализ решения геометрической задачи и “открывают путь” к ее решению: при этих объяснениях устанавливаются необходимые аффинные и метрические взаимосвязи, соотношения между элементами изображенных фигур.*

Очень важным для “задачного рисунка” является его *простота, лаконичность.* На рисунке следует изображать только те фигуры (точки, отрезки, окружности и др.), которые необходимы при решении данной задачи. Например, если речь идет об окружности, то не всегда нужно изображать центр построенной окружности, а иногда, наоборот, следует ограничиться изображением лишь центра окружности, не изображая саму окружность.

Иногда в результате анализа решения задачи приходится отказываться от уже построенного изображения и выполнять новый чертеж, обладающий большей простотой и наглядностью, наиболее верно изображающий расположение фигур в соответствии с условием задачи.

Рассмотрим, например, решение следующей планиметрической задачи.

Задача 1. Медиана BH треугольника ABC пересекается с его биссектрисой AM в точке K и делится этой точкой на два равных отрезка. Найдите площадь этого треугольника, если $BH = 16$ см, $AM = 20$ см.

Решение. Для решения этой задачи, прежде всего, следует изобразить $\triangle ABC$ соответствующим ее условию. Допустим, выполнено изображение треугольника ABC (рис. 1). Далее необходим анализ данной геометрической ситуации: не в любом треугольнике биссектриса одного его угла делит пополам медиану, проведенную из вершины другого угла.

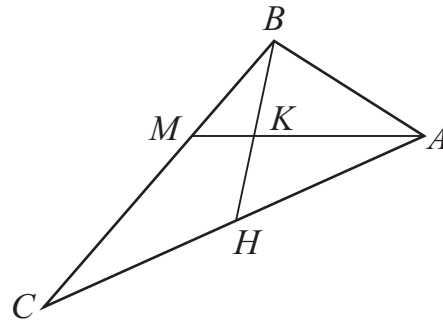


Рис. 1

При решении задачи можно рассуждать следующим образом.

Так как точка K — середина BH и AM — биссектриса угла BAC , то AK — медиана и биссектриса в $\triangle ABH$. Поэтому $\triangle ABH$ — равнобедренный (!) ($AB = AH$) и AK — его высота. Это означает, что для решения задачи сначала нужно построить равнобедренный треугольник ABH ($AB = AH$) и его медиану AK , затем на луче AH построить точку C , такую, что $AC = 2AH$. Тогда $\triangle ABC$ — искомым, в котором AM (продолженный отрезок AK до пересечения с BC) — его биссектриса (рис. 2).

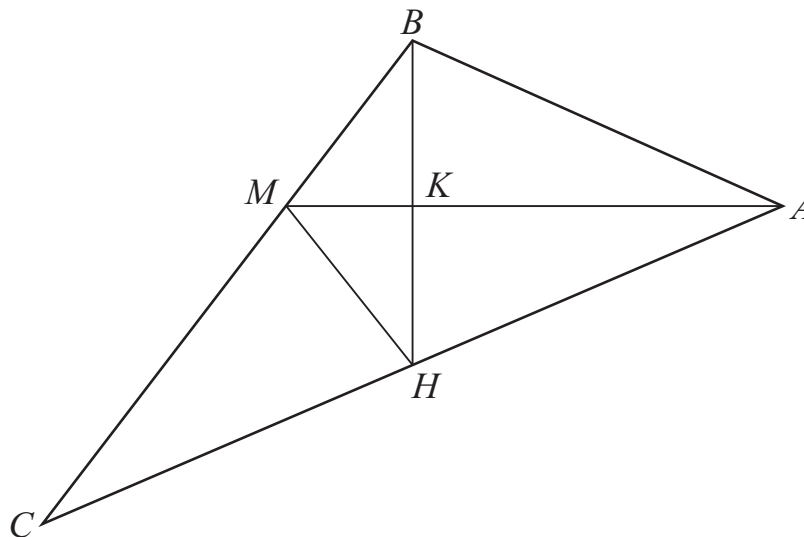


Рис. 2

Теперь (рис. 2) получается совершенно другое, верное изображение треугольника ABC и можно приступить к необходимым вычислениям.

Имеем: AK — срединный перпендикуляр отрезка $BH \Rightarrow BK = \frac{1}{2}BH = 8$ — высота $\triangle ABM$. Поэтому: $S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 8 = 80$.

Так как $AB = AH$ и BH — медиана $\triangle ABC$, то $AC = 2AB$. По свойству биссектрисы угла в треугольнике ABC имеем: $CM : MB = AC : AB = 2 : 1 \Rightarrow CB : MB = 3 : 1 \Rightarrow \triangle ABC = 3S_{\triangle ABM} = 3 \cdot 80 = 240(\text{см}^2)$.

Ответ: 240см^2 .

Требуются логические обоснования шагов построения также при изображении треугольника, заданного условием следующей задачи.

Задача 2. Две медианы треугольника, равные 18 и 24, взаимно перпендикулярны. Найдите длину третьей медианы этого треугольника.

Решение. Возникает проблема изображения треугольника по условию задачи: не в любом треугольнике две медианы взаимно перпендикулярны. Например, в треугольнике ABC , изображенном на рис. 3, медианы AP и BH не взаимно перпендикулярны. Значит, искомое изображение треугольника для решения данной задачи следует начинать, используя условие перпендикулярности его медиан.

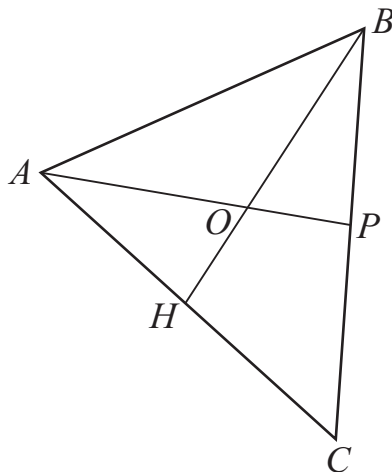


Рис. 3

Проводим две взаимно перпендикулярные прямые. Пусть O — точка их пересечения (рис. 4). На одной из этих прямых выбираем точку A и строим точку P (по разные стороны от точки O) так, чтобы выполнялось $AO : OP = 2 : 1$. Аналогично, на другой прямой выбираем точку B и строим точку H так, чтобы $BO : OH = 2 : 1$. Точки A и B принимаем за вершины заданного треугольника и строим третью вершину $C = AH \cap BP$.

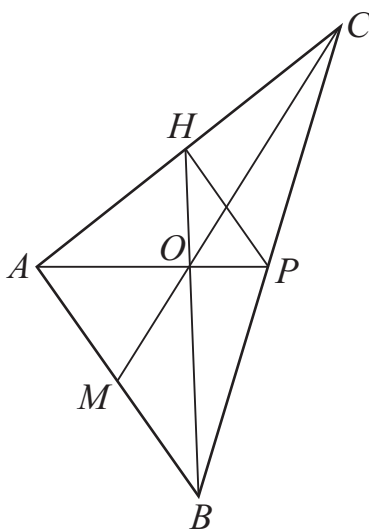


Рис. 4

Докажем, что BH и AP — медианы треугольника ABC .

Из соотношений $AO : OP = BO : OH = 2 : 1$ следует подобие треугольников AOB и POH с равными вертикальными углами при вершине O . Поэтому $HP \parallel AB$ и $HP = 0,5AB$. Это означает, что точки H и P — середины сторон соответственно AC и BC треугольника ABC , то есть, AP и BH — его медианы.

Далее приступаем к “вычислительному” этапу решения задачи. Пусть $AP = 18$ и $BH = 24$. Найдем длину медианы CM . По свойству медиан в $\triangle ABC$ имеем: $AO : OP = BO : OH =$

$2 : 1 \Rightarrow AO = \frac{2}{3}AP = \frac{2}{3} \cdot 18 = 12$; $BO = \frac{2}{3}BH = \frac{2}{3} \cdot 24 = 16$. Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle AOB$ имеем: $AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20$. А так как OM — медиана этого треугольника, проведенная из вершины прямого угла, то $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2} \cdot 20 = 10$. Учитывая, что $CO : OM = 2 : 1$, получаем: $CM = 3OM = 3 \cdot 10 = 30$. *Ответ:* 30.

Таким образом, если в условии задачи речь идет о треугольнике, две медианы которого взаимно перпендикулярны, то рисунок к этой задаче необходимо начинать не с изображения треугольника, а с проведения двух взаимно перпендикулярных прямых, на которых должны быть расположены эти медианы. Дальнейшие построения искомого треугольника нужно выполнять, учитывая свойства медиан треугольника.

Бóльшие логические обоснования шагов построения изображений геометрических фигур требуются при решении планиметрических задач на комбинации многоугольников и окружностей. Рассмотрим, например, решение следующей задачи.

Задача 3. Основания равнобедренной трапеции, в которую можно вписать окружность, равны 2 и 6. Найдите радиус окружности, описанной около этой трапеции.

Решение. Прежде всего, изображение фигур по условию задачи не следует начинать ни с построения трапеции, ни с построения окружности, в которую будет вписана трапеция. Это объясняется тем, что в окружность вписать трапецию всегда можно, но не во всякую трапецию можно вписать окружность. Поэтому построение рисунка для решения данной задачи целесообразно начинать с изображения окружности (рис. 5), затем строим описанную около нее равнобедренную трапецию $ABCD$ ($AD \parallel BC$), после чего строим окружность с центром O и радиуса R , описанную вокруг этой трапеции; центры окружностей W и W_1 лежат на серединном перпендикуляре MK оснований BC и AD .

Пусть в трапеции $ABCD$: $BC = 2$, $AD = 6$.

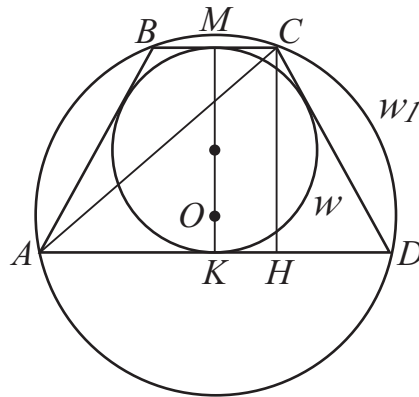


Рис. 5

Так как в данную трапецию вписана окружность, то $BC + AD = 2CD$, откуда $CD = \frac{BC+AD}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$. Кроме того, в равнобедренной трапеции выполняется: $AH = \frac{AD+BC}{2} = \frac{6+2}{2} = 4$; $HD = \frac{AD-BC}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$. Тогда в прямоугольном треугольнике CHD имеем: $CD = 2HD \Rightarrow 30^\circ$, значит, $\angle CDH = 60^\circ$. Далее, в прямоугольных треугольниках CHD и ACH находим соответственно:

$$CH = HD \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}; \quad AC = \sqrt{AH^2 + CH^2} = \sqrt{16 + 12} = 2\sqrt{7}.$$

Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то окружность, описанная около этой трапеции, совпадает с окружностью, описанной около треугольника ACD . Поэтому искомый радиус R найдем по теореме синусов в $\triangle ACD$: $R = \frac{AC}{2 \sin 60^\circ} = 2\sqrt{7} : (2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{2\sqrt{21}}{3}$. *Ответ:* $\frac{2\sqrt{21}}{3}$.

Заметим, что в планиметрии верный чертеж, как правило, точно (по крайней мере, с точностью до подобия) соответствует данным задачи или условию теоремы: если прямые параллельны

по условию — их рисуют параллельными; если прямые перпендикулярны по условию — их рисуют перпендикулярными; если отрезки равны по условию задачи, то они равны и на чертеже; если в условии задан равнобедренный треугольник, то и на рисунке должен быть изображен равнобедренный треугольник.

Однако в стереометрии, при изображении пространственных фигур на плоскости, наблюдается совершенно иная картина. Рассмотрим, например, изображение правильного тетраэдра $PABC$ (рис. 6), где точки K и E — середины ребер соответственно AC и BP , точка O — центроид правильного $\triangle ABC$, PO — высота тетраэдра. На этом рисунке:

- неравные отрезки AB , BC , AC , AP , BP , CP изображают равные ребра правильного тетраэдра $PABC$;
- отрезки AB , BC и AC не равны, а на самом деле $\triangle ABC$ — правильный;
- угол CKB — острый, а на самом деле $BK \perp AC$ (как медиана правильного $\triangle ABC$);
- отрезки AE и CE не равны, а на самом деле они равны как медианы равных правильных треугольников ABP и CBP ;
- прямые BK и CE изображены пересекающимися, а на самом деле они скрещиваются.

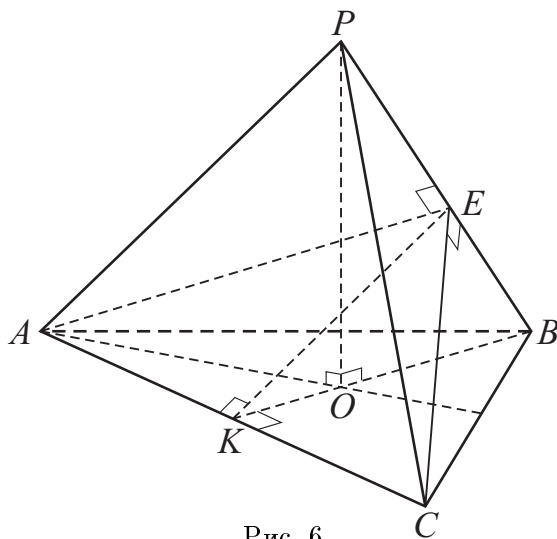


Рис. 6

Для решения содержательных стереометрических задач необходимы умения верно и наглядно изображать фигуры, заданные условиями данных задач. Эти умения вырабатываются при решении достаточно большого числа задач различного уровня сложности. Многолетний опыт работы свидетельствует о том, что эти умения, в свою очередь, достигаются посредством решения опорных, базовых задач с аргументированными обоснованиями построенных изображений фигур.

Ниже иллюстрируются решения некоторых из опорных задач стереометрии и последующее их использование при решении задач на комбинации сферы и многогранника.

Задача 4. Сфера с центром H радиуса 6 касается всех сторон квадрата $ABCD$. Чему равно расстояние от центра сферы до плоскости квадрата, если его сторона равна 6?

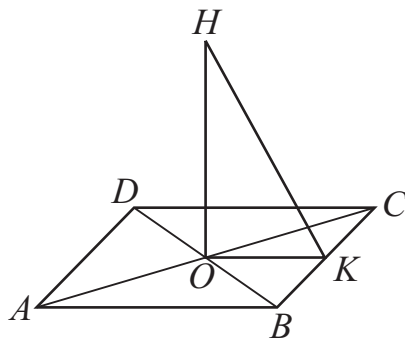


Рис. 7

Решение. Так как сфера касается всех сторон квадрата $ABCD$, то ее пересечением с плоскостью квадрата является окружность с центром $O = AC \cap BD$ (рис. 7), вписанная в этот квадрат, при этом $OH \perp (ABC)$. Тогда точками касания сферы со сторонами квадрата являются середины его сторон — точки касания вписанной в квадрат окружности.

Пусть точка K — середина стороны BC данного квадрата, значит, K — точка касания сферы с этой стороной.

Так как касательная к окружности перпендикулярна ее радиусу, проведенному в точку касания, то $OK \perp BC$, откуда $HK \perp BC$ (по теореме о трех перпендикулярах), при этом $HK = 6$ — радиус сферы, $OK = 3$ — радиус окружности сечения сферы.

В прямоугольном $\triangle HOK$ находим искомое расстояние: $OH = \sqrt{HK^2 - OK^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$.

Ответ: $3\sqrt{3}$.

Задача 5. Сфера с центром H касается всех сторон правильного треугольника ABC . Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости треугольника равно $2\sqrt{6}$, а сторона треугольника равна 12?

Решение. Пусть AK, BT — медианы правильного треугольника ABC , рис. 8; $O = AK \cap BT$. Так как сфера касается всех сторон правильного треугольника ABC , то ее пересечением с плоскостью этого треугольника является окружность с центром в точке O , вписанная в этот треугольник, при этом $OH \perp (ABC)$. Значит, точками касания сферы со сторонами треугольника являются середины его сторон — точки касания вписанной в треугольник окружности.

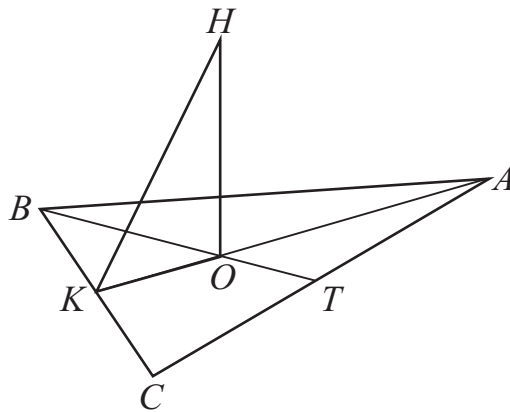


Рис. 8

Точка K — середина стороны BC треугольника ABC — является точкой касания вписанной в него окружности, значит, точкой касания сферы с этой стороной. Поэтому отрезок HK — радиус нашей сферы. Найдем радиус HK .

В прямоугольном $\triangle KOH$ с катетами $OH = 2\sqrt{6}$ и $OK = 2\sqrt{3}$ находим:

$$HK = \sqrt{OH^2 + OK^2} = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + (2\sqrt{3})^2} = 6.$$

Ответ: 6.

Задача 6. Сфера с центром H касается всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$. Чему равен радиус сферы, если расстояние от ее центра до плоскости шестиугольника равно $4\sqrt{6}$, а сторона шестиугольника равна 8?

Решение. Так как сфера касается всех сторон правильного шестиугольника $ABCDEF$, то ее пересечением с плоскостью этого шестиугольника является окружность с центром $O = FC \cap BE$ (рис. 9), вписанная в этот шестиугольник, при этом $OH \perp (ABC)$. Тогда точками касания сферы со сторонами шестиугольника являются середины его сторон — точки касания вписанной в шестиугольник окружности.

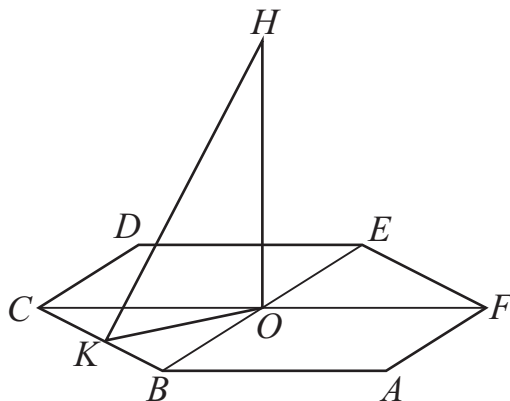


Рис. 9

Пусть точка K — середина стороны BC шестиугольника $ABCDEF$, значит, K — точка касания сферы с этой стороной, а отрезок HK — радиус сферы.

Так как $OH = 4\sqrt{6}$ — расстояние от центра сферы до плоскости шестиугольника, $OK = 4\sqrt{3}$ — радиус окружности сечения сферы, то в прямоугольном $\triangle HOK$ находим радиус HK сферы:

$$HK = \sqrt{OH^2 + OK^2} = \sqrt{(4\sqrt{6})^2 + (4\sqrt{3})^2} = 12.$$

Ответ: 12.

После такой пропедевтики проиллюстрируем применение выше рассмотренных опорных задач для решения стереометрических задач более высокого уровня сложности — задач на комбинации сферы и многогранника.

Задача 7. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб с ребром 12. Сфера с центром O касается всех ребер этого куба. Найдите: а) положение центра O сферы; б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершины, грани и ребра куба.

Решение. Сфера с центром O касается всех ребер куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, поэтому ее пересечением с гранями куба являются равные окружности, вписанные в его грани — равные квадраты (рис. 10). Это означает, что центр O сферы равноудален от всех граней куба, следовательно, совпадает с его центром — точкой пересечения диагоналей куба.

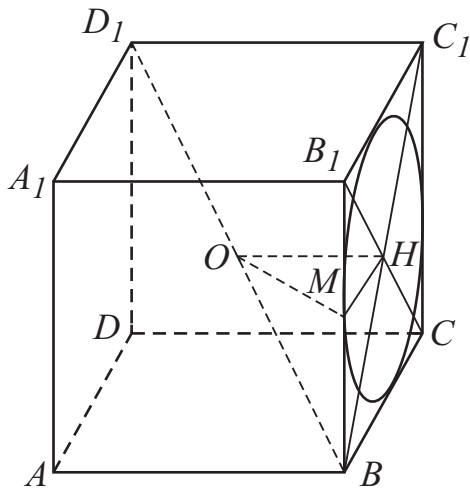


Рис. 10

Пусть точка H — центр окружности пересечения сферы с гранью BCC_1B_1 , M — точка касания этой окружности с ребром BB_1 . Тогда: $MH = 6$ — радиус этой окружности; $OH \perp (B_1BC)$, $OH = \frac{1}{2}AB = 6$ — расстояние от центра O сферы до грани куба.

Радиус OM сферы (M — точка касания сферы с ребром куба, значит, точка сферы) находим в прямоугольном $\triangle OMH$: $OM = \sqrt{OH^2 + MH^2} = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$. Так как $OM \perp BB_1$ (по теореме о трех перпендикулярах), то $OM = 6\sqrt{2}$ — расстояние от центра сферы до ребра куба.

Расстояние OB от центра сферы до вершины данного куба равно половине его диагонали BD_1 , то есть равно $\frac{12\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: центр сферы — центр куба; $6\sqrt{2}$ — радиус сферы; 6 — расстояние от центра сферы до грани куба; $6\sqrt{3}$ — расстояние от центра сферы до вершины куба; $6\sqrt{2}$ — расстояние от центра сферы до ребра куба.

Задача 8. $ABCA_1B_1C_1$ — правильная треугольная призма, все ребра которой равны 8. Сфера с центром O касается всех ребер данной призмы. Найдите: а) положение центра O сферы; б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершин, граней и ребер призмы.

Решение. Сфера с центром O касается всех ребер правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Это означает, что данная сфера пересекает все грани призмы по окружностям, вписанным в эти грани: в основаниях призмы получаем окружности, вписанные в правильные треугольники со стороной, равной 8, а в боковых гранях — окружности, вписанные в квадраты со стороной, равной 8 (рис.11). При этом радиус окружности, вписанной в боковую грань призмы, равен 4, а радиус окружности, вписанной в основание призмы, равен $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

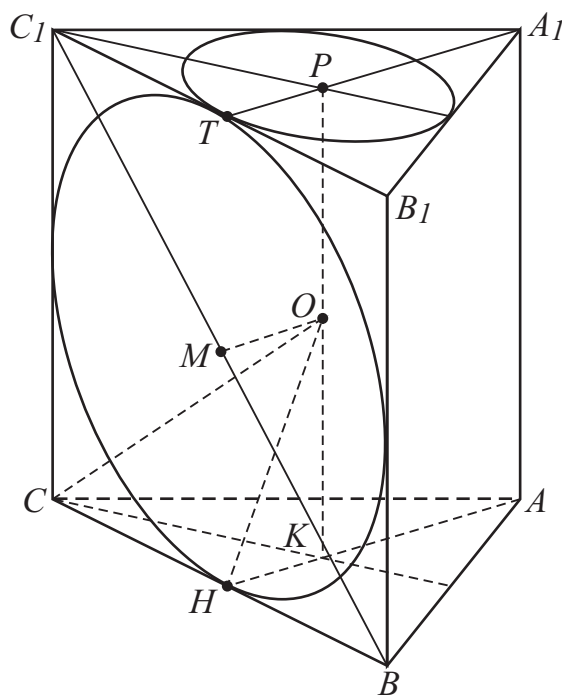


Рис. 11

Так как окружности пересечения, вписанные в основания призмы, равны, то центр O сферы равноудален от этих оснований, значит, точка O — середина отрезка PK (рис. 11) с концами в центрах этих окружностей $((ABC) \parallel (A_1B_1C_1))$, поэтому $OK = OP = 4$ — расстояние от центра сферы до основания призмы.

Точками касания сферы с ребрами призмы служат точки касания окружностей, вписанных в ее грани. Эти точки являются серединами ребер призмы.

Точка H — середина стороны BC треугольника ABC (рис. 11) — является точкой касания вписанной в него окружности, значит, точкой касания сферы с ребром BC . Поэтому *отрезок OH — радиус нашей сферы*. Найдем OH .

В прямоугольном треугольнике ONK : $OH = \sqrt{OK^2 + NK^2} = \sqrt{4^2 + (\frac{4\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$. Таким образом, *радиус нашей сферы равен $\frac{8\sqrt{3}}{3}$* .

Далее: $KH \perp (BB_1C)$, $PK \parallel (BB_1C)$, $O \in PK \Rightarrow \rho(O; (B_1BC)) = \rho(K; (B_1BC)) = KH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ — *расстояние от центра сферы до боковой грани призмы*.

Аналогично, $KC \perp C_1C$, $PK \parallel C_1C$, $O \in PK \Rightarrow \rho(O; (C_1C)) = \rho(K; (C_1C)) = KC = \frac{8\sqrt{3}}{3}$ — *расстояние от центра сферы до бокового ребра призмы*. А так как сфера касается каждого ребра призмы, то центр сферы равноудален от всех её ребер, значит, *расстояние от центра сферы до ребра основания призмы также равно $\frac{8\sqrt{3}}{3}$* .

В прямоугольном треугольнике OCK : $OC = \sqrt{OK^2 + CK^2} = \sqrt{4^2 + (\frac{8\sqrt{3}}{3})^2} = \frac{4\sqrt{21}}{3}$ — *расстояние от центра сферы до вершины призмы*.

Ответ: центр сферы — середина отрезка с концами в центрах оснований призмы; $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ — длина радиуса сферы; $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ — расстояние от центра сферы до боковой грани призмы; $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ — расстояние от центра сферы до ребра призмы; $\frac{4\sqrt{21}}{3}$ — расстояние от центра сферы до вершины призмы.

Задача 9. $ABCDEF A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — правильная шестиугольная призма, все ребра которой равны 16. Сфера с центром O касается всех ребер данной призмы. Найдите: а) положение центра O сферы; б) радиус сферы; в) расстояния от центра сферы до вершин, граней и ребер призмы.

Решение. Сфера касается всех сторон правильного шестиугольника $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ — основания данной призмы, поэтому ее пересечением с плоскостью основания является окружность, вписанная в этот шестиугольник: центром окружности является центр T шестиугольника $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ (рис. 12). Точками касания сферы со сторонами шестиугольника $A_1 B_1 C_1 D_1 E_1 F_1$ служат середины его сторон — точки касания окружности, вписанной в этот шестиугольник.

Аналогично, точками касания сферы со сторонами шестиугольника $ABCDEF$ служат середины его сторон — точки касания окружности, вписанной в этот шестиугольник.

Так как окружности, вписанные в равные шестиугольники, равны, то центр сферы равноудален от плоскостей этих окружностей — плоскостей оснований призмы. Это означает, что центр O данной сферы является серединой отрезка PT (точка P — центр нижнего основания призмы), рис. 12, то есть $OP = \frac{1}{2}PT = 8$ — *расстояние от центра сферы до основания призмы*.

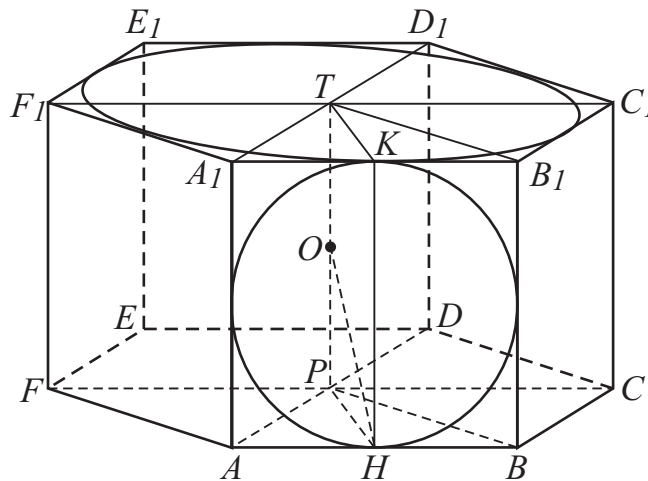


Рис. 12

Пусть точки H и K — середины ребер AB и A_1B_1 призмы. В точке H сфера касается ребра AB призмы, значит, отрезок OH является радиусом данной сферы. Найдем длину отрезка OH .

В правильном $\triangle APB$ отрезок PH является высотой, значит, $PH = 8\sqrt{3}$. Тогда в прямоугольном $\triangle OPH$: $OH = \sqrt{OP^2 + PH^2} = \sqrt{8^2 + (8\sqrt{3})^2} = 16$.

Таким образом, радиус данной сферы равен 16. А так как сфера касается всех ребер призмы и радиус сферы, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной, то расстояние от центра сферы до ребра призмы равно радиусу сферы, то есть равно 16.

Далее, $PH \perp AB$, $PH \perp AA_1 \Rightarrow PH \perp (A_1AB) \Rightarrow \rho(P; (A_1AB)) = PH = 8\sqrt{3}$. А так как $PT \parallel (A_1AB)$ и $O \in PT$, то $\rho(O; (A_1AB)) = \rho(P; (A_1AB)) = PH = 8\sqrt{3}$, то есть расстояние от центра сферы до боковой грани призмы равно $8\sqrt{3}$.

В прямоугольном $\triangle AOP$: $OA = \sqrt{OP^2 + PA^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = 8\sqrt{5}$ — расстояние от центра сферы до вершины призмы.

Ответ: центр сферы — середина отрезка с концами в центрах оснований призмы; 16 — длина радиуса сферы; $8\sqrt{3}$ — расстояние от центра сферы до боковой грани призмы; 8 — расстояние от центра сферы до основания призмы; $8\sqrt{5}$ — расстояние от центра сферы до вершины призмы; 16 — расстояние от центра сферы до ребра призмы.

Сфера в комбинации с многогранником может быть расположена так, что некоторые его грани она пересекает, касаясь при этом других его граней. Примером может служить геометрическая ситуация, предложенная в следующей задаче.

Задача 10. Высота DH правильного тетраэдра $DABC$ является диаметром сферы. Найдите длину линии пересечения сферы поверхностью тетраэдра, если высота тетраэдра равна 6.

Решение. Основание H высоты DH правильного тетраэдра $ABCD$ является центроидом правильного $\triangle ABC$. Так как высота DH является диаметром сферы, то эта сфера касается грани ABC в точке H (рис. 13).

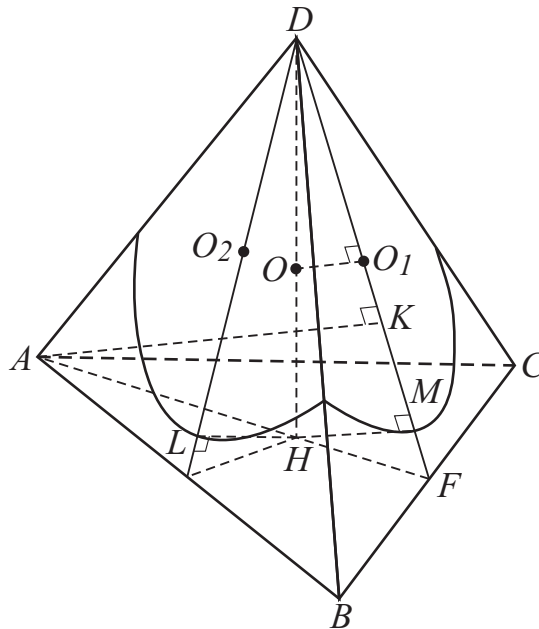


Рис. 13

Высота DH правильного тетраэдра $ABCD$ принадлежит биссекторным плоскостям двугранных углов при боковых ребрах этого тетраэдра, поэтому центр $O \in DH$ данной сферы равноудален от всех трех его боковых граней. Это означает, что в пересечении сферы с плоскостями этих граней получаются равные окружности, при этом точка D является общей для

всех трех окружностей, а окружности каждых двух соседних боковых граней пересекаются на общем ребре этих граней.

Найдем длину линии пересечения грани DBC со сферой. Пусть DF — медиана грани DBC и $\angle HFD = \alpha$. Тогда $\cos \alpha = \frac{HF}{FD} = \frac{1}{3}$.

Так как $(AFD) \perp (BCD)$, то центр O_1 окружности пересечения сферы и грани DBC принадлежит медиане DF , при этом $OO_1 \perp DF$. (Если точка K — центроид грани DBC , то $AK \perp (BCD)$, $K \in DF$ и $OO_1 \parallel AK$). Тогда в прямоугольном $\triangle OO_1D$ находим: $O_1D = OD \cdot \sin \alpha = 3 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 2\sqrt{2}$ — длина радиуса окружности пересечения сферы с плоскостью грани DBC .

Так как $\angle BDC = 60$, то пересечением грани DBC и сферы является третья часть окружности радиуса $2\sqrt{2}$, то есть дуга этой окружности, имеющая длину $\frac{2\pi \cdot 2\sqrt{2}}{3} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$. Тогда линия пересечения сферы и боковой поверхности тетраэдра представляет собой объединение трех таких дуг и имеет длину, равную $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi \cdot 3 = 4\pi\sqrt{2}$.

Ответ: $4\pi\sqrt{2}$.

Литература

- [1] Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 10 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2011.
- [2] Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: Учебник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2010.
- [3] Потоскуев Е. В., Звавич Л. И. Геометрия. 11 кл.: Задачник для общеобразовательных учреждений с углубленным и профильным изучением математики. — М.: Дрофа, 2012.

*Потоскуев Евгений Викторович,
профессор кафедры алгебры и геометрии
Тольяттинского госуниверситета,
кандидат физико-математических наук.*

E-mail: potoskuev @ pisem.net

Заметки по математическому анализу (продолжение)

С. В. Шведенко

Автор продолжает цикл заметок по математическому анализу, начатый в предыдущем номере журнала. В первой заметке проведено логическое исследование на первый взгляд привычных понятий математического анализа “непрерывность функции в точке” и “непрерывность функции на множестве”. Во второй изложен единый подход к определению дифференциалов функции высших порядков.

1. О понятиях непрерывности функции на множестве и в каждой точке множества

Редкое из современных руководств по математическому анализу обходится без следующего определения:

Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Пример функции

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [a, b], \\ 0, & \text{если } x \notin [a, b], \end{cases}$$

непрерывной на отрезке $[a, b]$ ¹, но не являющейся непрерывной в его концевых точках², показывает, однако, что с данным определением не все в порядке, и принятие его невозможно без неукрашающих формулировку (и обычно запоздалых) ограничений и оговорок³.

Обсуждение понятий *непрерывности* функции в точке и на множестве следует предварить их общепринятыми определениями.

Функцию⁴ $y = f(x)$ считают непрерывной в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, т.е. истинно утверждение: “для любого положительного числа (традиционно обозначаемого) ε существует такое положительное число (традиционно обозначаемое) δ , что для любого значения x , отличающегося от x_0 меньше, чем на δ , значение $f(x)$ отличается от значения $f(x_0)$ меньше, чем на ε ”; в символической записи:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

В соответствии с этим определением *непрерывность* функции $y = f(x)$ в каждой точке множества⁵ X подразумевает истинность значения символической формулы

$$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x ((x_0 \in X \wedge |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (1)$$

В эквивалентной формулировке “через последовательности” непрерывность функции $y = f(x)$ в каждой точке множества X означает, что “какова бы ни была точка $x_0 \in X$, для

¹Отрицать *непрерывность* на отрезке функции, *постоянной* на этом отрезке, было бы неуместным позерством.

²В которых функция имеет *разрывы 1-го рода*.

³Например, что речь идет об *открытом* множестве или что подразумевается *непрерывность* функции в точках множества *по этому множеству* (при условии отсутствия у него *изолированных* точек).

⁴*Действительной или комплексной переменной.*

⁵Действительной оси или комплексной плоскости.

любой последовательности точек $\{x_n\}$, сходящейся к значению x_0 , соответствующая ей последовательность значений $\{f(x_n)\}$ сходится к значению $f(x_0)$ ".

Вот стандартное доказательство эквивалентности приведенных формулировок:

1°. Если значение формулы (1) есть истина, то пусть $\{x_n\}$ — любая последовательность точек, сходящаяся к (произвольно взятой) точке x_0 множества X . Если ε — произвольно взятое положительное число, а δ — положительное число, существующее (согласно формуле (1)) для этого ε , то (поскольку $\{x_n\} \rightarrow x_0$) существует натуральное число n_0 со свойством: для всех натуральных $n > n_0$ выполняется неравенство $|x - x_0| < \delta$, а следовательно (в силу формулы (1)) и неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, т.е. последовательность $f(x_n)$ сходится к $f(x_0)$.

2°. Если значение формулы (1) есть ложь, т.е. значение истина имеет ее отрицание

$$\exists x_0 \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x ((x_0 \in X \wedge |x - x_0| < \delta) \wedge (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon) \vee (\neg!f(x)) \vee (\neg!f(x_0))).$$

“есть такая точка $x_0 \in X$ и такое положительное число ε , что каким бы ни было положительное число δ , существует точка x , удаленная от точки x_0 меньше, чем на δ , для которой либо $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, либо значение $f(x)$ не определено (или же не определено значение $f(x_0)$), то последовательно придавая δ значения $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \dots$, можно установить существование последовательности $\{x_n\}$ точек x_n , для которых $|x_n - x_0| < n^{-1}$, но при этом либо $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon$, либо значение $f(x_n)$ не определено. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0 (множества X), но неверно, что последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$.”

Функцию $y = f(x)$ считают непрерывной на множестве X , если истинно утверждение: “каковы бы ни были точка x_0 множества X и положительное число ε , существует такое положительное число δ , что для любой точки x множества X , отстоящей от точки x_0 меньше, чем на δ , значения $f(x)$ и $f(x_0)$ различаются меньше, чем на ε ”; символически:

$$\forall x_0 \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x ((x_0 \in X \wedge x \in X \wedge |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon). \quad (2)$$

В эквивалентной формулировке “через последовательности” непрерывность функции $y = f(x)$ на множестве X означает: “каковы бы ни были точка x_0 множества X и сходящаяся к ней последовательность $\{x_n\}$ точек этого же множества, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к значению $f(x_0)$ ”.

Поскольку требования $x_0 \in X \wedge |x - x_0| < \delta$ и $x_0 \in X \wedge x \in X \wedge |x - x_0| < \delta$ являются различными (если выполнено второе, то выполнено и первое, но не наоборот), понятия непрерывности функции на множестве и ее непрерывности в каждой точке этого множества оказываются несовпадающими.

Несовпадение этих понятий иллюстрируют (помимо примера, приведенного в начале заметки) следующие примеры:

$$а) \text{ функция Дирихле } f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ — рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ — иррациональное число,} \end{cases}$$

непрерывна на любом множестве X , состоящем только из рациональных (или, наоборот, только из иррациональных) чисел⁶, не являясь непрерывной ни в одной точке этого множества;

б) любая функция, заданная на дискретном множестве⁷ X , является непрерывной на этом множестве: каковы бы ни были точки $x, x_0 \in X$, утверждение $x_0 \in X \wedge x \in X \wedge |x - x_0| < \delta$ оказывается (при достаточно малом $\delta > 0$) ложным, а следовательно⁸ утверждение формулы (2) — истинным; говорить же о непрерывности функции в какой-либо точке этого множества бессмысленно.

⁶Если $x_0 \in X$ и $x \in X$, то $f(x) = f(x_0)$, так что значение формулы (2) в данном случае есть истина.

⁷Т.е. множестве, все точки которого являются изолированными: для каждой существует окрестность, не содержащая других точек этого множества.

⁸В соответствии с правилом истинности импликации.

Разбор последнего примера показывает, что если речь идет о функции на *дискретном* множестве, то понятие ее непрерывности на этом множестве оказывается бессодержательным (хотя и осмысленным), а непрерывности в каждой точке этого множества — бессмысленным.

Если множество X является *открытым* (т. е. каждая его точка является *внутренней*), то выполнение условий $x_0 \in X$ и $|x - x_0| < \delta$ влечет (при достаточно малом $\delta > 0$) и выполнение условия $x \in X$, так что из *истинности* формулы (2) вытекает⁹ *истинность* формулы (1). Следует вывод:

для открытых множеств (и только для них) непрерывность функции на множестве означает то же самое, что непрерывность в каждой точке этого множества.

В частности, *непрерывность* функции на *интервале* есть ее *непрерывность* в каждой точке этого интервала, тогда как *непрерывность* функции на *отрезке* есть ее *непрерывность* в каждой *внутренней* точке этого отрезка, а также *непрерывность справа* в его левой и *непрерывность слева* в его правой *концевых* точках.

В связи с этим следует отметить, что основоположники современного понимания *непрерывности функции* — чешский математик Больцано (Bolzano Bernard, 1781–1848) и французский математик Коши (Cauchy Augustin-Louis, 1789–1857) — определяли *непрерывность функции* исключительно на *открытых промежутках*, по-видимому, считая, что только для таких совокупностей значений переменной данное понятие является разумным и содержательным. Вот что можно прочесть в работах Больцано (1817 г.) и Коши (1821 г.):

“... согласно правильному объяснению, понимают под выражением, что функция $f(x)$ изменяется по закону непрерывности для всех значений x , которые лежат внутри или вне известных границ, лишь то, что, если x какое-нибудь из этих значений, тогда разность $f(x+\omega) - f(x)$ может быть сделана меньше, чем любая заданная величина, если можно принять ω столь малым, сколько мы хотим”¹⁰.

“Пусть $f(x)$ — функция переменной x , и предположим, что для каждого значения x между двумя данными пределами эта функция принимает единственное и конечное значение... В этом предположении функция $f(x)$ будет между двумя заданными пределами функцией непрерывной этой переменной, если для любого значения x , промежуточного между этими пределами, абсолютная величина разности $f(x + \alpha) - f(x)$ неограниченно убывает вместе с абсолютной величиной α ”¹¹.

Разумеется, можно предложить “волевой” способ отождествить понятия *непрерывности функции на множестве* и *непрерывности функции в каждой точке множества* — трактовать (хоть и несколько неуклюже) содержание формулы (2) как “*непрерывность функции $y = f(x)$ в каждой точке множества X по этому множеству*”¹². Помимо тяжеловесности к недостаткам данной трактовки относится необходимость предварять ее требованием, чтобы каждая точка множества X была *предельной* для этого множества: если в *окрестности* какой-то точки $x_0 \in X$ нет *отличных* от нее точек $x \in X$, то термин “*непрерывность функции в точке x_0 по множеству X* ” оказывается неприложимым, так как по своей сути подразумевает *сопоставление* значений функции в самой точке x_0 и точках, неограниченно приближающихся к ней.

⁹В соответствии с *принципом силлогизма*: $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

¹⁰Цитировано по книге Э.Кольмана [1] (с. 174–175).

¹¹В оригинале ([2], с. 34): “Soit $f(x)$ la fonction de la variable x , et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie ... Cela pose, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées a la variable x , fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x + \alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α ”

¹²В смысле выполнения для любой точки $x_0 \in X$ соотношения $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in X}} f(x) = f(x_0)$. В частности, с принятием этой трактовки упоминавшаяся выше *функция Дирихле* оказывается *непрерывной* в любой точке действительной оси либо по подмножеству *рациональных*, либо по подмножеству *иррациональных* чисел.

Литература

- [1] Кольман Э. Бернард Больцано. М.: Изд-во АН СССР, 1955.
 [2] Cauchy A.-L. Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique. Paris, 1821.

2. К определению второго дифференциала функции

Если введение понятия *второй производной* (т.е. *производной производной*) функции не встречает никаких затруднений, то понятие *второго дифференциала* оказывается настоящим камнем преткновения для значительной части как осваивающих математический анализ, так и преподающих этот предмет. С разъяснением того, что есть *дифференциал дифференциала* функции, дело обстоит примерно так же, как с ответом на вопрос, почему при взгляде на отражение в зеркале *право* и *лево* меняются местами а *верх* и *низ* — нет (именно так, а не наоборот): многие берутся в два счета это объяснить, однако предлагаемая аргументация обычно приносит не желаемое понимание, а лишь неудовлетворенность и раздражение.

Предпринятая в этой заметке попытка истолковать понятие *второго дифференциала* функции базируется на том (ныне общепринятом) определении *дифференциала функции*, которое дал в конце XVIII в. португальский математик да Кунья (da Cunha Joseph-Anastase, 1744—1787) в удивительном по четкости и краткости изложения руководстве [1]. Вот сформулированное им определение (с точностью до накопившихся за два века различий в обозначениях и терминологии¹³).

Дифференциалом функции $y = f(x)$ (независимой переменной x) в точке x_0 называют величину, обозначаемую df (или dy) и зависящую от величины¹⁴ $\Delta x = x - x_0$, которая:

- а) пропорциональна Δx (т.е. отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ есть константа);
 б) отличается от величины¹⁵ $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ на бесконечно малую относительно Δx при стремлении Δx к нулю \rightarrow (т.е. $\frac{\Delta f}{\Delta x} - \frac{df}{dx} \rightarrow 0$)¹⁶.

Из данного определения сразу следует, что функция $y = f(x)$ имеет *дифференциал* (является *дифференцируемой*) в точке x_0 в том и только в том случае, когда она имеет в этой точке *производную* $f'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{df}{dx}$.

Далее следует известная процедура замены в знаменателе последней дроби Δx на dx (с тем обоснованием, что *независимую* переменную x можно рассматривать как *функцию самое себя*, а для нее $dx = \Delta x$) и установление (на основе *теоремы о производной сложной функции*) свойства *инвариантности* записи¹⁷ $df = f'(x_0)dx$ — ее справедливости (в отличие от записи $df = f'(x_0)\Delta x$) и в случае, когда x является не *независимой* переменной, а (*дифференцируемой*) *функцией* другой переменной.

Действуя по схеме вышеприведенного определения и предполагая, что функция $y = f(x)$ имеет *дифференциал* df не только в точке x_0 , но и в некоторой ее *окрестности*, а переменная x (при условии ее *независимости*) допускает во всех точках, близких к x_0 , такое же приращение Δx , как и в самой точке x_0 , можно дать следующее определение *второго дифференциала* функции (как *дифференциала* ее *дифференциала*).

Второй дифференциал функции $y = f(x)$ (независимой переменной) x в точке x_0 есть величина, обозначаемая d^2f (или d^2y) и зависящая от приращения Δx переменной x , которая:

¹³К примеру, *дифференциал* функции да Кунья называет ее *флюксийей*.

¹⁴Приращения переменной x в точке x_0

¹⁵Приращения функции в точке x_0 (отвечающего приращению Δx переменной x).

¹⁶В оригинале (точнее, его французском переводе [1], с. 197): "... on designe de meme par $d\Gamma x$, et on appelle fluxion de Γx , la grandeur qui rendroit constante, et $\frac{\Gamma(x+dx) - \Gamma x}{dx} - \frac{d\Gamma x}{dx}$ infinitieme ou zero, si dx devoit infinitieme, et si tout ce qui ne depend pas de dx demeuroit constant".

¹⁷Или, как говорят, *инвариантности формы дифференциала*.

а) пропорциональна $(\Delta x)^2$ (т.е. отношение $\frac{d^2 f}{(\Delta x)^2}$ есть константа);

б) отличается от величины¹⁸ $\Delta df = f'(x_0 + \Delta x)\Delta x - f'(x_0)\Delta x$ на бесконечно малую относительно $(\Delta x)^2$ при стремлении Δx к нулю (т.е. $\frac{\Delta df}{(\Delta x)^2} - \frac{d^2 f}{(\Delta x)^2} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} 0$).

Пример. Если $f(x) = x^3$, то для любой точки x_0 (действительной оси или комплексной плоскости) и произвольно взятого приращения Δx :

$$\Delta f = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3, \quad a \quad df = 3x_0^2\Delta x;$$

$$\Delta df = 3(x_0 + \Delta x)^2\Delta x - 3x_0^2\Delta x = 6x_0(\Delta x)^2 + 3x_0(\Delta x)^3, \quad a \quad d^2 f = 6x_0(\Delta x)^2.$$

Прямым следствием данного определения является утверждение:

Функция $y = f(x)$ имеет второй дифференциал (является дважды дифференцируемой) в точке x_0 в том и только в том случае, когда она имеет в этой точке вторую производную:

$$f''(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta df}{(\Delta x)^2};$$

обычная замена Δx на dx (ввиду независимости переменной x) приводит к записи

$$\boxed{d^2 f = f''(x_0)dx^2}.$$

Следует теперь перейти к случаю, когда $y = f(x)$ — функция переменной x , которая сама является функцией $x = \varphi(t)$ другой (пока считающейся независимой) переменной t . Если функция $x = \varphi(t)$ имеет в точке t_0 вторую производную $\varphi''(t_0)$, а функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 = \varphi(t_0)$ вторую производную $f''(x_0)$ (из чего следует, что первые производные $f'(x)$ и $\varphi'(t)$ этих функций существуют в окрестностях точек t_0 и x_0), то композиция этих функций $y = f(\varphi(t))$ имеет в окрестности точки t_0 производную $y' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$, а в точке t_0 вторую производную

$$y''(t_0) = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0))^2 + f'(\varphi(t_0))\varphi''(t_0).$$

Как следствие, функция $y = f(\varphi(t))$ имеет в точке t_0 второй дифференциал

$$d^2 f = y''(t_0)(\Delta t)^2 = f''(\varphi(t_0))(\varphi'(t_0)\Delta t)^2 + f'(\varphi(t_0))\varphi''(t_0)(\Delta t)^2,$$

принимающий¹⁹ вид $\boxed{d^2 f = f''(x_0)dx^2 + f'(x_0)d^2 x}$ — отличный от того, который он имел в случае независимой переменной x ; обычно это выражают словами: свойством инвариантности формы второй дифференциал не обладает.

Замечание. При выводе последней формулы (второго дифференциала функции $y = f(x)$ зависимой переменной $x = \varphi(t)$) было сделано предположение, что t — независимая переменная. Это предположение можно теперь снять. Именно, если переменная t сама является функцией $t = \psi(\tau)$ какой-то переменной τ (временно предполагаемой независимой), так что $y = f(\varphi(\psi(\tau)))$, то поскольку $y'(\tau) = f'(\varphi(\psi(\tau)))\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau)$, а

$$y''(\tau) = f''(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau))^2 + f'(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi''(\psi(\tau))(\psi'(\tau))^2 + \varphi'(\psi(\tau))\psi''(\tau)),$$

соотношения, $t = \psi(\tau)$, $dt = \psi'(\tau)\Delta\tau$, $d^2 t = \psi''(\tau)(\Delta\tau)^2$, а также $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$ и $d^2 x = \varphi''(t)dt^2 + \varphi'(t)d^2 t$ позволяют записать:

¹⁸ Приращение дифференциала функции в точке x_0 , отвечающего приращению Δx переменной x .

¹⁹ Если учесть, что $\varphi'(t_0)\Delta t$ и $\varphi''(t_0)(\Delta t)^2$ — это соответственно дифференциал dx и второй дифференциал $d^2 x$ функции $x = \varphi(t)$ (независимой переменной t) в точке t_0 .

$$\begin{aligned}
 d^2 y &= y''(\tau)(\Delta\tau)^2 = f''(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi'(\psi(\tau))\psi'(\tau)\Delta\tau)^2 + \\
 &\quad + f'(\varphi(\psi(\tau)))(\varphi''(\psi(\tau))(\psi'(\tau)\Delta\tau)^2 + \varphi'(\psi(\tau))\psi''(\tau)(\Delta\tau)^2) = \\
 &= f''(\varphi(t))(\varphi'(t)dt)^2 + f'(\varphi(t))(\varphi''(t)dt^2 + \varphi'(t)d^2t) = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2x.
 \end{aligned}$$

Разумеется, изложенная схема с успехом применима для введения *третьего дифференциала* и дифференциалов следующих порядков (при понимании *дифференциала порядка n* функции $y = f(x)$ как *дифференциала* ее *дифференциала порядка $n - 1$*). Реализация этой схемы не встречает принципиальных затруднений.

Литература

- [1] Da Cunha J.-A. Principes mathematiques. Bordeaux, 1811.

Шведенко Сергей Владимирович,
 доцент кафедры высшей математики
 Национального исследовательского
 ядерного университета (МИФИ),
 кандидат физ.-мат. наук.

E-mail: sershvedenko@mail.ru

Экспериментальная математика¹

А. В. Жуков

Лекция, прочитанная на Малом механико-математическом факультете МГУ 4 декабря 2010г., публикуется с последующим продолжением.

Вступительное слово

Сегодня мы будем *экспериментировать с числами*.

Физику для экспериментов нужны лаборатории и дорогостоящее оборудование, математику — бумага и карандаш.

Величайший математик всех времён Леонард Эйлер говорил: “Иногда мой карандаш бывает умнее меня”.

Наш современник Вячеслав Викторович Произволов полагает, что каждый математик обязан быть экспериментатором, иначе его ждёт неудача.

У нас роль карандаша будет выполнять графическая система Windows, роль бумаги — для меня — экран компьютера, для вас — этот (условно) белый экран на стене. Я надеюсь, что ваше воображение и способность к абстрагированию помогут отфильтровать изъёмы антуража и сформировать то представление об истинных изображениях, которые должны были бы быть.

Насколько уместно говорить об экспериментах в математике? Общественное мнение отрицает какую бы то ни было связь между этими двумя понятиями. Математика, дескать, — наука исключительно точная и строгая, построенная на безукоризненной логической основе, в ней нет места фантазиям и экспериментам. Придумали даже такой афоризм (я, к сожалению, не знаю его автора): “Математика — это вам не физика, где можно *химичить*”. Но на самом деле такая точка зрения — чистейшее заблуждение².

Я приведу два высказывания **творцов** математики.

¹Лекция содержится на CD, выпущенном издательством “Школьная пресса” в качестве приложения к 7 номеру журнала “Математика в школе” за 2011 год. В данной публикации по сравнению с электронной версией расширен иллюстративный ряд.

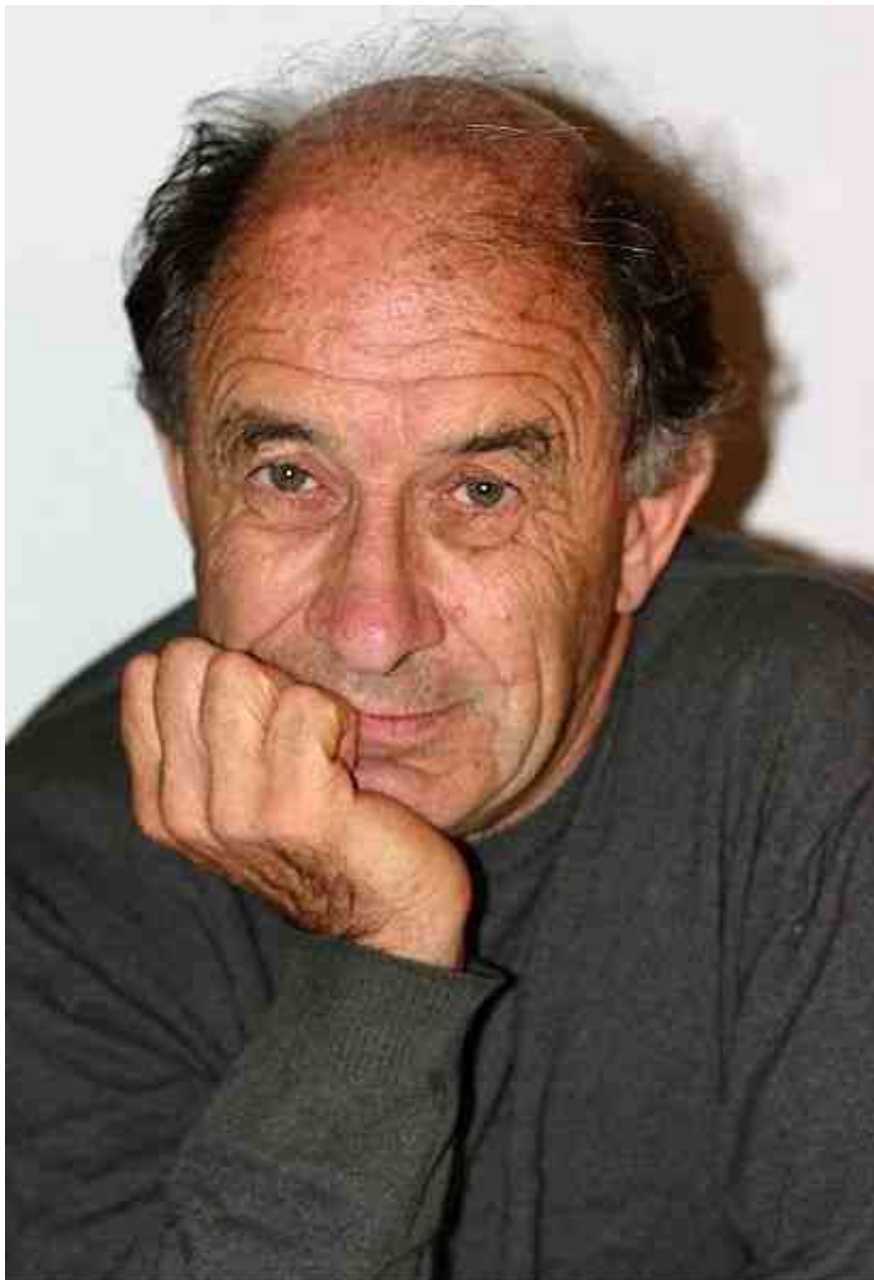
²Если под математикой понимать **бухгалтерское дело**, то — да, там особо не “нахимичишь”, а если и “нахимичишь”, то потом можешь горько пожалеть об этом. Но даже бухгалтеры, с риском для своей репутации, иногда отваживаются на эксперименты.



Свойства чисел, известные нам сегодня, по большей части были открыты путём наблюдения и были открыты задолго до того, как их истинность была подтверждена строгими доказательствами. Имеется даже много свойств чисел, с которыми мы хорошо знакомы, но которые мы всё ещё не в состоянии доказать; только наблюдения привели нас к их познанию.

Леонард Эйлер.

Euler. Specimen de usu observationum in mathesi pura, Opera Omnia, ser. 1, vol. 2, p. 459. Цитируется по книге: Д. Пойа. Математика и правдоподобные рассуждения, М.: Наука, 1975, с.25.



В своём курсе лекций я расскажу о нескольких новых направлениях математических исследований. Все они основаны на численных экспериментах. Рассматривая примеры, вроде $5 \cdot 5 = 25$, $6 \cdot 6 = 36$, мы догадываемся о гипотезах, вроде $7 \cdot 7 = 47$, а дальнейшие эксперименты либо подтверждают их, либо опровергают.

Например, гипотеза Ферма (о неразрешимости при целом $n > 2$ уравнения в натуральных числах $x^n + y^n = z^n$) была замечена им при попытках найти решения. Эта гипотеза привела к созданию целой науки, но доказана она была только сотни лет спустя.

Владимир Игоревич Арнольд, “Экспериментальное наблюдение математических фактов”, М.: Издательство МЦНМО, 2006, с. 4.

Фотография Светланы Третьяковой, Wikipedia

Апелляцию к авторитетам многие — совершенно справедливо — не считают убедительным аргументом. Поэтому я сейчас приведу вам **три** других **доказательства** того, что **математика — наука экспериментальная**. Это будут **три сюжета**, или **три этюда**.

В каждом этюде используются математические программы, которые я написал под Windows специально для этой лекции — они находятся в свободном доступе на сайте math.child.ru/podumai/labor/.

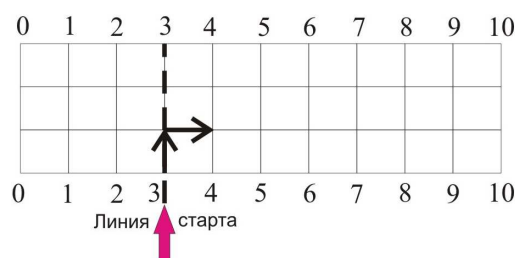
Инструкции по работе с этими программами будут приводиться непосредственно в самой лекции.

Внимание: мои программы — это программы-самоделки, они не прошли “заводских испытаний”. Поэтому я не гарантирую, что они будут корректно работать при задании экстремальных или сверхэкстремальных значений исходных данных. Кроме того, существует извечная проблема совместимости версий операционных систем. Если программа работала, но вдруг заартачилась, — советую её просто перезапустить. Для тех экспериментов, о которых будет вестись речь ниже, достаточно выбирать рекомендуемые в лекции опции, и тогда всё будет работать правильно. Ну, и остаётся ещё один радикальный выход: написать программу самому (“Самое лучшее программное обеспечение — это МОЁ программное обеспечение” (из программистского фольклора)).

Доказательство первое. Алгоритм “Стежок”

Идея алгоритма “Стежок” очень простая², см. рисунок.

1. Выберем произвольный **базовый** прямоугольник размера $m \times n$, например, 10×3



Зафиксировав какую-либо линию старта (на рисунке это 3-я линия старта, соответствующая правой стороне третьего квадрата слева), начинаем “вышивать” делая поочерёдно: стежок вверх – стежок вправо, стежок вверх – стежок вправо, если нельзя двигаться вверх, — двигаемся вниз, если нельзя двигаться вниз, — двигаемся вверх, если нельзя двигаться вправо, — двигаемся влево, и т.д. Процесс завершается, когда мы повторно попадаем на линию старта либо на полу, либо на потолке (при *параметре* = 1 в программе. *Параметр* задаёт количество разрешённых попаданий в эти точки, при *max* = 4 попаданий происходит гарантированный выход на ту же самую траекторию, но этот выход может произойти и раньше). Вот и всё.

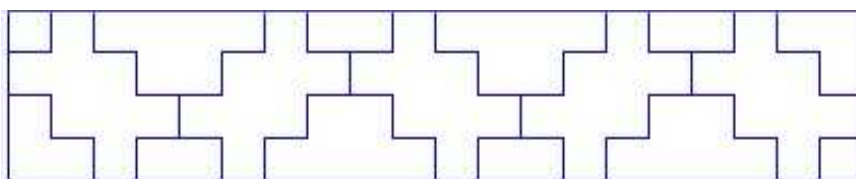
Казалось бы, при таком незатейливом алгоритме, произвольно выбирая размеры прямоугольника и квадрат старта, вряд ли можно получить что-то интересное. Но ведь из семечка может вырасти большое растение, из жёлудя — огромный и бесконечно разнообразный дуб. Давайте проведём серию экспериментов. Алгоритм “Стежок” можно реализовывать на странице ученической тетради в клеточку, вооружившись единственным инструментом — ручкой или карандашом, но мы привлечём компьютер.

Запустить программу Ornament

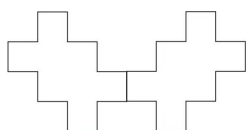
Эксперимент.

²Она изложена в заметке автора “Алгоритм «Стежок»” — “Квант”, 1992, №5, стр. 64.

размер ячейки: 40
 длина: 20
 высота: 4



При некотором воображении в фигурках можно увидеть 5 “каратистов”: две первые пары “бьют друг друга ногами”,

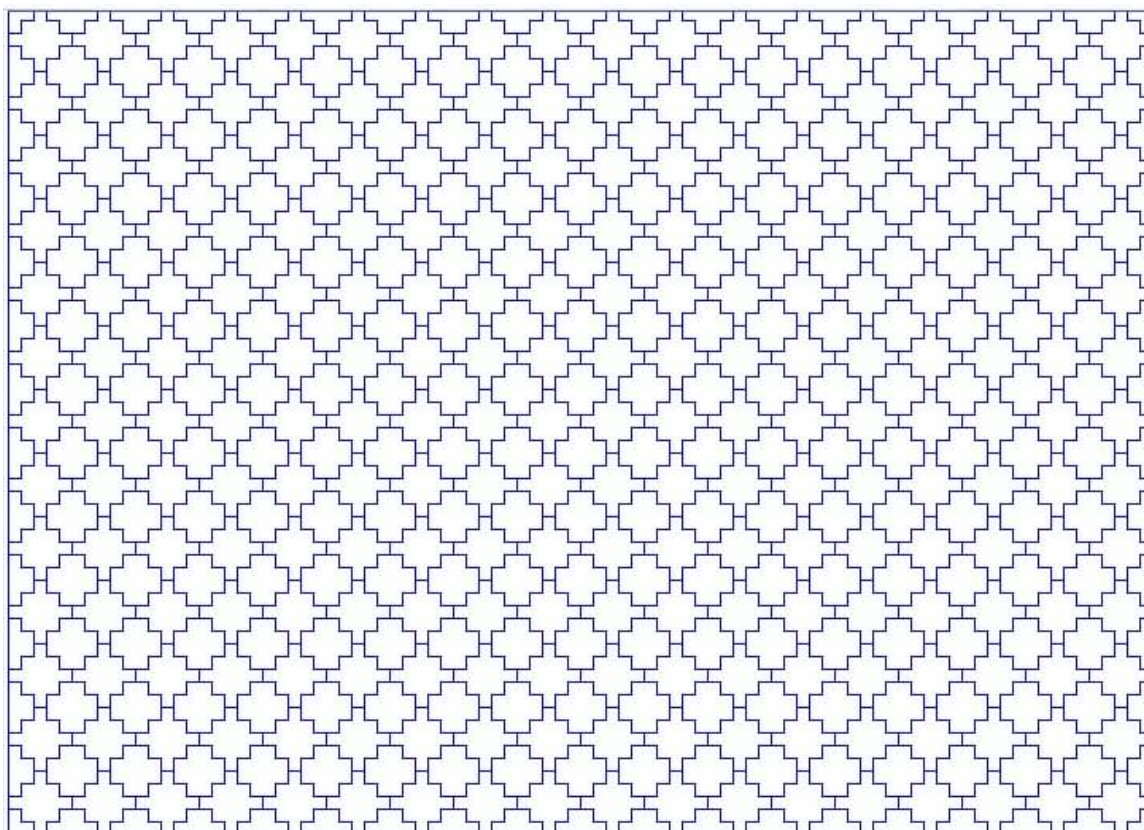


а пятый “лупит стенку”. Как вы думаете — почему именно 5? (Ответ: потому что $20 : 4 = 5$). Ага! Значит, алгоритм “Стежок” рассказывает нам о тайнах делимости чисел!

Эксперимент.

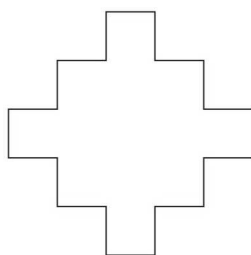
Нажать кнопку “Очистить”³;

размер ячейки: 8
 длина: 90
 высота: 65



Если мы подсчитаем, сколько укладывается вот таких фигурок

³Это нужно делать перед каждым экспериментом в данной программе.



в базовом прямоугольнике по длине, то получим 18, а по ширине 13.

Почему? Какая связь между числами 90, 65 и 18, 13?

Эта задачка посложнее предыдущей. Подсказка: $\text{НОД}(90, 65) = 5$.

Ответ: $90 : 5 = 18, 65 : 5 = 13$.

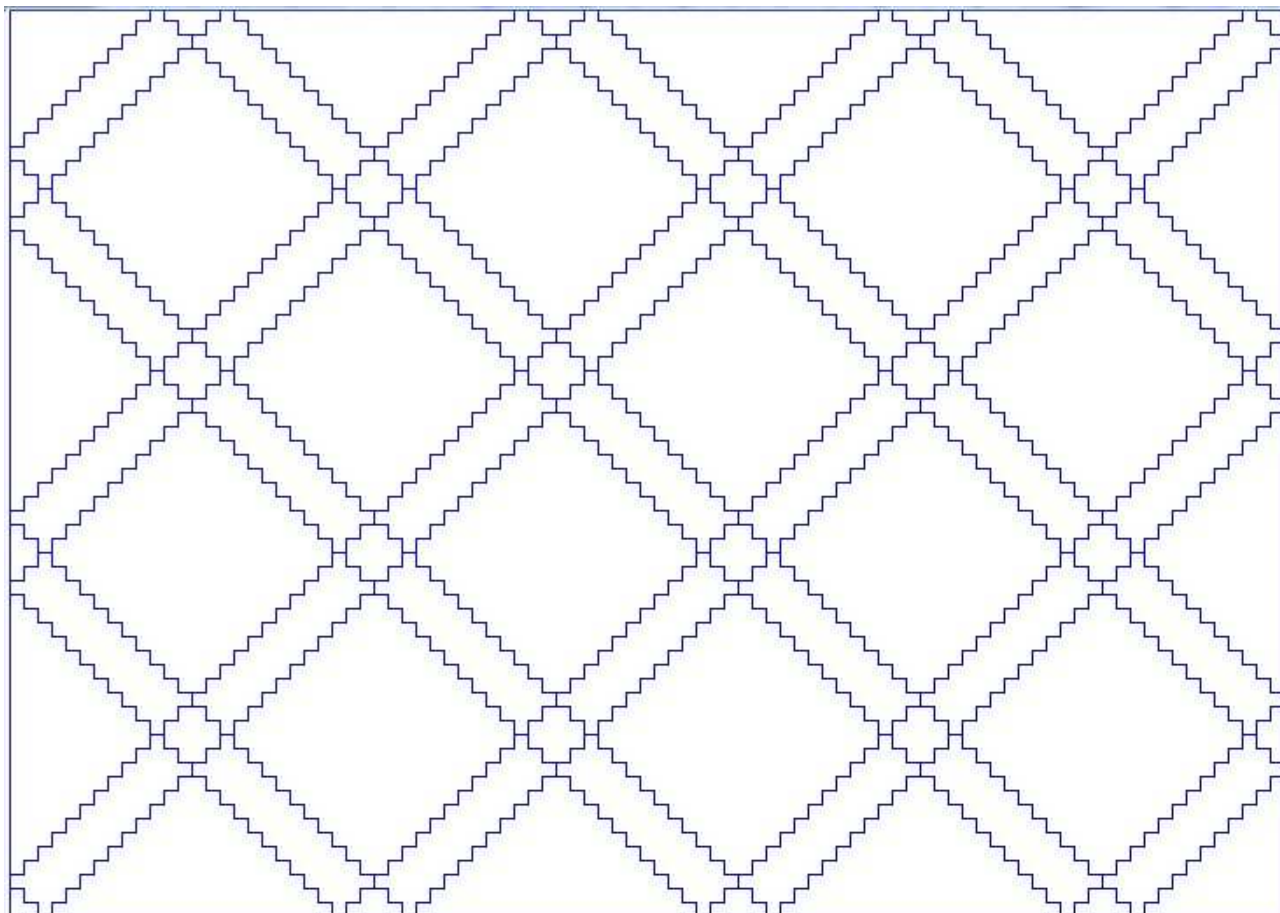
Ага! Значит, в некоторых случаях алгоритм “Стежок” косвенно помогает находить *наибольший общий делитель* двух натуральных чисел. Для этого достаточно разделить длину прямоугольника на количество фигурок, укладываемых по длине, или разделить ширину прямоугольника на количество фигурок, укладываемых по высоте.

Интересно, а что будет, если выбрать другие размеры прямоугольника?

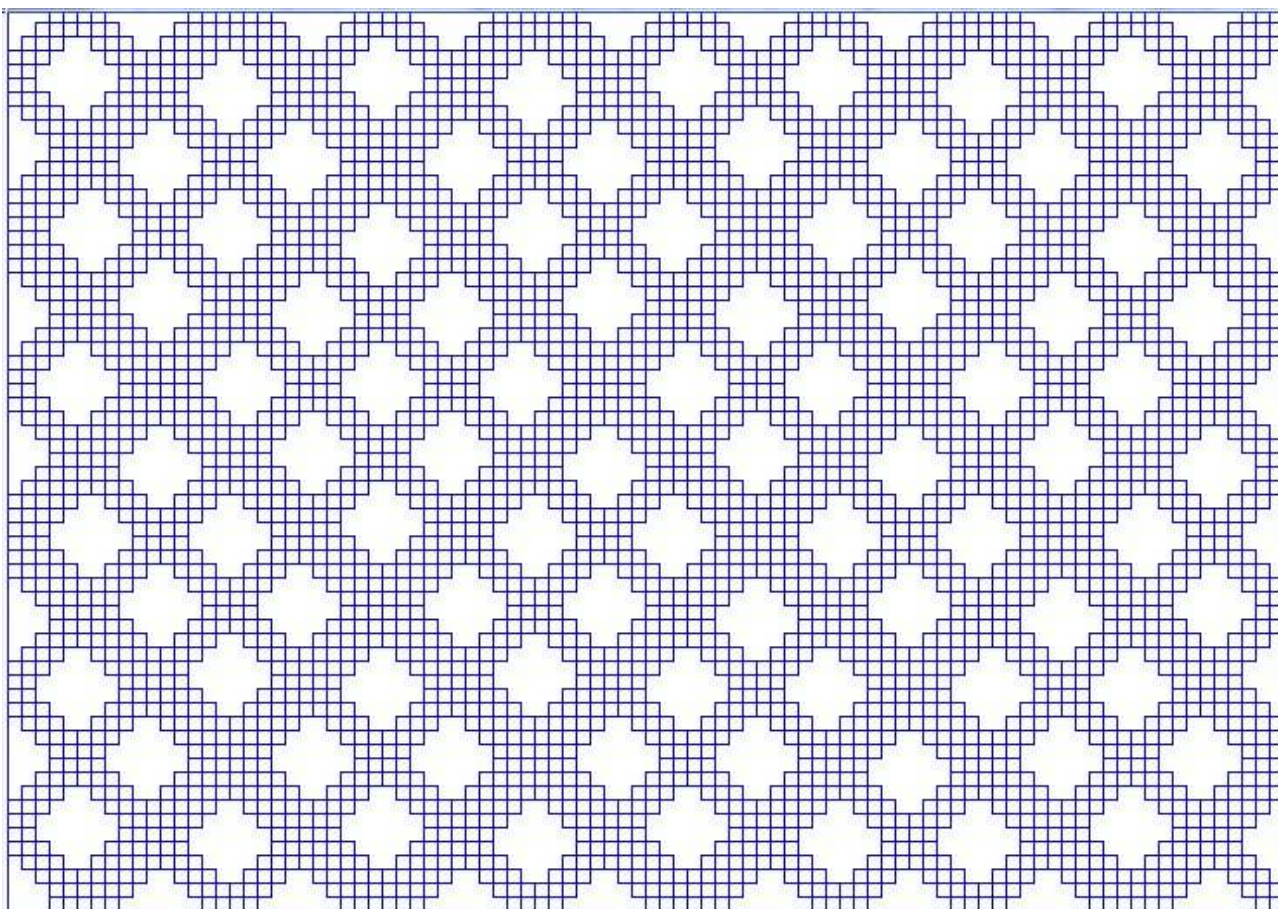
Эксперимент.

длина: **91**

высота: **65**



По длине получили 7 ступенчатых прямоугольников, по высоте 5. Почему?



(НОД(91, 65) = 13; 91 : 13 = 7; 65 : 13 = 5).

Наша гипотеза о способе вычисления НОД подтверждается.

А теперь я задам взаимно простые размеры прямоугольника.

Эксперимент.

длина: **92**

высота: **65**

Как вы думаете: что получится в этом случае - неужто сплошное заполнение базового прямоугольника?

Проверяем: см. рисунок выше

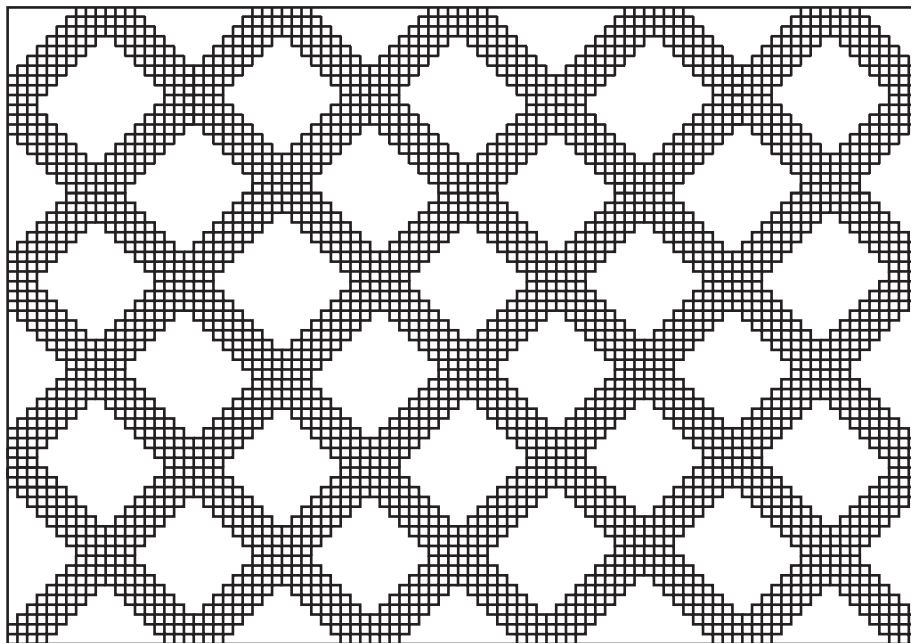
Да, некая загадка...

А если взять

Эксперимент.

длина: **93**

высота: **65**



- Да, тоже непонятно:

Оказывается, алгоритм “Стежок” позволяет отслеживать какие-то **совсем не простые** взаимоотношения в мире простых чисел!

Обратим внимание на *макроструктуру* полученного орнамента. Широкая полоса выходит из левого нижнего угла и заканчивается в правом нижнем углу, отмеряя по длине 5 треугольников, а по высоте — три с половиной. Точно такую же структуру имеют узоры, полученные при других исходных данных.

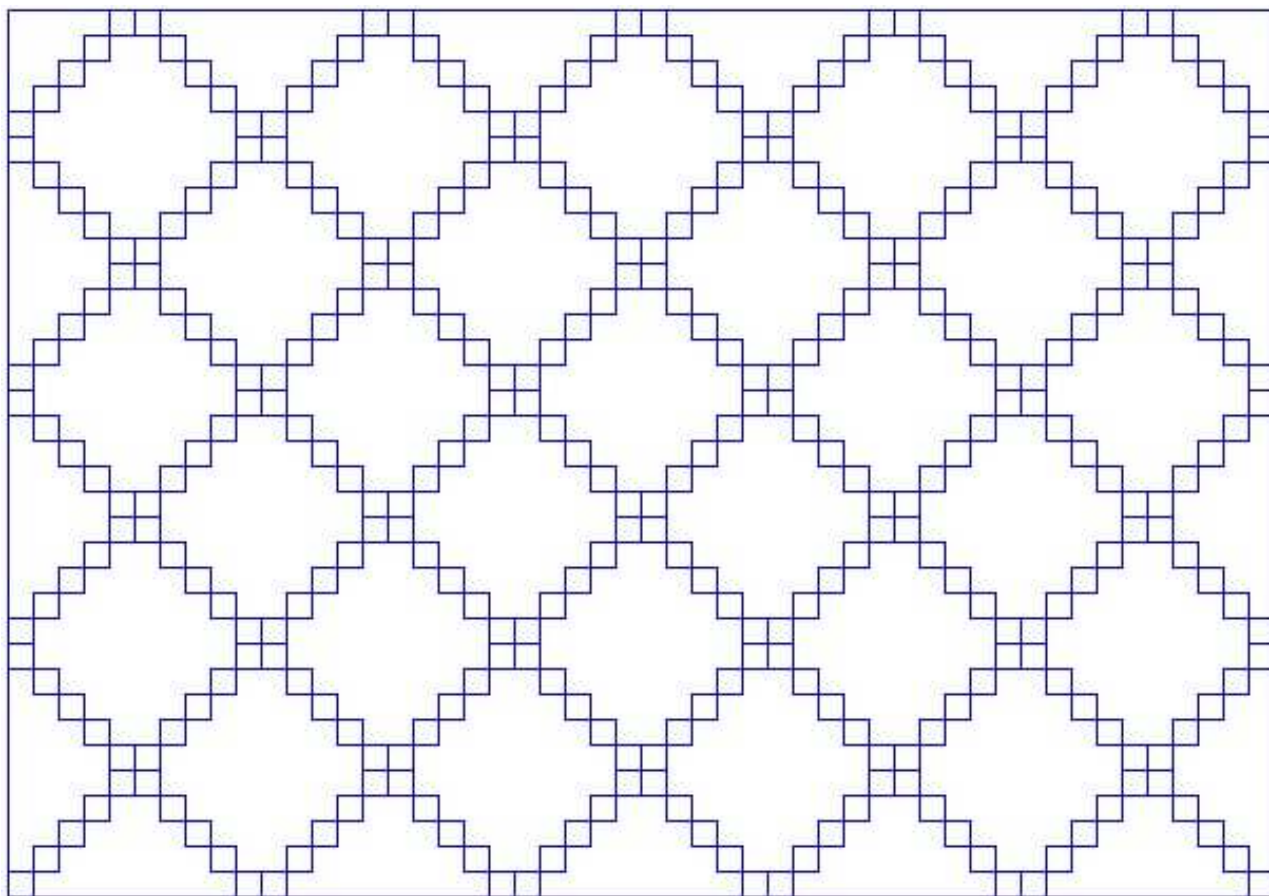
Эксперимент.

квадрат старта: 1

размер ячейки: 12

длина: 50

высота: 35



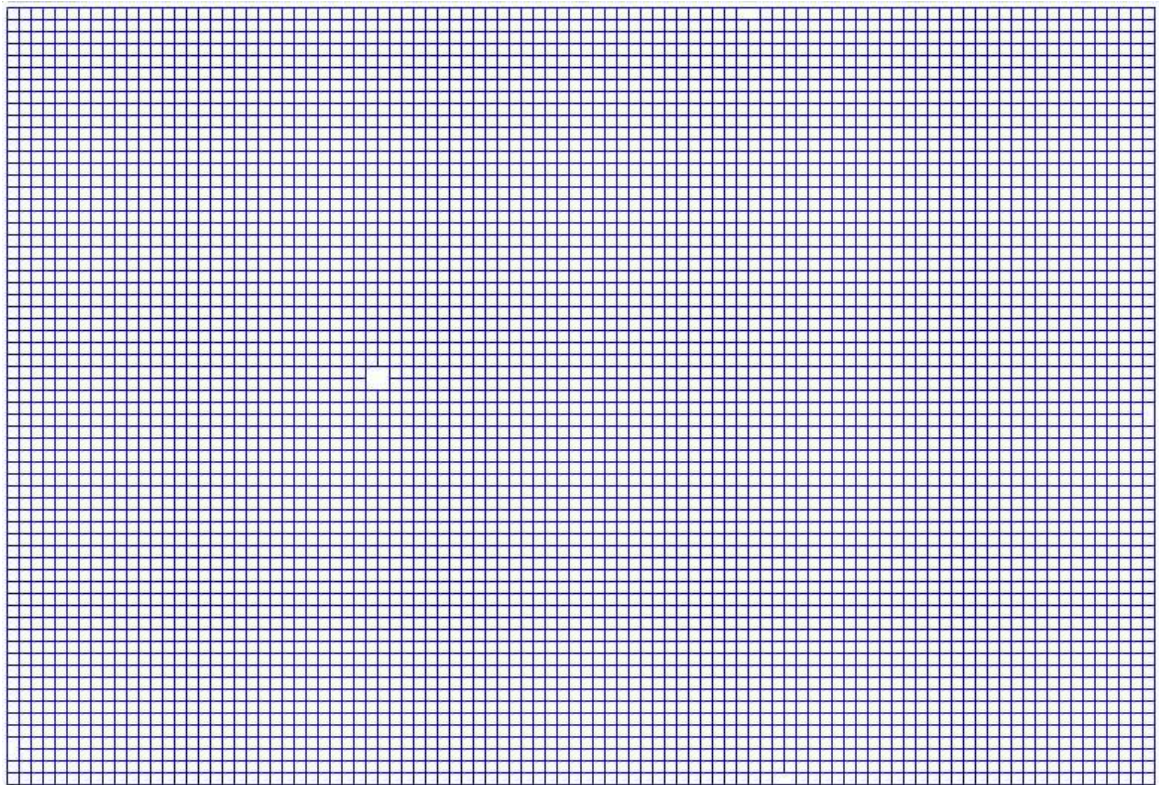
А вот различные представления греческой буквы α :

Эксперименты.

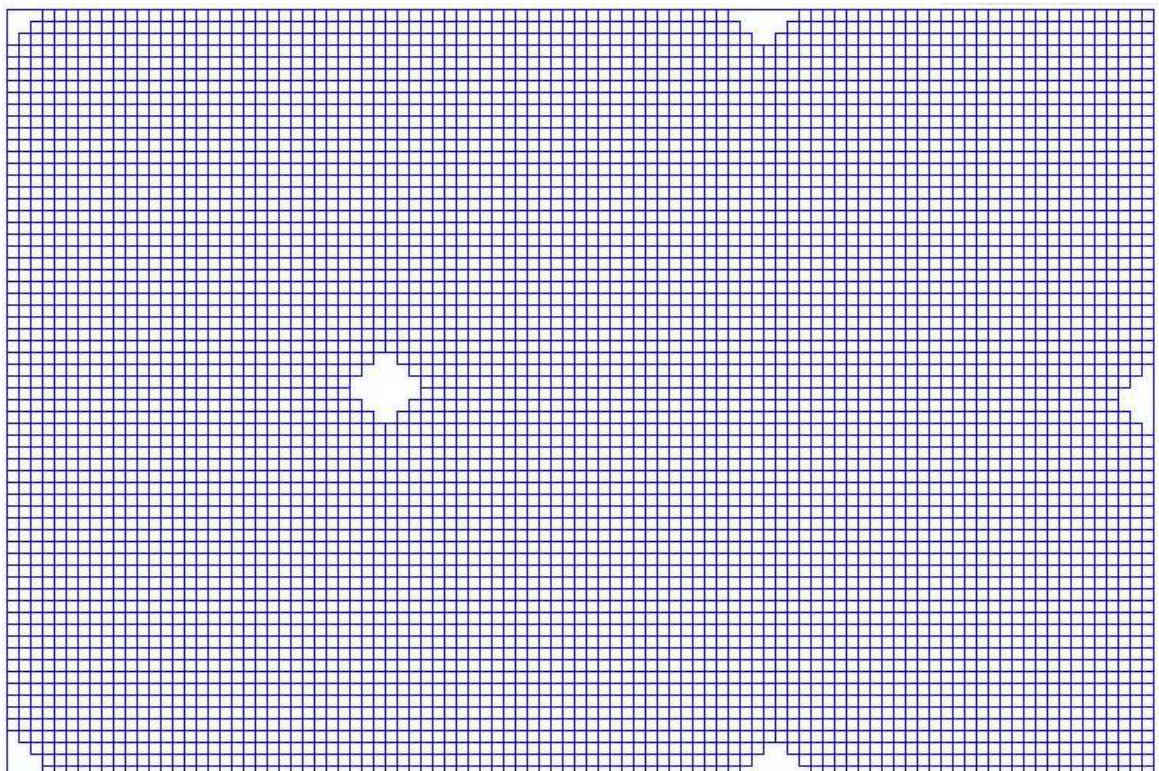
1) **квадрат старта: 3** - здесь α не видна, но она есть - см. дислокации по углам и в центре
размер ячейки: 8

длина: 96

высота: 65

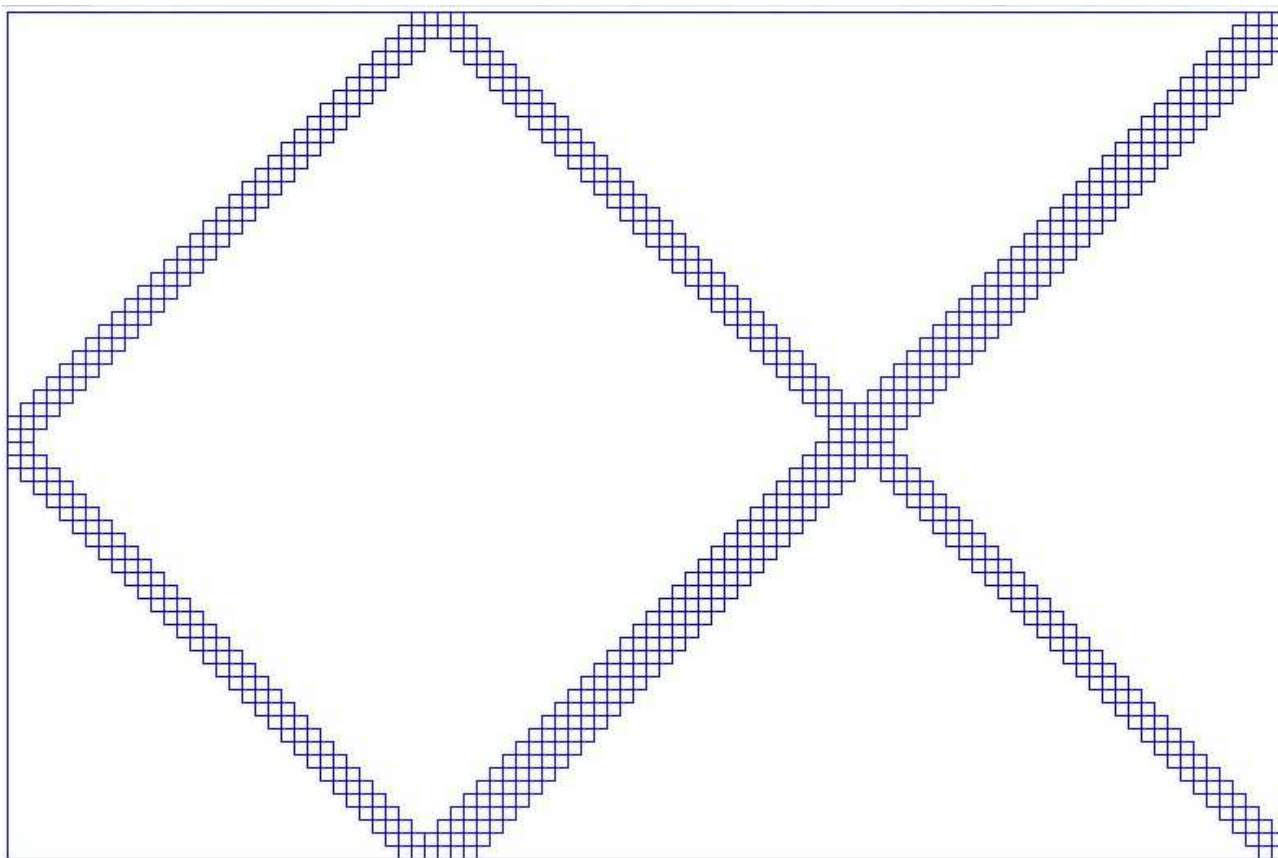


2) длина: 97 - здесь α видна лучше;



3) кв. старта: 35 - а здесь - совсем хорошо.

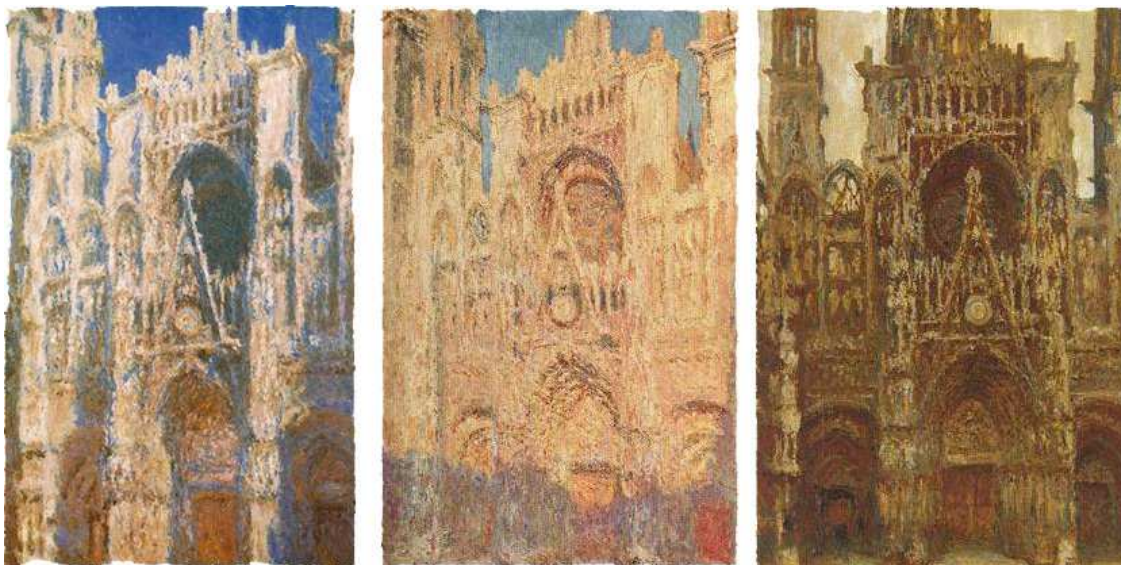
длина: 98



Вопросы для самостоятельных исследований.

1. При каких исходных параметрах получаются похожие узоры?
2. Попробуйте построить классификацию орнаментов в зависимости от исходных данных.

А теперь я вам покажу композицию с условным названием: “Руанский собор в разное время суток”. Известный французский импрессионист Клод Моне (1840–1926) нарисовал серию картин “Руанский собор” — в общем количестве 50, на которых изобразил одно и то же архитектурное сооружение в различное время суток. На картинках ниже представлены три его произведения из этой серии. “Только Клод Моне мог превратить огромную массу известняка в чистую вибрацию света” — отзывались о его работах художественные критики.



Только Клод Моне мог превратить огромную массу известняка в чистую вибрацию света.
50 видов величественного готического фасада. От утренней зари до вечерних сумерек.

Эксперименты.

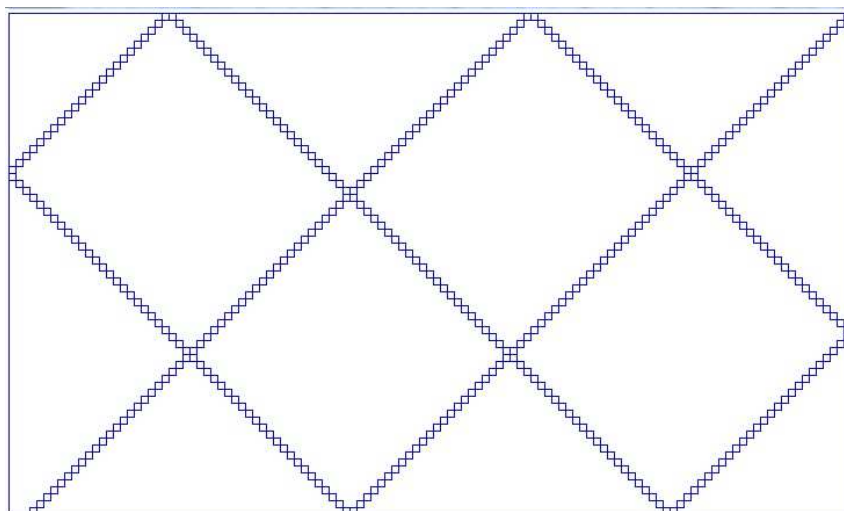
квадрат старта: 3

размер ячейки: 6

длина: 121

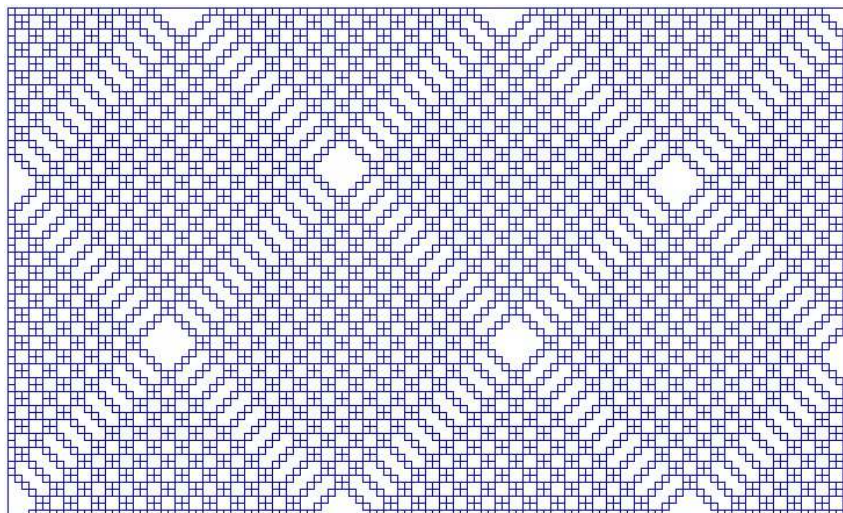
высота: 72

— “Руанский собор, утро” — простой светлый узор.

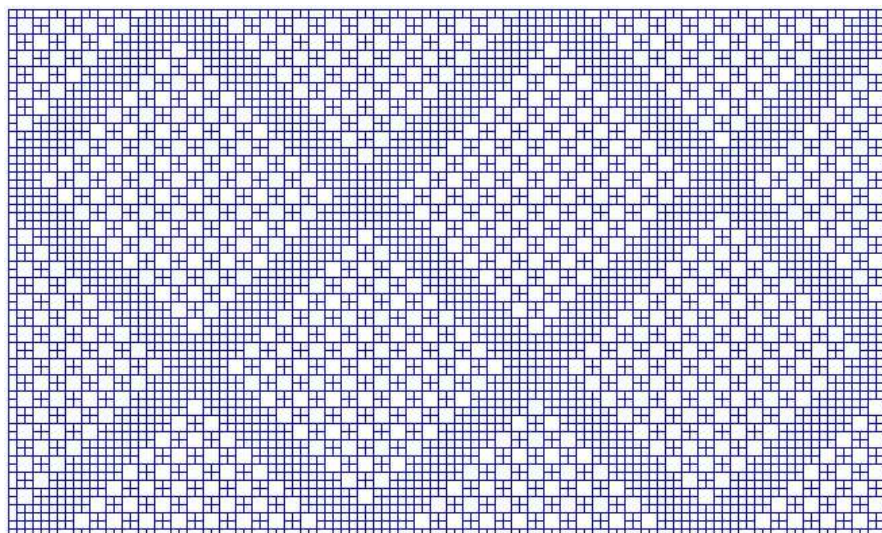


Кстати, — это проекция так называемого “простого узла”: если таким образом переплести шнурок, в точках взаимопересечения заводя конец то вниз, то вверх, а потом потянуть за концы, то получится простой узел.

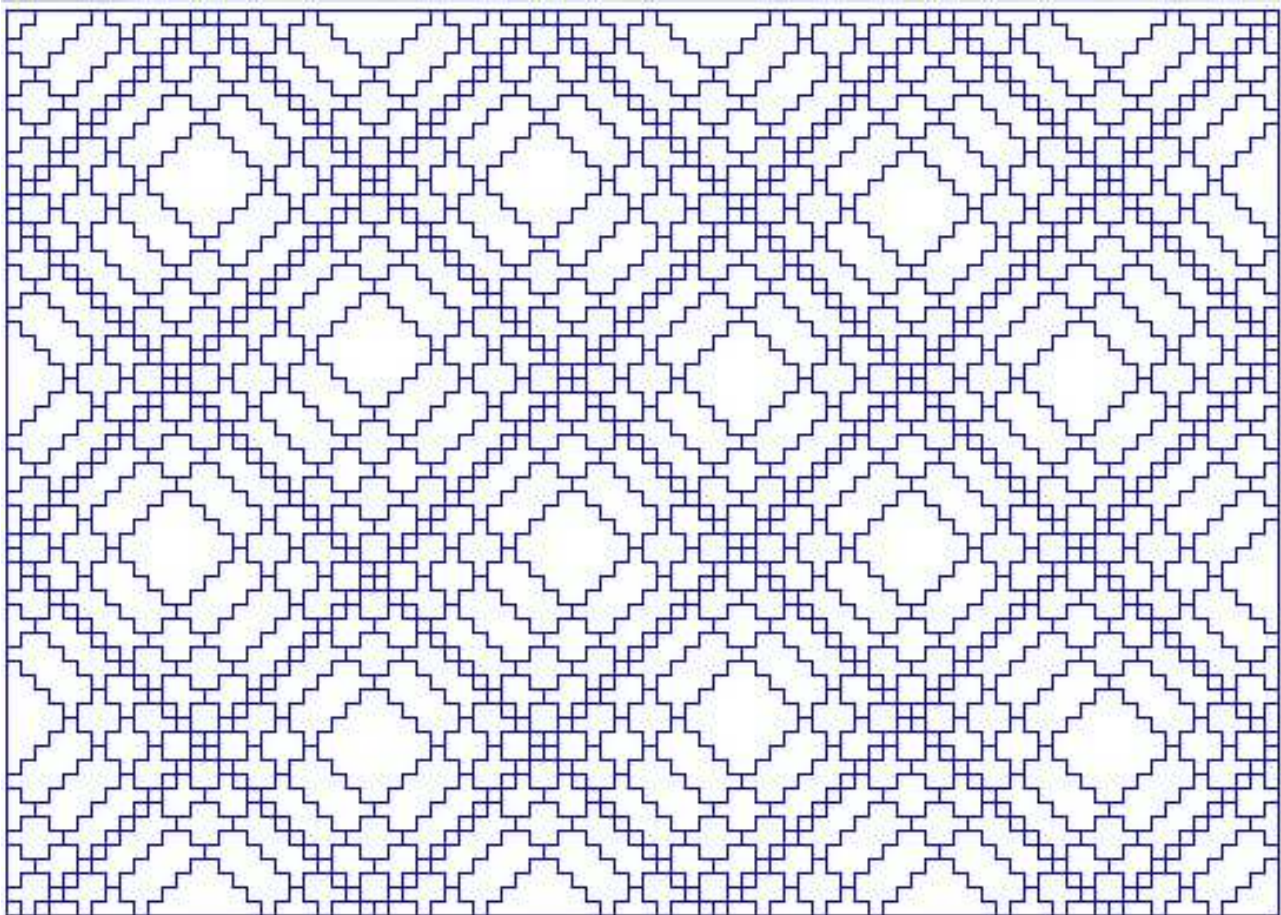
высота: 73 — “день”, тот же макро-узор, но наблюдается “насыщенное богатство красок”;



длина: 109 — “вечер”, тот же макро-узор, но в сумрачных тонах.
высота: 65

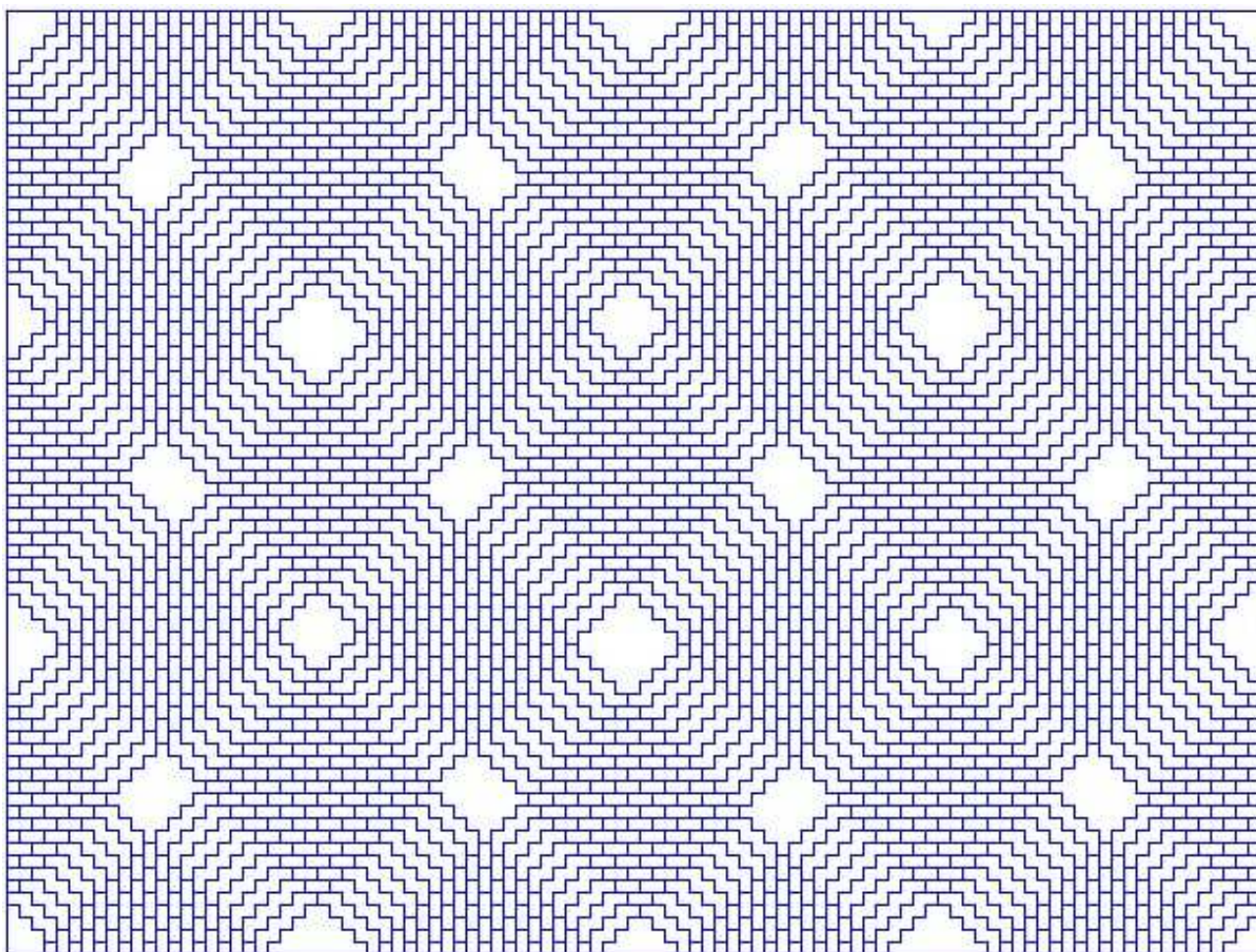


А вот с такими параметрами получается эскиз *тюля* — с подобными эскизами можно обращаться в дизайнерский отдел ткацкой фабрики (и, не исключено даже — получить денежное вознаграждение):

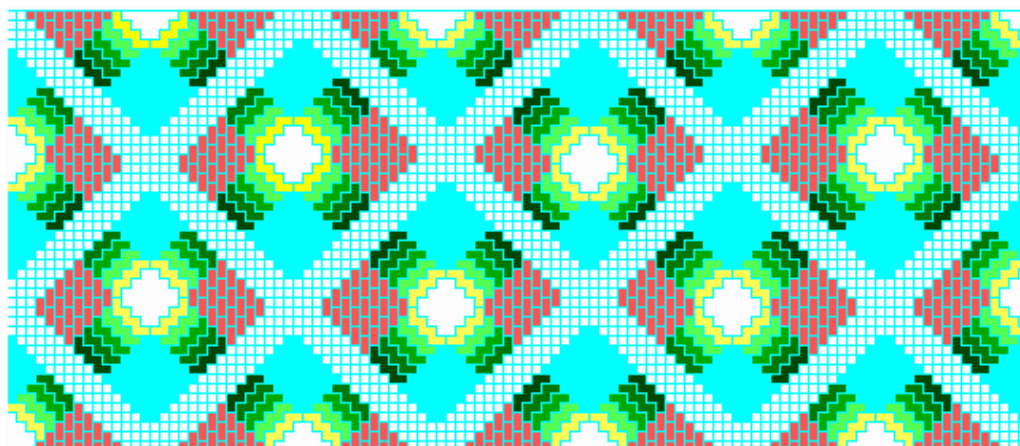
Эксперименты.**длина: 90****высота: 64**

длина: 101

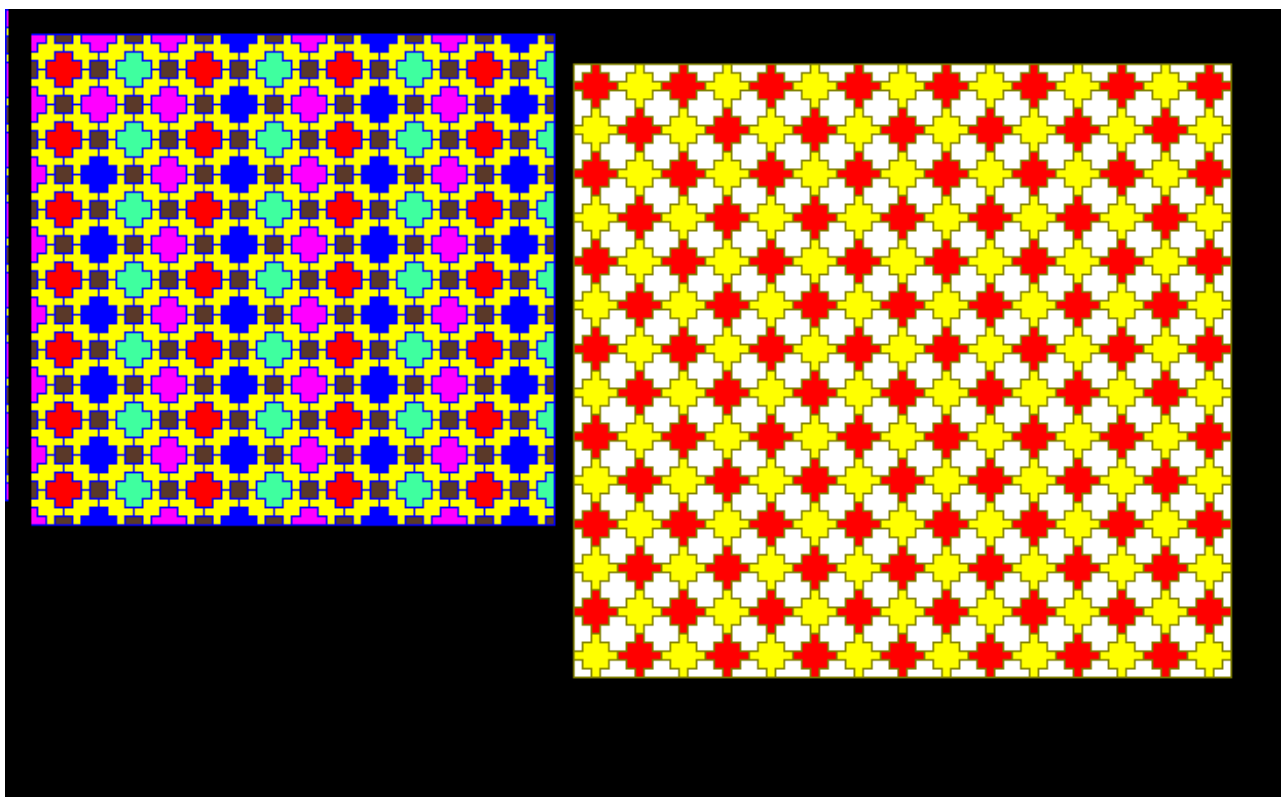
высота: 76



Кстати, если последний эскиз **раскрасить**, то получится симпатичный **паркет**:



А вот раскрашенные узоры, которые могут пригодиться при изготовлении кафельных плиток или оконных витражей.



Алгоритм “Стежок”, оказывается, — это не только источник математических достопримечательностей, но ещё и кладёшь идей декоративно-прикладного искусства.

Некоторые (но далеко не все!) математические свойства узоров я перечислил в главе “Компьютер — числоскоп” в книге “Элегантная математика”, выпущенной издательством УРСС. Эксперименты в этом направлении сулят много открытий: здесь обнаруживаются связи с *теорией бильярдных траекторий, теорией узлов, теорией паркетов, орнаментов, фигур Лиссажу* и т.п.

В завершение этого сюжета я коснусь ещё одного интересного приложения — связи алгоритма “Стежок” с одной из *метризаций ленты Мёбиуса*.

Давайте посмотрим на обычный портняжный сантиметр (или “метр”, как его ещё называют). Он метризован (т.е. на нем задано расстояние — *прим. ред.*) таким образом, что если склеить из него ленту Мёбиуса (наложив друг на друга деления 150 сантиметров — совместив дырочки), то, отправляясь с пункта “1 сантиметр” и шагая в сторону увеличения шкалы по ленте с шагом 1 сантиметр, мы через некоторое количество шагов достигнем величин: 147, 148, 149, 150 сантиметров, а дальше?..

— Дальше получается плавный переход на обратную сторону, и мы последовательно попадаем в пункты: 149, 148, 147 и так далее сантиметров. А теперь давайте снова посмотрим на самый первый рисунок в этой лекции. Если мы будем отслеживать номера вертикалей, в которые попадаем попеременно на “полу” и на “потолке” при движении “стежка”, то получим **3 - 6 - 9 - а далее - 8 - 5** - точно такой же **плавный** переход на границе, как на ленте Мёбиуса.

Таким образом, алгоритм “стежок” позволяет изучать *арифметические свойства* одной из метризаций *ленты Мёбиуса*.

Для желающих могу предложить такую задачу.

Задача³

Кузнечики Петя и Вася соревнуются на беговой дорожке в виде ленты Мёбиуса, склеенной из портняжного сантиметра. Кузнечики стартуют одновременно из пункта 2 в сторону увеличения нумерации, причём кузнечик Петя прыгает на 3 см вперёд, а кузнечик Вася - на 5 см. Кто из них первым окажется в пункте с номером 1? А в пункте с номером 2?

Если вы научитесь решать эту задачу в общем случае, когда точка старта кузнечика и длина его прыжка — произвольные натуральные числа, то сможете разобраться со многими арифметическими загадками алгоритма “Стежок” (длина прыжка — это ширина **базового** прямоугольника в этом алгоритме, а максимальное число в метрике ленты Мёбиуса — его длина).

³Похожую задачу я предлагал в одном первых конкурсов в сети Internet, см. “Квант”, 1998, №2, с. 56.

Библиография

Математическая книга для младшекласников

В последнее время выходит не очень много литературы по математике для самых юных читателей. Несколько лет назад появилась интересная книга Звонкина о математических занятиях с дошкольниками, но она рассчитана скорее на родителей. В этом году начато издание журнала “Квантик” для школьников, начиная примерно с 4-5 классов. Поэтому редакция считает полезным познакомить читателей с новой книгой для учащихся начальной школы.

Книга “Математические семинары для младшекласников. Беркли–2009” Наташи Рожковской предназначена для младших школьников, интересующихся современной математикой, родителей и преподавателей математических кружков. Она представляет читателям 15 семинаров по математике для детей 6–10 лет, разработанных и проведенных автором в школьном кружке в городе Беркли (США, штат Калифорния) в 2009г. Автор в увлекательной форме — при помощи занимательных задач, игр, поделок из бумаги и т.п. — знакомит ребят с идеями и понятиями современных математических дисциплин, таких как теория графов, математическая логика, теория фракталов, симметрия, комбинаторика, теория узлов, теория вероятностей и др. В книге приводятся полные тексты всех задач и заданий, предложенных детям на занятиях кружка в Беркли, а также комментарии к каждому семинару.

Несколько слов об условиях, в которых проводился семинар. Город Беркли широко известен как международный математический центр. Здесь расположен один из лучших государственных университетов США — Калифорнийский университет в Беркли, основанный в 1868г. В Математическом научно-исследовательском институте проходят конференции, математические семестры, приглашаются ученые из разных стран для совместных исследований. В 1998г. открылся городской математический кружок, где профессора, аспиранты, научные работники читают лекции и ведут математические занятия для школьников.

Автор книги, Наташа Рожковская, в течение осеннего семестра 2009г. проводила еженедельные семинары в этом кружке по своей авторской программе, которая имела две особенности:

(1) Программа была рассчитана на детей младшего школьного возраста — 6-10 лет. Для математического кружка Беркли это был первый опыт занятий по математике для детей такой возрастной группы.

(2) Программа не дублировала традиционные школьные темы, но была нацелена на знакомство с идеями и понятиями современных математических дисциплин, таких как теория графов, фракталы, теория вероятностей, математическая логика, комбинаторика, симметрия, криптография, топологические узлы, случайные выборки, треугольник Паскаля и др.

Возраст участников кружка предполагал особый подход к изложению материала и реализации программы. На семинарах дети решали задачи, играли в математические игры, рисовали, изготавливали бумажные поделки. Вырезая и склеивая “треугольник Серпинского”, юные участники кружка познакомились с идеями теории фракталов, расшифровывая закодированные цифрами и стрелками картинки — с методом координат, играя в игру “Гномы” — с теорией вероятностей, выбирая правильный ответ клоуна Неткина — с законами формальной математической логики. Важная роль точного определения в математике объяснялась через игры со

словами-омонимами. Треугольник Паскаля, возникающий то на одном, то на другом семинаре в различных задачах, демонстрировал взаимосвязь различных математических направлений. В дискуссиях на семинарах участники кружка учились не только находить правильные ответы, но и четко аргументировать свое решение.

По содержанию и структуре книга полностью соответствует семинарам, проведенным автором в Беркли. Приведены задачи и задания, которые предлагались участникам. Комментарии автора дают представление о том, как программа была реализована для двух групп (каждая численностью 20 человек) детей возраста 6-10 лет осенью 2009г.

Краткие сведения об авторе: Наташа Рожковская родилась в Новосибирском Академгородке, закончила с отличием механико-математический факультет Московского государственного университета, получила научную степень по математике в университете Пенсильвании (США), работала по приглашениям в Институте им. А. Пуанкаре (Париж, Франция), Институте Макса Планка (Бонн, Германия), преподавала в университете Висконсин-Мэдисон (США). В 2005г. работала консультантом комиссии Госдепартамента США по математическим учебникам для школ. В настоящее время преподает в Канзасском государственном университете (США). Темы ее научных исследований: теория представлений, квантовые группы и комбинаторика.

Выходные данные книги:

Наташа Рожковская, Математические семинары для младшеклассников. Беркли–2009, Новосибирск: Издательство “Тамара Рожковская”, 2011. — 132 с. Тираж 1000 экз.

Книгу можно заказать в издательстве “Тамара Рожковская” по электронному адресу
rozhk@math.nsc.ru или tamara@mathbooks.ru

Стоимость книги 500 руб. без учета пересылки.

С более подробной информацией о книге, включая содержание и введение, можно ознакомиться на сайте

<http://www.math.ksu.sdu/rozhkovs/bseminars09.htm>

Информация

О деятельности ФМОП в 2011г.

В 2011г. Фонд математического образования и просвещения (ФМОП) осуществлял следующие виды деятельности по разделам: поддержка образовательных инициатив, издательская деятельность, благотворительная деятельность:

- Методическая поддержка и обеспечение экспериментальными учебными материалами учащихся гуманитарных классов ГОУ СОШ №179 и №1314 г. Москвы.
- Поддержка мероприятий по работе со школьниками: Турнир Городов, Турнир Ломоносова, Летняя конференция Турнира Городов.
- Выпуск журнала “Математическое образование”, учредителем которого ФМОП является; в 2011г. вышли номера 1(57), 2(58), 3-4(59-60).
- Предоставление изданий Фонда для награждения победителей и участников ряда математических соревнований, в частности, олимпиады САММАТ, г. Самара.
- Приобретение учебных пособий, в частности, материалов для подготовки к ЕГЭ для учащихся 11 классов нескольких школ г. Москвы.
- Участие в формировании пакета раздаточных материалов для делегатов Международной конференции по мыследеятельностной педагогике, Москва, ноябрь 2011г.
- Организация питания для учителей-слушателей Курсов повышения квалификации на базе НИИ ИСРОО г. Москвы.
- Предоставление безвозмездных транспортных услуг организациям и физическим лицам, работающим в области математического образования.
- Организация бесплатной подписки на журнал “Математическое образование” ряду организаций и физических лиц, работающих в области математического образования.
- Поддержка некоторых вновь созданных некоммерческих негосударственных организаций в области научных и научно-методических исследований по математике.

О Фонде математического образования и просвещения

Фонд математического образования и просвещения создан в конце 1996 г. с целью способствовать сохранению богатых традиций математического образования и науки в России. Фонд сотрудничает с организациями и гражданами, желающими участвовать в благородном деле сохранения высокого качества российского математического образования. Фонд поддерживает образовательные инициативы, направленные на достижение поставленной цели. Особое внимание оказывается образовательным инициативам в провинции, как в виде издательской поддержки, так и финансовой помощи. Фонд способствует изданию научной, учебной и методической литературы в области математики и смежных наук.

Условия подписки и приема материалов

По вопросам подписки на журнал обращайтесь по телефону: (495) 107-31-46 .

Адрес для корреспонденции Фонда: 141075 г. Королев Московской обл., пр-т Космонавтов 9-167.

E-mail: matob@yandex.ru

Интернет: www.nrsmarpo.ru Раздел: Партнеры, журнал “Математическое образование”

Стоимость подписки на каждый из номеров за 2012 год (включая стоимость пересылки) – 80 рублей.

Для получения номеров журнала необходимо выслать в адрес редакции копию платежного документа, подтверждающего оплату подписки. Сообщите адрес, по которому вы хотели бы получать журнал. В платежном документе укажите, что перевод делается для журнала “Математическое образование”, номер журнала за 2012 г., количество экземпляров.

Реквизиты для перечисления:

Получатель: ИНН 7725080165 Фонд математического образования и просвещения

Расчетный счет и банк получателя:

р/с 40703810700010001416 в ОАО Банк “Развитие-Столица”, г. Москва,

к/с 30101810000000000984, БИК 044525984, ОКПО 45084342

Вы также можете заказать необходимое вам количество отдельных номеров журнала за предыдущие годы. В этом случае пересылка осуществляется наложенным платежом или на основании платежного документа (реквизиты те же). В заказе (в платежном документе) укажите, за какие номера и в каком количестве экземпляров за номер, делается перечисление.

Стоимость одного экземпляра журнала (с учетом пересылки) — 70 руб.

Редакция принимает рукописи материалов с четко прорисованными формулами. По согласованию с редакцией принимаются материалы в электронном виде, обязательно прилагать распечатку.

Рукописи не возвращаются и не рецензируются. После публикации авторские права сохраняются за авторами материалов. Авторы опубликованных материалов получают бесплатно по 10 экземпляров соответствующего выпуска журнала.

Мнение редакции не всегда совпадает с мнением авторов.

Предполагается вывешивать статьи в формате PDF в архиве на странице журнала.

Просим авторов предоставляемых статей сообщать, согласны ли они на это.

Contents

Two Centenaries	2
100 years ago the first All-Russian Congress of mathematics teachers took place, and the first issue of the journal “Mathematical Education” was launched.	
A. Bondal. From Algebras to Varieties	3
Some modern ideas of considering algebraic and geometric structures from the categorical point of view are represented.	
S. Dvoryaninov, S. Krauter. How the Center of Gravity of a Triangle differs from that of a Quadrilateral	10
The positions of centers of gravity for triangles and quadrilaterals are defined, under the different mass distributions.	
V. Drozdov. On an Unfamiliar Property of Triangle’s Bisectors	20
For three line segments, necessary and sufficient conditions are studied to be either heights or medians or bisectors of some triangle.	
Kh. Nurligareev. On Multifoliate Regular Parquets	23
Plane multifoliate regular parquets are classified, the cases of finite-foliate parquets are described.	
E. Potoskuev. Unity of Logical and Graphical Culture is the Way of Solving Geometric Problems	30
Some useful rules of constructing planimetric and stereometric figures based on the corresponding reasoning are discussed, a lot of examples are considered.	
S. Shvedenko. Notes on Calculus, continued	41
The notions of function’s continuity at a point and in a set are analyzed. An approach to define high order differentials of a function is suggested.	
A. Zhukov. Experimental Mathematics	47
The experimental observation of different mathematical facts are illustrated by numerous examples.	
On Mathematical Book for Junior School Students	64
The book “Mathematical Seminars for Junior School Students. Berkeley–2009” by Natasha Rozhkovskaya is presented to the readers.	

ISSN 1992-6138

