Méthodes quantitatives de l'Economie (Partie B)

Résumée par
Hoang Ngoc Minh (hoang@univ-lille2.fr)

Licence AES,
Faculté des sciences juridiques, politiques et sociales
Université du droit et de la santé - Lille 2

2019

Plan

1. Calcul matriciel
   1.1 Les bases du calcul matriciel,
   1.2 Le calcul des déterminants,
   1.3 La résolution des systèmes d'équations linéaires.
2. Optimisation linéaire
   2.1 à deux variables.
   2.2 à plus de deux variables.

Matrices carrées

Une matrice carrée d'ordre n est un tableau de nombres réels ou *complexes* à n lignes et n colonnes.
Des matrices carrées d'ordre 2 et 3 seront notées

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{6}{10} & -\frac{31}{10} \end{pmatrix} \ et \ B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nombres complexes

On sait que l'équation de second degré

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad (a, b, c \in \mathbb{R})$$

admet deux solutions réelles, distinctes ou confondues, x' et x'', lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Maintenant, nous considérons l'équation

$$x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Ici, $\Delta = -16$. Introduisons le nombre i tel que $\mathrm{i}^2 = -1$. L'équation précédent admet alors deux solutions *imaginaires* (nombres complexes) :

$$x' = \frac{2 + 4\mathrm{i}}{2} = 1 + 2\mathrm{i} \quad \text{et} \quad x'' = \frac{2 - 4\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\mathrm{i}.$$

Opérations sur les nombres complexes

Soient $z = a + b\mathrm{i}$ et $z' = a' + b'\mathrm{i}$.
Le nombre $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ est appelé *conjugué* de z.
Le conjugué d'un nombre réel est égal à lui même.

1. $z + z' = (a + a') + (b + b')\mathrm{i}$.
2. $z - z' = (a - a') + (b - b')\mathrm{i}$.
3. $z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)\mathrm{i}$.
4. $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + \dfrac{ab' - a'b}{a'^2 + b'^2}\mathrm{i}$.
5. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$.
6. $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$.
7. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$.

Matrices carrées (suite)

Plus généralement, une matrice carrée d'ordre n sera représentée par un tableau carrée

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Le nombre $a_{i,j}$ est le coefficient de A à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne. En particulier,

$$O_n = (0)_{1 \leq i,j \leq n} \quad \text{et} \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Le transposé de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{n,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Matrices carrées particulières

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice carrée.

1. M est dite *symétrique* ssi $M = M^T$:
$$m_{i,j} = m_{j,i}, \quad \text{pour tout } 1 \leq i,j \leq n.$$
2. M est dite *antisymétrique* ssi $M = -M^T$:
$$m_{i,j} = -m_{j,i}, \quad \text{pour tout } 1 \leq i,j \leq n.$$
3. M est dite *diagonale* ssi $m_{i,j} = 0$, pour tout $i \neq j$.
4. M est dite *triangulaire suppérieure* ssi $m_{i,j} = 0$, pour tout $i \geq j$.
5. M est *strictement* triangulaire suppérieure ssi $m_{i,j} = 0$, pour tout $i > j$.
6. M est dite *triangulaire inférieure* ssi $m_{i,j} = 0$, pour tout $i \leq j$.
7. M est *strictement* triangulaire inférieure ssi $m_{i,j} = 0$, pour tout $i < j$.

Opérations sur les matrices carrées

Soit λ, μ deux nombres complexes.
Soit A, B, C trois matrices carrées d'ordre n.

$$A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, \quad B = (b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}, \quad C = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}.$$

1. $A = B \iff a_{i,j} = b_{i,j}, 1 \leq i,j \leq n.$
2. $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}.$
3. $A + B = B + A$ (l'addition est *commutative*).
4. $A + O_n = O_n + A = A$ (O_n est l'*élément neutre* pour l'addition).
5. $A - B = (a_{i,j} - b_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} = -(B - A).$
6. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (l'addition est *associative*).
7. $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}.$
8. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$
9. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
10. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A.$

Produit de deux matrices carrées

Soit A et B deux matrices carrées d'ordre n.

$$A = (a_{i,j})_{1\le i,j\le n} \quad \text{et} \quad B = (b_{i,j})_{1\le i,j\le n},$$
$$AB = (c_{i,j})_{1\le i,j\le n} \quad \text{où} \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,1} & \dots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,1} & \dots & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{n,k} b_{k,n} \end{pmatrix} \end{array}.$$

En général, on a $AB \neq BA$.

Produit de deux matrices carrées (suite)

Soit A, B, C trois matrices carrées d'ordre n.

1. $A(BC) = (AB)C = ABC$ (associativité).
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité de $./+$).
3. $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité de $+/.$).
4. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda AB$.
5. $AI_n = I_nA = A, AO_n = O_nA = O_n$.

Matrices inversibles

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A est *inversible* s'il existe une matrice carrée d'ordre n B telle que

$$AB = BA = I_n.$$

B est alors appelé l'*inverse* de A. Elle est *unique* et on la note par A^{-1} :

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$. *On vérifie que*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A est donc inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Déterminant d'une matrice carrée

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{pmatrix}$.

Le déterminant de A est $\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1}$.

Soit $D_{i,j}$ est le déterminant d'ordre $n-1$ déduit de B en enlevant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne. Le déterminant de B est

$$\begin{aligned}\det B = \begin{vmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \\ b_{3,1} & b_{3,2} & b_{3,3} \end{vmatrix} &= b_{1,1}D_{1,1} - b_{2,1}D_{2,1} + b_{3,1}D_{3,1}, \\ &= b_{1,1}(b_{2,2}b_{3,3} - b_{3,2}b_{2,3}) - b_{2,1}(b_{1,2}b_{3,3} - b_{3,2}b_{1,3}) \\ &\quad + b_{3,1}(b_{1,2}b_{2,3} - b_{2,2}b_{1,3}).\end{aligned}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{6}{10} & -\frac{31}{10} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{3} \\ -\sqrt{2} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det A = -31/10 \quad et \quad \det B = 1/3 + \sqrt{2}.$$

Propriétés des déterminants d'une matrice carrée

Soit λ un nombre complexe.
Soit A, B deux matrices carrées d'ordre n.

1. $\det A = \det A^T$.
2. Le déterminant d'une matrice triangulaire (suppérieure ou inférieure) est égal au produit de ses élements diagonaux.
3. $\det(AB) = \det A \det B$.
   3.1 $\det A^{-1} = 1/\det A$,
   3.2 $\forall k \geq 0, \det A^k = (\det A)^k$.
4. Si on permute deux lignes (ou deux colonnes) successives, le déterminant change de signe.
5. Si on multiplie les coefficients d'une même ligne (resp. colonne) par un nombre λ, le déterminant est multiplié par λ.
6. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$.

Calcul de la matrice inverse par les cofacteurs

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On appelle *matrice des cofacteurs* la matrice C_A de terme général $(-1)^{i+j}D_{i,j}$, où $D_{i,j}$ est le déterminant d'ordre $n-1$ déduit de A en enlevant la $i^{\text{ième}}$ ligne et la $j^{\text{ième}}$ colonne :

$$C_A = (c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \quad \text{où} \quad c_{i,j} = (-1)^{i+j}D_{i,j}.$$

Théorème

A est inversible si et seulement si $\det A \neq 0$ *et* $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}(C_A)^T$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. *On a* $\det A = 2$ *et A est donc inversible.*

Puisque $C-A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ -2 & 6 & 8 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ *alors* $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercices

Exemple

Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 1 \\ 10 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

A est elle inversible ? Déterminer A^{-1} lorsqu'elle existe.

Exemple

Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} m & m & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-m & -m & 0 \end{pmatrix}$$

1. *Déterminer les valeurs de m pour lesquelles B est inversible.*
2. *Calculer B^{-1} lorsqu'elle existe.*

Matrices rectangles

Une matrice rectangle (m, n) est un tableau de nombres réels ou complexes à m lignes et n colonnes.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \dfrac{6}{10} & -\dfrac{31}{10} & 1 + 2\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Plus généralement, une matrice carrée d'ordre n sera représentée par un tableau carrée

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Le nombre $a_{i,j}$ est le coefficient de A à la $i^{\text{ième}}$ ligne et à la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Une matrice ayant une *seule* ligne (resp. colonne) est appelé *matrice-ligne* (resp. *matrice-colonne* ou *vecteur*).

Opérations sur les matrices rectangles

Soit λ, μ deux nombres complexes.
Soit A, B, C trois matrices rectangles (m, n).

$$A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \quad B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}, \quad C = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

1. $A = B \iff a_{i,j} = b_{i,j}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$
2. $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$
3. $A + B = B + A$ (l'addition est *commutative*).
4. $A + O_{m,n} = O_{m,n} + A = A$ ($O_{m,n}$ est l'*élément neutre* pour l'addition).
5. $A - B = (a_{i,j} - b_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = -(B - A).$
6. $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$ (l'addition est *associative*).
7. $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$
8. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A.$
9. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B.$
10. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A.$

Produit de deux matrices rectangles

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ et $B = (b_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p}$ deux matrices rectangles (m, n) et (n, p) respectivement. Alors

$AB = (c_{i,j})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq p}$, où $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \dots & b_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} b_{k,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{m,k} b_{k,1} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{m,k} b_{k,p} \end{pmatrix} . \end{array}$$

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, AX = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 \end{pmatrix}.$$

Opération sur les matrices rectangles

Soit λ un nombre complexe.
Soit A, B, C trois matrices rectangles (à assurer la compatibilité des dimensions).

1. $A(BC) = (AB)C = ABC$ (associativité).
2. $A(B + C) = AB + AC$ (distributivité. de ./+).
3. $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité de +/.).
4. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB) = \lambda AB$.
5. $AI_n = A, I_m B = B$.

On peut décomposer également les matrices en blocs matriciels. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \\ B_{3,1} & B_{3,2} \end{pmatrix}$$

alors (à assurer la compatibilité des dimensions)

$$AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} + A_{1,3}B_{3,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} + A_{1,3}B_{3,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} + A_{2,3}B_{3,1} & A_{2,1}B_{2,1} + A_{2,2}B_{2,2} + A_{2,3}B_{3,2} \end{pmatrix}$$

Ecriture matricielle d'un système linéaire

Soit B, X et A trois matrices rectangles de dimension $(m,1), (n,1)$ et (m,n) respectivement. Alors

$$AX = B \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \right.$$

Exemple

Soit $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ *et* $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$. *Alors*

$$AX = B \iff \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2, \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3. \end{array} \right.$$

Résolution d'un système linéaire

Un système linéaire à m équations et à n inconnues, $x_1, \ldots, x_n$, est de la forme

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \right.$$

Résoudre (S), c'est déterminer **tous** les n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ qui vérifient simultanément les m équations de (S).
Résoudre (S), c'est déterminer *tous* les vecteurs X vérifiant $AX = B$, où B, A sont des matrices rectangles, de dimension $(m, 1)$ et (m, n) respectivement, associées à (S).

Système de Cramer

Considérons un système linéaire de n d'équations à n inconnues $x_1, \ldots, x_n$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n & = & b_1, \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,n}x_n & = & b_n. \end{array} \right. \iff AX = B,$$

où B, X deux vecteurs d'ordre n et A est une matrice carrée d'ordre n.

Définition

Un système est dit de Cramer *si* $\det A \neq 0$.

Théorème

Posons $\Delta = \det A$ *et* Δ_i*, pour* $i = 1, .., n$*, le déterminant qui se déduit de* Δ *en remplaçant sa* $i^{\text{ème}}$ *colonne par le second membre. La méthode de Cramer donne*

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Théorème

Un système de Cramer admet une unique solution donnée par $X = A^{-1}B$.

Exemple (voir le Problème 1/3)

$$\left\{\begin{array}{rcl} 15 & = & \dfrac{a+b}{c+1} \\ 8 & = & \dfrac{2a+b}{2c+1} \\ 1 & = & \dfrac{5a+b}{5c+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 15(c+1) & = & a+b \\ 8(2c+1) & = & 2a+b \\ 5c+1 & = & 5a+b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} a+b-15c=15 \\ 2a+b-16c=8 \\ 5a+b-5c=1 \end{array}\right.$$

Sous forme matricielle, nous avons $AX = B$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -15 \\ 2 & 1 & -16 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 15 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Puisque $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -15 \\ 2 & 1 & -16 \\ 5 & 1 & -5 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, la méthode de Cramer donne

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 15 & 1 & -15 \\ 8 & 1 & -16 \\ 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = -6, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 15 & -15 \\ 2 & 8 & -16 \\ 5 & 1 & -5 \end{vmatrix}}{-14} = 36, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 15 \\ 2 & 1 & 8 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-14} = 1.$$

Exemples

Exemple

Résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 1, \\ x-y+t & = & 2. \end{array}\right.$

Exemple

Résoudre $\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y-z+2t & = & 1, \\ 3x+y+2z-t & = & 0, \\ \sqrt{2}x-2z+5t & = & 8. \end{array}\right.$

Exemple

Soit a une constante réelle. Discuter les solutions de

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1, \\ x+2y-z+t & = & 2, \\ 3x+5y-z+3t & = & a. \end{array}\right.$$

Systèmes homogènes & polynôme caractéristique

Un système linéaire à m équations et à n inconnues, $AX = B$ est dit *homogène* si $B = O_{m,1}$.

Théorème

Un système linéaire à n équations et à n inconnues $AX = O_{n,1}$ admet des solutions non nulles ssi $\det A = 0$.

Si A est carrée d'ordre n. Soit X un vecteur tel que $AX = \lambda X$, où $\lambda \in \mathbb{C}$: $(A - \lambda I_n)X = 0$.

Définition

Le polynôme caractéristique *de A est le polynôme, en λ de degré n*

$$\Pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n).$$

L'équation caractéristique *de A est*

$$\Pi_A(\lambda) = 0.$$

λ est une valeur propre *de A et X est un* vecteur propre *de A associé à λ.*

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \\ 8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de A sont les solutions de $\Pi_A(\lambda) = 0$:

$$\begin{aligned} \Pi_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_3) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 6 \\ 8 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)^2(6-\lambda). \end{aligned}$$

$\lambda_1 = 3$ est valeur propre double et $\lambda_2 = 6$ est valeur propre simple.

Formes quadratiques

- Une forme quadratique q est l'application

$$\begin{array}{rcl} q : \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_ix_j, \quad \forall 1 \leq i,j \leq n, c_{i,j} \in \mathbb{R}. \end{array}$$

- Une forme quadratique q telle $q(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j}x_ix_j$ est de la forme $q(x_1, \dots, x_n) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_ix_j$, où $a_{i,j} = a_{j,i} = \dfrac{c_{i,j} + c_{j,i}}{2}$.

- Soit A une matrice symétrique $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ et soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

  Alors $q(x_1, \dots, x_n) = X^T AX$.

Exemple

$$q(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 - 6x_2^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Nature d'une forme quadratique

Une forme quadratique q est dite

- semi-définie positive lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, q(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$.
- semi-définie négative lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, q(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$.
- définie positive lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et non nul alors $q(x_1, \ldots, x_n) > 0$.
- définie négative lorsque pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et non nul alors $q(x_1, \ldots, x_n) < 0$.
- indéfinie lorsqu'il existe $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $q(x_1, \ldots, x_n) > 0$ et $q(y_1, \ldots, y_n) < 0$.

Essentiels à savoir

Une forme quadratique q associée à une matrice symétrique A est

- semi-définie positive si et seulement si les valeurs propres de A sont positives ou nulles.
- semi-définie négative si et seulement si les valeurs propres de A sont négatives ou nulles.
- définie positive si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement positives.
- définie négative si et seulement si les valeurs propres de A sont strictement négatives.
- indéfinie si et seulement si les valeurs propres de A sont de signes différents.

Cas des matrices carrées d'ordre deux

Pour connaître la nature d'une matrice symétrique carrée d'ordre deux, A, il suffit de calculer

1. $\det A =$ produit des valeurs propres,
2. $\mathtt{trace} A =$ somme des valeurs propres.

- Si $\det A > 0$ alors les deux valeurs propres sont de même signe,
  - Si $\mathtt{trace} A > 0$ alors les deux valeurs propres sont strictement positives. D'où A est définie positive.
  - Si $\mathtt{trace} A < 0$ alors les deux valeurs propres sont strictement négatives. D'où A est définie négative.
- Si $\det A = 0$ alors l'une des deux valeurs propres est nulle,
  - Si $\mathtt{trace} A > 0$ alors une valeur propre est nulle et l'autre strictement positives. D'où A est semi-définie positive.
  - Si $\mathtt{trace} A < 0$ alors une valeur propre est nulle et l'autre strictement négatives. D'où A est semi-définie négative.
- Si $\det A < 0$ alors les deux valeurs propres sont de signes opposés. D'où A est indéfinie.

Exemples

Exemple

Etudier les formes quadratiques suivantes:

1. $q(x_1, x_2) = -x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$.
2. $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 8x_2^2 + 3x_3^2 - 2\sqrt{2}x_1x_2 + 4x_2x_3$.

Exemple

Quelle condition doit vérifier a pour que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *soit semi-définie positive ?*

Problème de maximisation : forme canonique

Soit Z une *fonction économique*

$$Z = c_1 x_1 + \ldots + c_p x_p$$

linéaire en les p variables $x_1, \ldots, x_p$, supposés tous positifs ou nuls

$$x_1 \geq 0, \ldots, x_p \geq 0.$$

La *programmation linéaire* est le problème de *maximisation* la fonction économique Z :

$$\max_{x_1, \ldots, x_p \geq 0} Z$$

sous les contraintes (n contraintes)

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,p}x_p & \leq & d_1, \\ & \vdots & \\ a_{n,1}x_1 + \ldots + a_{n,p}x_p & \leq & d_n. \end{cases}$$

Tout élément $x_1, \ldots, x_p$ vérifiant ces contraintes (y compris les contraintes de positivité) est appelé programme admissible.

Sous forme matricielle, nous avons

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}.$$

Exemple (Voir le Problème 2/3)

Déterminer le maximum de

$$Z = 270x + 140y$$

avec $x \geq 0$ *et* $y \geq 0$, *sous les contraintes*

$$\begin{cases} 3x + y & \leq & 9, \\ x + 2y & \leq & 8. \end{cases}$$

Ou encore,

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 9 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Méthode de recencement des sommets (cas de deux variables)

- Déterminer le coordonnées de tous les sommets du polygone frontière de l'ensemble des programmes admissibles.
- Calculer les valeurs de Z en chaque point.
- Comparer les valeurs obtenues : la plus grande donne la solution du problème.