Méthodes quantitatives de l'Economie (Partie A)

Résumée par

Hoang Ngoc Minh (hoang@univ-lille2.fr)

Licence AES,
Faculté des sciences juridiques, politiques et sociales
Université du droit et de la santé - Lille 2

2019

Plan

1. Fonctions réelles d'une variable réelle
    1.1 Fonctions d'une variable réelle
    1.2 Continuité,
    1.3 Dérivation.
2. Optimisation dans $\mathbb{R}$
    2.1 Théorème des acrosissements finis,
    2.2 Fonctions concaves, fonctions convexes,
    2.3 Optimum.

Fonctions d'une variable réelle

Soit $I \subset \mathbb{R}$ (c-à-d I est un intervalle de $\mathbb{R}$).
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ (c-à-d f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$).
L'image de I par f est notée par $\mathrm{Im} f$.
L'ensemble de définition de f est notée par D_f (c-à-d D_f est l'ensemble des x qui ont une image par f).

Exemple

- $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}, D_f =]-2, +\infty[$.
- $f(x) = \ln|x|, D_f = \mathbb{R}^*$.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I. On définit

- Pour tout $x \in I$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.
- Pour tout $x \in I$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda f)(x) = \lambda * f(x)$.
- Pour tout $x \in I$, $(f * g)(x) = f(x) * g(x)$.
- Pour tout $x \in I$ tel que $g(x) \neq 0$, $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$.

Limite

Soit $I \subset \mathbb{R}$ et $a \in I$. Soit f une fonction définie au voisinage de a :

$$V =]a-\alpha, a+\alpha[, \quad \text{pour} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha > 0.$$

- On dit que f a pour limite l quand x tend vers a lorsque
$$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in V, |x-a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \leq \epsilon.$$
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$.
- On dit que f a pour limite $+\infty$ quand x tend vers a lorsque
$$\forall A > 0, \exists \delta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in V, |x-a| \leq \delta \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq A.$$
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- On dit que f a pour limite l quand x tend vers $+\infty$ lorsque
$$\forall \epsilon > 0, \exists A > 0, \text{ t.q. } \forall x \in \mathbb{R}, x \geq A \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \leq \epsilon.$$
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$.

Limite à droite - Limite à gauche

- On dit que f a pour limite à droite l quand x tend vers a lorsque

  $$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in V, x - a \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

  On note $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$.
- On dit que f a pour limite à gauche l quand x tend vers a lorsque

  $$\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \text{ t.q. } \forall x \in V, a - x \leq \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - l| \leq \epsilon.$$

  On note $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$.
- $\lim_{x \to a} f(x) = l$ ssi $\lim_{x \to a^+} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a^-} f(x) = l$.

Opérations sur les limites

Soit f et g définies sur un voisinage de a, sauf peut être en a.
$\lim_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim_{x \to a} g(x) = k$ alors

- $\lim_{x \to a} (f+g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = l + k$,
- $\lim_{x \to a} (f * g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) * \lim_{x \to a} g(x) = l * k$,
- $\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} = \frac{l}{k}$, (pourvu que $k \neq 0$),
- Si $\forall x \in V$, on ait $f(x) < h(x) < g(x)$, et si $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = l$ alors $\lim_{x \to a} h(x) = l$.

Fonctions équivalentes

Soit f et g définies sur un voisinage de a, sauf peut être en a et $g(x) \neq 0$ au voisinage de a.

- On dit que f et g sont équivalentes quand x tend vers a, ou sont équivalentes au voisinage de a, lorsque
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} \quad = \quad 1.$$
On note $f \sim_a g$.
- On dit que f et g sont équivalentes quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) lorsque
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1).$$
On note $f \sim_{+\infty} g$ (resp. $f \sim_{-\infty} g$).
- Si $f_1 \sim_a g_1$ et $f_2 \sim_a g_2$ alors
$$f_1 f_2 \sim_a g_1 g_2 \quad \text{et} \quad f_1/f_2 \sim_a g_1/g_2.$$
- Un polynôme est équivalent à son monôme de plus bas degré et plus haut degré au voisinage de 0 et ∞ respectivement.

Exercices

Exercice

Trouver un équivalent de $f(x) = \dfrac{3x^3 + x^2 + 5x}{6x^4 + x^3 + 2}$

- *au voisinage de* 0,
- *au voisinage de* $+\infty$.

Exercice

Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ *tel que* $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} \sim_{+\infty} \dfrac{1}{\alpha\sqrt{x}}$.

Exercice

Trouver un équivalent de $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{(e^x - e^{-x})^2}$ *lorsque* x *tend vers* $-\infty$.

Continuité

- Soit f une fonction définie au voisinage de a.
  - f est dite continue en a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
  - f est dite continue à droite de a lorsque $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
  - f est dite continue à gauche de a lorsque $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
  - f est dite continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ et $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
  f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de I.
- f est dite continue sur le segment $[a, b]$ lorsque f est dite continue sur $]a, b[$, continue à droite de a et continue à gauche de b.

Opérations et composition

- Soit f et g deux fonctions continues en a.
  - $f + g$ est continue en a,
  - $f * g$ est continue en a,
  - f/g est continue en a (pourvue que g ne s'annule pas en a).
- Soit f une fonction continue en a et g une fonction continue en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est continue en a.
- Soit f une fonction qui admet pour limite l quand x tend vers a et g une fonction continue en l. Alors $\lim_{x \to a} g \circ f(x) = g(l)$.
- Soit f une fonction qui admet pour limite l quand x tend vers $+\infty$ et g une fonction continue en l. Alors $\lim_{x \to +\infty} g \circ f(x) = g(l)$.
- Soit f une fonction qui admet pour limite l quand x tend vers $-\infty$ et g une fonction continue en l. Alors $\lim_{x \to -\infty} g \circ f(x) = g(l)$.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions polynomiales, rationnelles sont continues sur leur ensemble de définitions.
- Les fonctions puissance, exponentielle, logarithme, sinus, cosinus sont continues sur leur ensemble de définitions.

Théorèmes fondamentaux (1/2)

Théorème (des valeurs intermédiaires)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors pour tout d compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe toujours $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

Théorème (d'optimisation de Weierstrass)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Alors f atteint son maximum et son minimum sur $[a, b]$, c-à-d

$$\exists x^* \in [a, b], \ t.q. \ \forall x \in [a, b], \qquad f(x) \leq f(x^*)$$

et

$$\exists x_* \in [a, b], \ t.q. \ \forall x \in [a, b], \qquad f(x) \geq f(x_*)$$

Théorèmes fondamentaux (2/2)

Théorème (Fonction réciproque)

Soit f une fonction continue et stictement monotone sur un intervalle I. Alors f est une bijection de I dans $f(I)$ et sa fonction réciproque f^{-1} est une fonction continue et stictement monotone, de même sens que f, de $f(I)$ sur I.

Théorème (d'existence d'une racine de $f(x) = 0$)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f(a) \geq 0$ et $f(b) \leq 0$ (ou inversement). Alors il existe $r \in [a, b]$ tel que $f(r) = 0$.

Théorème (du point fixe)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Alors il existe $\hat{x} \in [a, b]$ tel que $f(\hat{x}) = 0$.

Exercices

Exercice

Soit f une fontion telle que $h(x) = \dfrac{\ln(1+x^2+e^x)}{\sqrt{x}}$*. Sur quels intervalles la fonction f est elle définie et continue ?*

Exercice

Soit f une fontion telle que $f(x) = x^3 + x + 4$*.*

- *Montrer que l'équation* $f(x) = 0$ *a au moins une solution* x_0 *sur* $]-2, -1[$*.*
- *Montrer que cette solution est unique.*
- *En déduire un encadrement de* x_0*.*

Dérivabilité

- Soit f une fonction définie au voisinage de a.
  - f est dite dérivable en a si la quantité suivante existe

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

    Cette limite s'appelle nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.
  - f est dite dérivable à droite de a (resp. à gauche de a) si la quantité suivante existe

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (\text{resp.} \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a})$$

    et on la note $f'_+(a)$ (resp. $f'_-(a)$).
  - f est dite dérivable en a si et seulement si f est dite dérivable à droite et à gauche de a et $f'_+(a) = f'_-(a)$.
  - f est dérivable en a alors f est continue en a mais la réciproque est fausse en générale.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.
  f est dite dérivable sur I si elle est dérivable en tout point I.

Dérivées successives

- Lorsque f est dérivable sur un intervalle ouvert I, on définit la fonction dérivée de f et on la note par f'.
- Lorsque f' est continue, on dit que f est continûment dérivable.
- Lorsque f' est dérivable sur un intervalle ouvert I, on définit la fonction dérivée de f' et on la note par f'' en l'appelant fonction dérivée seconde de f.
- Pour tout entier positif n, on note $f^{(n)}$ fonction dérivée d'ordre n de f lorsqu'elle existe.
- f est dite indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I lorsque pour tout entier positif n, $f^{(n)}$ existe.

Opérations et composition

Soit f et g deux fonctions dérivables en a.

- $f+g$ est dérivable en a et $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
- fg est dérivable en a et $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$,
- f/g est dérivable en a (pourvue que g ne s'annule pas en a) et

$$(\frac{f}{g})'(a) = \frac{f'(a)g(a) - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}.$$

- Soit f une fonction dérivable en a et g une fonction dérivable en $f(a)$. Alors $g \circ f$ est dérivable en a et

$$(g \circ f)'(a) = (g' \circ f)(a) * f'(a).$$

Dérivées des fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	
x^n	nx^{n-1}	
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$	$\frac{1}{x \ln a}$	$x > 0, a > 0, a \neq 1$
$\exp x$	$\exp x$	
$a^x = \exp(x \ln a)$	$a^x \ln a$	$a > 0, a \neq 1$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	

Différentielle

- f est dite différentiable en a lorsqu'il existe un réel β et une fonction ε tels que, pour tout réel h, on ait

$$f(a+h) = f(a) + \beta h + |h|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- f est dérivable en a si et seulement si f est différentiable en a.
- f est différentiable en a alors il existe une fonction ε telle que, pour tout réel h, on ait

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + |h|\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

- Soit f une fonction dérivable en a. On appelle différentielle de f en a l'application linéaire, notée $df(a)$, qui à $h \in \mathbb{R}$ associe $f'(a)h$.

Exercice

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}} & \text{si} & x \neq 9 \\ 6 & \text{si} & x = 9. \end{array} \right.$$

- Calculer la limite de f lorsque x tend vers 9. f est elle continue en 9 ?
- Calculer de $f'(x)$ pour $x \neq 9$.
- Etudier la dérivabilité de f en 9.
- La fonction f' est elle continue en 9 ?

Exercice

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) + |x^2 - 1| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

- Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0. f est elle continue en 0 ?
- Calculer de $f'(x)$ pour $x \neq -1, 1$ et 0.
- Etudier la dérivabilité de f en $-1, 1$ et 0.
- La fonction f' est elle continue en 0 ?

Théorèmes fondamentaux

Théorème (des accroissements finis)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Théorème (de Rolle)

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(b) = f(a) = 0$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Règle de l'Hôpital

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$.

- Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ lorsque x tend vers a et si $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie alors

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Si $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ est de la forme indéterminée $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ lorsque x tend vers ∞ et si $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou est infinie alors

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemple

Calculons $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\exp x}{x}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, le rapport $\dfrac{\exp x}{x}$ est de la forme indéterminée $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ est que $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\exp x}{1} = +\infty$.

D'où,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{1} = +\infty.$$

Formules de Taylor (1/2)

Théorème (Formule de Taylor-Lagrange)

Soit f, $n+1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$. Alors pour tout h vérifiant $a+h \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a+\theta h).$$

En particulier (pour $a = 0$ et $h = x$),

Théorème (Formule de Mac-Laurin)

Soit f, $n+1$ fois dérivable sur un intervalle ouvert $I \ni 0$. Alors pour tout $x \in I$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x).$$

Formules de Taylor (2/2)

Théorème (Formule de Taylor-Young)

Soit f, n fois dérivable sur un intervalle en a. Alors pour tout h tel que $a+h$ est au voisinage de a, il existe une fonction ε telle que

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(a) + h^n\varepsilon(h),$$

où $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

En particulier (pour $a = 0$ et $h = x$),

Théorème (Formule de Taylor)

Soit f, n fois dérivable en 0. Alors pour tout x au voisinage de 0, il existe une fonction ε telle que

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x),$$

où $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Développements limités

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 lorsqu'il existe des constantes $c_0, c_1, \ldots, c_n$ et une fonction ε telles que

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exemple

La fonction $f(x) = \exp x$ étant indéfiniment dérivable en 0, on a grâce à la formule de Taylor-Young

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} \ldots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x),$$

où $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Exercices

Exercice

Calculer les limites suivantes

- $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3^x + 5^x - 8}{x^2 - 1}$.
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x} - 1 - x}{x^2}$.

Exercice

Calculer le développement limité d'ordre n au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

Fonctions concaves – Fonctions convexes

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- f est dite concave lorsque, pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \geq \quad \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) \in I,$$
- f est dite strictement concave lorsque, pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad > \quad \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$
- f est dite convexe lorsque, pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad \leq \quad \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),$$
- f est dite strictement convexe lorsque, pour tout $x, y \in I$ et pour tout $\lambda \in [0,1]$, on ait
$$x \neq y \quad \Rightarrow \quad f(\lambda x + (1-\lambda)y) \quad < \quad \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y).$$

Opérations et caractérisation

- Si f et g sont concaves (resp. convexes) sur I alors $f+g$ est concave (resp. convexe) sur I.
- Si f est concave (resp. convexe) sur I et $\lambda \geq 0$ alors λf est concave (resp. convexe) sur I.
- Si f est concave (resp. convexe) sur I et $\lambda \leq 0$ alors λf est convexe (resp. concave) sur I.

Soit f une fonction 2 fois dérivable sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

- Si f est concave ssi $\forall x \in I$, on ait $f''(x) \leq 0$.
- Si $\forall x \in I, f''(x) < 0$ alors f est strictement concave.
- Si f est convexe ssi $\forall x \in I$, on ait $f''(x) \geq 0$.
- Si $\forall x \in I, f''(x) > 0$ alors f est strictement convexe.

Exemple

- *La fonction* $f(x) = -x^2$ *est 2 fois dérivable sur* $\mathbb{R}$. *Elle est strictement concave car* $\forall x \in I, f''(x) = -2 < 0$.
- *La fonction* $f(x) = \ln x$ *est 2 fois dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Elle est strictement concave car* $\forall x \in I, f''(x) = -1/x^2 < 0$.

Exercices

Exercice

Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + ax^2 + x.$$

f peut elle être convexe sur $\mathbb{R}$?

Exercice

Montrer que la fonction $f(x) = -\exp((x-2)^2)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}$.

Optimisation dans $\mathbb{R}$ (1/2)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.

- f admet un maximum global en a sur I lorsque

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \leq f(a).$$

  On dit alors que a fournit un maximum global à f sur I ou a est solution globale du problème

$$\max_{x \in I} f(x).$$

- f admet un maximum global strict en a sur I lorsque

$$\forall x \in I, x \neq a, \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(a).$$

- f admet un maximum local en a sur I lorsqu'il existe $r > 0$

$$\forall x \in]a - r, a + r[\cap I, \qquad f(x) \leq f(a).$$

- f admet un maximum local strict en a si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq a$.

Optimisation dans $\mathbb{R}$ (2/2)

- f admet un minimum global en a sur I lorsque

$$\forall x \in I, \qquad f(x) \geq f(a).$$

  On dit alors que a fournit un minimum global à f sur I ou a est solution globale du problème

$$\min_{x \in I} f(x).$$

- f admet un minimum global strict en a sur I lorsque

$$\forall x \in I, x \neq a, \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(a).$$

- f admet un minimum local en a sur I lorsqu'il existe $r > 0$

$$\forall x \in]a-r, a+r[\cap I, \qquad f(x) \geq f(a).$$

- f admet un minimum local strict en a si l'inégalité précédente est stricte pour $x \neq a$.

Un extremum est un maximum ou un minimum.

Théorèmes fondamentaux (1/2)

Théorème (Condition nécessaire du premier ordre)

Si f admet un extremum local en a alors $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse en général.

Exemple

$f(x) = x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f'(0) = 0$ mais 0 est ni un maximum ni un minimum car f est strictement croissant sur $\mathbb{R}$.

Théorème (Condition nécessaire du second ordre)

Soit f une fonction 2 fois dérivable au voisinage de a.

- *Si f admet un maximum local en a alors $f''(a) \leq 0$.*
- *Si f admet un minimum local en a alors $f''(a) \geq 0$.*

Théorèmes fondamentaux (2/2)

Théorème (Condition suffisante du second ordre)

Soit f une fonction 2 fois dérivable au voisinage de a.

- *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local strict en a.*
- *Si $f'(a) = 0$ et $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local strict en a.*

Théorème (Condition nécessaire et suffisante)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \ni a$ de $\mathbb{R}$. Si

- *f est concave alors f admet un maximum global en a ssi $f'(a) = 0$.*
- *f est convexe alors f admet un minimum global en a ssi $f'(a) = 0$.*

Exemple

Soit $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{5}{2}x^2 - 24x + 9$. Cherchons les extrema de f.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Nous avons

$$f'(x) = x^2 + 5x - 24 \quad \text{et} \quad f''(x) = 2x + 5.$$

En résolvant $f'(x) = 0$, nous obtenons deux candidats 3 et -8.
D'après la condition suffisante du second ordre, f admet un minimum local strict en 3 car $f''(3) = 11 > 0$ et un maximum local strict en -8 car $f''(-8) = -11 < 0$.
Les extrema sont bien locaux car

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Exemple

Etudions $\max_{x\in]0,2[} \sqrt{x}+\sqrt{2-x}$.
f est deux fois dérivable sur $]0,2[$.
Nous avons

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2\sqrt{2-x}} \quad \text{et} \quad f''(x)=-\frac{1}{4x^{3/2}}-\frac{1}{4(2-x)^{3/2}}.$$

En résolvant $f'(x)=0$, 1 est alors candidat. Sur $]0,2[$, $f''(x)<0$. Alors f est strictement concave. D'après la condition nécessaire et suffisante, 1 fournit un maximum global strict à f sur $]0,2[$.

Exercices

Exercice

Etudier les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes

- $f(x) = -2x^3 + 12x + 3.$
- $f(x) = -x \ln x$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$.
- $f(x) = x \exp(x) - 3.$

Exercice

Soit $c \in \mathbb{R}$. *On considère la fonction*

$$f(x) = c \ln(1 + x) + x.$$

- *Quel est le domaine de définition* D *de* f *?*
- *Pour quelle valeur de* c, f *est elle convexe ?*
- *Suivant les valeurs de* c, *étudier* $\min_{x \in D} f(x)$.