Introduction à la théorie des catégories

Damiano Mazza

Table des matières

1 Un point de vue catégorique sur les ensembles

En un certain sens, le langage catégorique est une généralisation du langage ensembliste que l'on apprend depuis l'école élémentaire. Ce langage nous permet, autant que possible, d'appliquer notre intuition ensembliste aux objets mathématiques les plus variés, y compris ceux qui ne sont nullement des ensembles.[1]

Le prix à payer pour cette généralisation, c'est de se franchir de la notion d'« élément » d'un ensemble. Nous commencerons donc par reprendre quelques constructions élémentaires sur les ensembles et nous nous efforcerons de les reformuler *sans mentionner les éléments des ensembles en question*. Intuitivement, une reformulation sera acceptable si elle n'utilisera pas le symbole d'appartenance ensembliste : dès que l'on écrit $a \in A$, on est en train de nommer un élément a de l'ensemble A, et nous n'en avons pas droit dans ce jeux. On a droit, au contraire, à faire appel autant que l'on le souhaite à l'existence de *fonctions* entre ensembles. Comme d'habitude, on écrira

$$f : A \to B, \qquad \text{ou bien} \qquad A \xrightarrow{f} B,$$

pour dire que f est une fonction de l'ensemble A à l'ensemble B.[2] L'ensemble A est appelé *domaine*, ou *source* de f, tandis que B est appelé *codomaine*, ou *but* de f. Parmi toutes les fonctions sur un ensemble A, il y a toujours l'*identité* $\mathrm{id}_A : A \to A$. Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$, on a droit à les *composer* en formant $g \circ f : A \to C$, et l'identité est l'élément neutre de la composition, c'est-à-dire $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$.

On a également droit à *tester l'égalité* de fonctions : lorsque $f, g : A \to B$ (on dit que f et g sont *parallèles*), on peut toujours affirmer ou vérifier que $f = g$. Ceci a normalement plus d'intérêt lorsque f et/ou g sont définies par composition d'autres fonctions, par exemple

$$f_2 \circ f_1 = g_3 \circ g_2 \circ g_1.$$

Les catégoriciens « dessinent » ce type d'équations sous forme de *diagrammes commutatifs*. En supposant que $f_1 : A \to C$, $f_2 : C \to B$, $g_1 : A \to D_1$, $g_2 : D_1 \to D_2$ et $g_3 : D_2 \to B$, l'équation ci-dessus s'exprime par la commutativité du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& & C \arrow[drr, "f_2"] & & \\
A \arrow[urr, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & & B \\
& D_1 \arrow[rr, "g_2"'] & & D_2 \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}$$

La forme des diagrammes est souvent évoquée dans le langage informel. Par exemple, pour le diagramme ci-dessus on parlera d'un « pentagone ».

1. Ce point de vue est loin de couvrir toutes les applications de la théorie des catégories, mais il est néanmoins la base de la *théorie des topos*, qui en constitue une partie assez vaste et importante. Sans prétention d'en fournir un traitement technique, nous utiliserons implicitement la structure de topos comme guide dans cette courte introduction au langage catégorique.

2. Ici, toutes les fonctions seront implicitement *totales*, c'est-à-dire $f : A \to B$ implique que $f(a)$ est défini pour tout $a \in A$.

Vu comme un graphe dirigé, le pentagone ci-dessus ne contient que deux chemins parallèles (ayant même source et même but) : celui correspondant à $f_2 \circ f_1$ et celui correspondant à $g_3 \circ g_2 \circ g_1$. Dans la pratique, on fait souvent recours à des diagrammes plus complexes, dans lesquels il y a plus que deux chemins parallèles, comme cela :

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[drr, "f_2"] \arrow[ddr, "h"] & & \\
A \arrow[urr, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & & B \\
 & D_1 \arrow[rr, "g_2"'] & & D_2 \arrow[ur, "g_3"'] &
\end{tikzcd}$$

Lorsque l'on dit qu'un tel diagramme commute, on entends que tous les sous-diagrammes possibles commutent, c'est-à-dire, que toutes les paires de chemins parallèles présents dans le diagramme donnent lieu à des égalités de morphismes. Par exemple, la commutativité du diagramme ci-dessus revient à affirmer les égalités $h \circ f_1 = g_2 \circ g_1$ et $g_3 \circ h = f_2$. Cela implique, bien entendu, l'égalité $f_2 \circ f_1 = g_3 \circ g_2 \circ g_1$, c'est-à-dire la commutativité du diagramme le plus externe. (Au contraire, la commutativité d'un diagramme n'implique pas en général la commutativité de ses éventuels sous-diagrammes).

1.1 La notion d'isomorphisme

Une des notions les plus fondamentales en théorie des catégories, et en mathématique plus généralement, est celle d'*isomorphisme*. Dans les ensembles, ceci correspond à la notion de *bijection*, dont la formulation habituelle est bien connue. Soit $f : A \to B$ une fonction :

— f est *injective* (on dit également qu'elle est une *injection*) si, pour tout $a, a' \in A$, $f(a) = f(a')$ implique $a = a'$ (f n'envoie jamais deux éléments distincts de A sur le même élément de B).

— f est *surjective* (on dit également qu'elle est une *surjection*) si, pour tout $b \in B$, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$ (f atteint la totalité de l'ensemble B, autrement dit l'image de f est égale à B).

— f est *bijective* (on dit également qu'elle est une *bijection*) si elle est en même temps injective et surjective.

On remarque la présence du symbole d'appartenance ensembliste ($\in$) dans la définition ci-dessus : nous sommes en train d'utiliser le fait qu'un ensemble contient des éléments.

En fait, la notion de bijection peut être reformulée sans passer par les notions d'injectivité et surjectivité et, encore plus important de notre point de vue, sans mentionner les éléments des ensembles en question. Il suffit de considérer la notion d'*inversibilité*.

Définition 1.1 (inverse d'une fonction) *Une fonction $f : A \to B$ est* inversible à gauche *(resp.* à droite*) s'il existe $g : B \to A$ tel que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ (resp. $f \circ g =$*

id_B). *Dans ce cas, on dit que* g *est une* inverse à gauche *(resp.* à droite*) de* f*. Si* g *est à la fois inverse à gauche et à droite, on parle tout simplement d'*inverse *de* f *et on dit que* f *est* inversible*.*

Lemme 1.2 (unicité de l'inverse) *Soit* $f : A \to B$ *et soient* g *et* d *une inverse à gauche et à droite de* f*, respectivement. Alors,* $g = d$*. En particulier, l'inverse de* f*, si elle existe, est unique.*
Preuve. Nous avons

$$g = g \circ \mathrm{id}_B = g \circ (f \circ d) = (g \circ f) \circ d = \mathrm{id}_A \circ d = d,$$

où nous avons utilisé : la neutralité des identités, la définition d'inverse à droite, l'associativité de la composition, la définition d'inverse à gauche et de nouveau la neutralité des identités. □

On dénote habituellement par f^{-1} l'inverse de f (si elle existe).

Définition 1.3 (isomorphisme) *Une fonction* f *est un* isomorphisme *(ou juste* iso*) si elle est inversible, c'est-à-dire, si* f^{-1} *existe.*

Lemme 1.4 (stabilité par composition) *La composée de deux isos est un iso.*
Preuve. Soit $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux isos. Il est immédiat de vérifier que $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. □

Lemme 1.5 (bijection « sans éléments ») *Une fonction* $f : A \to B$ *est une bijection ssi elle est un isomorphisme.*

Preuve. Soit f bijective. Si $B = \emptyset$, nous avons forcement $A = \emptyset$ (une fonction ne peut pas avoir codomaine vide sauf si son domaine est aussi vide) et f est sa propre inverse, car en fait $f = \mathrm{id}_\emptyset$ (l'unique fonction du vide dans lui-même). Sinon, pour tout $b \in B$ on sait, par surjectivité, qu'il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. De plus, par injectivité on sait qu'un tel a est unique. On peut donc poser $f^{-1}(b) := a$, et il est immédiat de vérifier que f^{-1} est l'inverse de f.

Supposons maintenant que f soit un iso. Si $A = \emptyset$, f est forcement injective (c'est l'unique fonction du vide dans B). Sinon, soient $a, a' \in A$ tels que $f(a) = f(a')$. On a alors $f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a'))$, ce qui implique $a = a'$, ce qui montre bien l'injectivité de f. De même, si $B = \emptyset$, f est forcement bijective (et donc surjective) car, comme observé ci-dessus, $A = \emptyset$ aussi. Sinon, soit $b \in B$. Nous avons évidemment $f^{-1}(b) \in A$ tel que $f(f^{-1}(b)) = b$, donc f est surjective. Dans tous les cas, f est injective et surjective, donc bijective. □

La morale du Lemme 1.5 est que nous pouvons parler de bijection entre deux ensembles A et B *sans faire appel aux éléments de* A *et* B, mais plutôt en parlant d'existence de l'inverse. Ceci nous permet de transporter cette notion dans n'importe quel contexte où nous avons des objects munis de transformations entre eux, composables de façon associative et avec des éléments neutres (les transformations identiques), *sans savoir si ces objets sont constitués ou non par des « éléments »*. En effet, nous invitons le lecteur à vérifier que la preuve du

Lemme 1.2 ne mentionne jamais les éléments du domaine ou du codomaine des fonctions en question. Ainsi, en prouvant le Lemme 1.2, nous avons démontré sans le savoir notre premier résultat de théorie des catégories : l'unicité de l'inverse est une propriété valide dans n'importe quel contexte où nous ayons des transformations composables de façon associative et avec des éléments neutres. [3]

La notion d'isomorphisme peut ainsi être appliquée telle quelle dans n'importe quel contexte de ce genre :

— des structures algébriques, comme les groupes (deux groupes G, H sont isomorphes s'il existe deux homomorphismes de groupes $f : G \to H$, $g : G \to H$ qui sont l'un l'inverse de l'autre) ;

— des structures géométriques, comme les espaces topologiques (deux espaces topologiques X, Y sont isomorphes [4] s'il existe deux fonctions continues $f : X \to Y$, $g : Y \to X$ qui sont l'une l'inverse de l'autre) ;

— ou des structures mixtes, comme les espaces vectoriels topologiques (deux espaces vectoriels topologiques E, F sont isomorphes s'il existe deux fonctions linéaires continues $f : E \to F$, $g : F \to E$ qui sont l'une l'inverse de l'autre).

De manière générale, on écrira $A \cong B$ pour exprimer le fait qu'il existe un iso $f : A \to B$ (ou un iso $g : B \to A$, ce qui est la même chose), et on dira que A et B sont *isomorphes*. L'isomorphisme est une relation d'équivalence : il est réflexif (l'identité id_A, qui est évidemment inversible, prouve que $A \cong A$), symétrique (si $f : A \to B$ est un iso prouvant que $A \cong B$, f^{-1} est un iso prouvant que $B \cong A$) et transitive (si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont deux isos prouvant que $A \cong B$ et $B \cong C$, le Lemme 1.4 nous assure que $g \circ f$ est un iso aussi, prouvant que $A \cong C$).

Du point de vue de la théorie des catégories, *deux objets isomorphes sont essentiellement égaux*, dans le sens où cela n'a aucun intérêt, dans la pratique mathématique, de les distinguer. Il est important d'observer que la notion d'isomorphisme est fortement liée au contexte dans lequel on place les objets : si on change les transformations que l'on considère, deux objets isomorphes peuvent cesser de l'être, ou, au contraire, deux objets qui n'étaient pas isomorphes peuvent le devenir. L'intuition est que les transformations entre objets « parlent », en quelque sorte, de la *structure* des objets en question, et un même objet peut être considéré comme ayant plusieurs structures. Par exemple, un anneau est aussi un groupe, et un groupe est aussi un ensemble. Or, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas isomorphes en tant qu'anneaux, mais ils sont isomorphes en tant que groupes (additifs). De même, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas isomorphes en tant que groupes, mais il le sont en tant qu'ensembles (il existe une bijection entre les deux, voir Sect. 1.2, Exemple 1.7 et Exemple 1.9).

3. La validité du Lemme 1.2 à ce niveau de généralité a été soulignée par une barre verticale orange en marge gauche du texte. On emploie cette démarcation typographique, que le lecteur aura déjà remarquée plusieurs fois, pour mettre en évidence toute situation de ce genre au cours de la présente section, c'est-à-dire, tout(e) définition, énoncé ou preuve se généralisant au delà des ensembles et des fonctions, de la façon qui sera traitée formellement en Sect. 2.

4. Pour les espaces topologiques, on emploie peut-être plus souvent la terminologie *homéomorphes*, mais ce n'est qu'un synonyme.

1.2 Digression : la signification d'isomorphisme d'ensembles

L'identification d'objets isomorphes a parfois des conséquences apparemment contre-intuitives.

Exemple 1.6 *Soit* $P := \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$ *et* $Q := \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ *les ensembles des nombres naturels paires et impaires, respectivement. On a* $P \cong Q$*. En effet, la fonction* $n \mapsto n + 1$ *est évidemment une bijection, son inverse étant* $n \mapsto n - 1$*.*

En fait, $P \cong Q \cong \mathbb{N}$*, où* $\mathbb{N}$ *est l'ensemble de tous les nombres naturels. Il suffit de considérer la fonction* $\mathbb{N} \to P$ *telle que* $n \mapsto 2n$*, avec inverse* $n \mapsto \frac{n}{2}$*.*

Doit-on conclure qu'il n'y a aucune différence entre nombres paires et impaires ? Cela dépend. La leçon que l'on apprend ici, c'est que l'isomorphisme entre ensembles (la bijection) *ne parle d'aucune structure que ce soit* sur les ensembles eux-mêmes : elle traite les ensembles comme des collections de « cailloux flottant dans l'espace », sans aucun lien entre eux. Nous pouvons attacher des étiquettes à ces cailloux (par exemple des nombres naturels), mais ceux-ci restent des cailloux, et le fait que l'on ait étiqueté un caillou par « 2 » et un autre caillou par « 42 » n'implique absolument pas que le premier soit « plus petit » que le deuxième, ou qu'il en soit un « diviseur » etc. Toutes ces qualités n'ont aucun sens du point de vue purement ensembliste. De ce point de vue, il n'y a en effet aucune différence entre l'ensemble des nombres paires, l'ensemble des nombres impaires ou même l'ensemble de tous les nombres : il s'agit de la même collection de cailloux, étiquetés de façon différente.

Bien entendu, lorsque l'on munit les nombres naturels de structures supplémentaires, en particulier de la structure habituelle que nous leur avons attribué depuis l'école élémentaire (celle de semianneau linéairement ordonné), P (les paires) et Q (les impaires) ne sont plus identifiables : par exemple, le premier est un idéal, le deuxième non. C'est à cause de cette structure habituelle, tellement habituelle que nous ne pouvons presque pas nous empêcher de la considérer, que les ensembles P et Q nous semblent très différents et que l'affirmation $P \cong Q$ nous semble contre-intuitive. Mais il n'y a en réalité rien de choquant, pas plus que dans l'affirmation que les ensembles $\{\text{rouge}, \text{vert}, \text{bleu}\}$ et $\{\text{pomme}, \text{poire}, \text{mangue}\}$ sont isomorphes.

Pour poursuivre cette digression, nous allons nous amuser à donner des exemples de bijection encore plus contre-intuitifs que celui de l'Exemple 1.6.

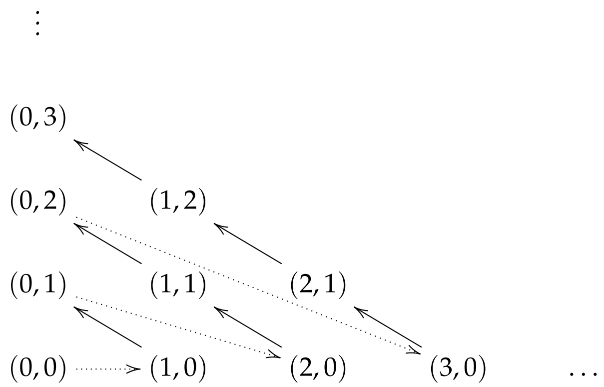
Exemple 1.7 *L'ensemble* $\mathbb{Z}$ *des entiers relatifs (c'est-à-dire, contenant* $\mathbb{N}$ *plus tous les nombres entiers négatifs) est en bijection avec* $\mathbb{N}$*. En effet, il suffit de considérer la suite infinie*

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots.$$

Cela établit bien un bijection $\beta : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$*, qui envoie* n *sur le* n*-ième élément de la suite, en commençant le décompte par zéro (par exemple,* $\beta(4) = -2$*). Cette fonction est évidemment injective (aucun nombre n'est répété dans la suite) et surjective (tout nombre finit par apparaître tôt ou tard dans la suite).*

Une suite comme celle ci-dessus, qui ne contient pas de répétitions et qui contient tout élément d'un ensemble A, et dite une *énumération* de A. Évidemment, montrer $A \cong \mathbb{N}$ est équivalent à donner une énumération de A.

Exemple 1.8 *On a $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$, où $\mathbb{N}^2$ est l'ensemble des paires de nombre naturels. Pour vérifier cela, écrivons les paires sur un plan cartésien, et traversons les « anti-diagonales » du bas vers le haut, en nous éloignant de plus en plus de l'origine :*



Cela donne l'énumération suivante :

$$(0,0),(1,0),(0,1),(2,0),(1,1),(0,2),(3,0),(2,1),(1,2),(0,3),\ldots$$

En composant cette bijection, on obtient $\mathbb{N}^n \cong \mathbb{N}$ pour tout $n > 0$.

Exemple 1.9 *Soit $\mathbb{Q}_+$ l'ensemble des nombres rationnels strictement positifs. On a $\mathbb{Q}_+ \cong \mathbb{N}$. En effet, tout nombre rationnel positif admet une représentation unique en termes de fractions réduites, c'est-à-dire de la forme $\frac{p}{q}$ où p et q n'ont pas de facteurs communs. On peut donc injecter $\mathbb{Q}_+$ dans $\mathbb{N}^2$ en associant la paire (p,q) a une telle fraction. On prend alors l'énumération de l'Exemple 1.8 et on « saute » toutes les paires (m,n) où soit l'un entre m ou n est nul, soit $\frac{m}{n}$ n'est pas réduite. Cela donne évidemment une énumération de toutes les paires (p,q) avec $\frac{p}{q}$ réduite, et donc une énumération de $\mathbb{Q}_+$.*

À partir de cela, on déduit que $\mathbb{Q} \cong \mathbb{N}$, où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble de tous les rationnels. En effet, on peut construire une énumération dans le style de l'Exemple 1.7. Soit $x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$ l'énumération de $\mathbb{Q}_+$ donnée ci-dessus. On a immédiatement une énumération $-x_0, -x_1, -x_2, -x_3, \ldots$ de $\mathbb{Q}_-$ (les rationnels strictement négatifs), et on construit la suite

$$0, x_0, -x_0, x_1, -x_1, x_2, -x_2, x_3, -x_3, \ldots$$

qui est une énumération de $\mathbb{Q}$: elle ne contient pas de répétition car elle est composée de deux énumérations disjointes, plus le nombre 0 qui n'apparaît pas dans ces énumérations ; et tout rationnel y apparaît, car $\mathbb{Q} = \{0\} \cup \mathbb{Q}_+ \cup \mathbb{Q}_-$.

Après cette suite d'exemples surprenants, le lecteur pourrait avoir l'impression que tout ensemble infini est isomorphe. Le mathématicien allemand Georg Cantor se posa la même question vers la fin du XIXème siècle, et il trouva une réponse négative :

Théorème 1.10 (Cantor) *Pour tout ensemble A, il n'y a pas de surjection $A \to P(A)$, où $P(A)$ est l'ensemble des parties de A (c'est-à-dire, l'ensemble des sous-ensembles de A).*

Preuve. Soit A un ensemble quelconque. Supposons, par l'absurde, qu'il y ait une surjection $\gamma : A \to P(A)$. Soit

$$G := \{a \in A \mid a \notin \gamma(a)\}.$$

Par définition, G est un sous-ensemble de A, c'est-à-dire $G \in P(A)$. Par surjectivité de γ, il existe $g \in A$ tel que $\gamma(g) = G$. De deux chose l'une : soit $g \in G$, soit $g \notin G$. Dans le premier cas, par définition de G on déduit $g \notin G$, contradiction. Dans le deuxième cas, toujours par définition de G on déduit $g \in G$, qui est également une contradiction. $\square$

Le théorème de Cantor nous dit, par exemple, que $P(\mathbb{N}) \ncong \mathbb{N}$. De même, $P(P(\mathbb{N})) \ncong P(\mathbb{N})$, et ainsi de suite. On a donc une infinité d'ensembles infinis non isomorphes. Cependant, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ est en bijection avec un ensemble bien connu, comme le montre la suite d'exemples suivant.

Exemple 1.11 *Soit $]0,1[$ l'intervalle ouverte des réels entre 0 et 1. On a $]0,1[\cong \mathbb{R}$, l'ensemble de tous les nombres réels. Une bijection entre les deux est offerte par un fonction classique en analyse : si l'on pose*

$$f(x) := \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2},$$

on a que $f : \mathbb{R} \to]0,1[$ est bien injective (car monotone stricte) et surjective (car continue).

Exemple 1.12 *Soit $[0,1]$ l'intervalle close des réels entre 0 et 1. On a $[0,1] \cong]0,1[$. La construction de cette bijection n'est pas immédiate et requiert une petite astuce. Soit S un sous-ensemble de $[0,1]$ contenant 0 et 1 et tel que $S \cong \mathbb{N}$ (par exemple, $S := \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$), et soit $S^\circ := S \setminus \{0,1\}$. Tout énumération de S induit une énumération de S° (il suffit de « sauter » 0 et 1), on a donc aussi $S^\circ \cong \mathbb{N}$, ce qui veut dire qu'il existe une bijection $f : S \to S^\circ$. Or, si l'on pose $\overline{S} := [0,1] \setminus S$, on a évidemment que $[0,1] = S \cup \overline{S}$ et $]0,1[= S^\circ \cup \overline{S}$, les deux réunions étant disjointes. On définit alors la fonction $g : [0,1] \to]0,1[$ ainsi :*

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in S \\ x & \text{si } x \in \overline{S} \end{cases}$$

Il s'agit d'une bijection : elle est injective, car f et $\mathrm{id}_{\overline{S}}$ sont injectives et de codomaine disjoint ; elle est surjective, car f est surjective sur S° et $\mathrm{id}_{\overline{S}}$ est surjective sur $\overline{S}$.

Exemple 1.13 *Sot $2^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites infinies de 0 et 1. On a $2^{\mathbb{N}} \cong P(\mathbb{N})$. En effet, chaque suite infinie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{0,1\}$ induit une partie de $\mathbb{N}$ de la façon suivante :*

$$\{n \in \mathbb{N} \mid b_n = 1\}.$$

Réciproquement, chaque partie $A \subseteq \mathbb{N}$ induit une suite $(\chi_n^A)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $\{0,1\}$ telle que $\chi_n^A = 1$ ssi $n \in A$. Vue comme fonction $\mathbb{N} \to \{0,1\}$, χ^A est habituellement appelée fonction caractéristique *de A.*

Exemple 1.14 *On a* $P(\mathbb{N}) \cong \mathbb{R}$*, l'ensemble des nombres réels. D'après l'Exemple 1.11, l'Exemple 1.12 et l'Exemple 1.13, il suffit de montrer que* $2^{\mathbb{N}} \cong [0,1]$*. Pour cela, on considère le développement en base 2 : tout réel* $0 \leq x \leq 1$ *admet un unique développement en base 2, de la forme*

$$x = 0.b_0 b_1 b_2 b_3 \ldots$$

où $b_i \in \{0,1\}$*. Par exemple,*

$$\begin{aligned} 0 &= 0.0000000000000\ldots \\ 1 &= 0.1111111111111\ldots \\ \frac{1}{2} &= 0.1000000000000\ldots \\ \frac{1}{10} &= 0.0001100110011\ldots \end{aligned}$$

En oubliant le $0.$ *initial, on obtient une bijection entre* $[0,1]$ *et* $2^{\mathbb{N}}$*.*

En composant la bijection $[0,1] \to 2^{\mathbb{N}}$ *ci-dessus avec la bijection* $2^{\mathbb{N}} \to P(\mathbb{N})$ *de l'Exemple 1.13, on obtient une bijection* $[0,1] \to P(\mathbb{N})$ *dont, par exemple, les images des nombres ci-dessus sont*

$$\begin{aligned} 0 &\mapsto \emptyset \\ 1 &\mapsto \mathbb{N} \\ \frac{1}{2} &\mapsto \{0\} \\ \frac{1}{10} &\mapsto \{3,4,7,8,11,12,\ldots\} \end{aligned}$$

Donc $\mathbb{R} \ncong \mathbb{N}$: même si $\mathbb{N}$ contient une infinité de cailloux, $\mathbb{R}$ en contient « encore plus », dans les sens où toute façon de coupler chaque cailloux de $\mathbb{N}$ avec un unique cailloux de $\mathbb{R}$ finit par laisser plein de cailloux de $\mathbb{R}$ sans correspondant.

Tout comme $\mathbb{N}^2 \cong \mathbb{N}$, on a aussi $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}$.

Exercice 1.15 *Trouver une bijection* $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*. (Suggestion : penser aux nombres réels en termes de suites binaires, comme dans l'Exemple 1.14).*

En particulier, en tant qu'ensembles, $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}$ (où $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes). Cet isomorphisme est bien sûr faux lorsque l'on considère $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$ avec leur structure algébrique d'anneau (ou de corps).

1.3 Monomorphismes et épimorphismes

Les notions d'injectivité et de surjectivité aussi peuvent être reformulées de façon à ne pas mentionner les éléments des ensembles en question :

Définition 1.16 (monomorphisme) *Une fonction* $f : A \to B$ *est un* monomorphisme *(ou juste* mono*) si pour toutes fonctions* $g, h : C \to A$*,* $f \circ g = f \circ h$ *implique* $g = h$*. Pour marquer graphiquement que* f *est un mono, on écrit souvent*

$f : A \rightarrowtail B$.

Lemme 1.17 (stabilité par composition) *La composée de deux monos est un mono.*
Preuve. Laissée au lecteur comme exercice. □

Lemme 1.18 (injection « sans éléments ») *Une fonction est une injection ssi elle est un monomorphisme.*

Preuve. Soit $f : A \to B$ injective, soient g, h comme dans l'énoncé et supposons que $f \circ g = f \circ h$. Si $C = \emptyset$, alors forcement $g = h$ (il y a une unique fonction de l'ensemble vide vers n'importe quel ensemble). Sinon, on choisit arbitrairement $c \in C$ et on a, par hypothèse, $f(g(c)) = f(h(c))$, ce qui implique $g(c) = h(c)$ par injectivité de f, ce qui implique $g = h$ car c est arbitraire.

Soit maintenant $f : A \to B$ un monomorphisme. Si $A = \emptyset$, alors f est l'unique fonction du vide dans B et elle est trivialement injective. Sinon, on remarque que tout $a \in A$ induit une fonction $g_a : \{*\} \to A$, où $\{*\}$ est un ensemble avec un seul élément $*$: c'est la fonction qui envoie $*$ sur a. Prenons donc $a, a' \in A$ et supposons que $f(a) = f(a')$. Comme $f(a) = f(g_a(*))$ et $f(a') = f(g_{a'}(*))$, nous avons $f \circ g_a = f \circ g_{a'}$, ce qui implique par hypothèse $g_a = g_{a'}$, ce qui implique $a = a'$, et donc f est injective. □

Définition 1.19 (épimorphisme) *Une fonction $f : A \to B$ est un* épimorphisme *(ou juste* épi*) si pour toutes fonctions $g, h : B \to C$, $g \circ f = h \circ f$ implique $g = h$. Pour marquer graphiquement que f est un épi, on écrit souvent $f : A \twoheadrightarrow B$.*

Lemme 1.20 (stabilité par composition) *La composée de deux épis est un épi.*
Preuve. Laissée au lecteur comme exercice. □

Lemme 1.21 (surjection « sans éléments ») *Une fonction est surjective ssi elle est un épimorphisme.*

Preuve. Soit $f : A \to B$ surjective et soient g, h comme dans l'énoncé telles que $g \circ f = h \circ f$. Si $B = \emptyset$, alors forcement $g = h$ (il y a une unique fonction du vide vers n'importe quel ensemble). Sinon, soit $b \in B$. Par surjectivité de f, il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Par hypothèse, on a donc $(g \circ f)(a) = (h \circ f)(a)$, c'est-à-dire $g(f(a)) = h(f(a))$, c'est-à-dire $g(b) = h(b)$, ce qui implique $g = h$ car b est arbitraire.

Supposons maintenant que $f : A \to B$ soit un épimorphisme. Encore une fois, si $B = \emptyset$ alors $A = \emptyset$ et $f = \mathrm{id}_\emptyset$, donc f est surjective et nous n'avons rien à démontrer. Supposons donc $B \neq \emptyset$ et prenons $b \in B$. Soit $g : B \to \{0, 1\}$ la fonction qui envoie tous les éléments de B sur 0, et soit $h : B \to \{0, 1\}$ la fonction qui envoie tous les éléments de $B \setminus \{b\}$ sur 0 et b sur 1. On a évidemment $g \neq h$, donc en utilisant l'hypothèse de façon contraposée, on déduit $g \circ f \neq h \circ f$, ce qui veut dire qu'il existe $a \in A$ tel que $(g \circ f)(a) \neq (h \circ f)(a)$. Mais $g(b') = h(b')$ pour tout $b' \neq b$, donc on a forcement $f(a) = b$, ce qui prouve que f est surjective. □

Les Lemme 1.5, Lemme 1.18 et Lemme 1.21 montrent que, dans les ensembles, iso = bijection, mono = injection et épi = surjection, respectivement. Comme injection + surjection = bijection, cela nous mène à l'« équation »

$$\text{mono} + \text{épi} = \text{iso}.$$

Cette affirmation, qui est bien sûr vraie dans les ensembles, est fausse dans des contextes plus généraux. Plus précisément, on a

Lemme 1.22 *Tout iso et aussi mono et épi.*
PREUVE. Soit $f : A \to B$ un iso. Soient $g, h : C \to A$ tels que $f \circ g = f \circ h$. Nous avons donc $f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ (f \circ g)$, d'où $g = h$ par associativité de la composition, ce qui montre que f est un mono.

Soient maintenant $g, h : B \to C$ tels que $g \circ f = h \circ f$. Nous avons donc $(g \circ f) \circ f^{-1} = (h \circ f) \circ f^{-1}$, d'où $g = h$ par associativité de la composition, ce qui montre que f est un épi. □

Cependant, la réciproque n'est pas vraie en générale : si on se restreint au cadre général d'une loi de composition associative et avec des éléments neutres, sans aucune hypothèse supplémentaire, il n'y a aucun moyen de montrer qu'une transformation f est un iso (c'est-à-dire, de construire un inverse pour f) uniquement en supposant qu'elle soit à la fois un monomorphisme et un épimorphisme. Le cas des ensembles est assez particulier et est loin d'être la norme.

1.4 Produits

La définition de *produit cartésien* de deux ensembles A et B est bien connue : il s'agit de l'ensemble, noté $A \times B$, de toutes les paires (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$. On peut observer, comme d'habitude, l'apparition du symbole $\in$. Nous procéderons à donner une définition équivalente mais « sans éléments », à un détail près : nous ne réussirons pas à définir *exactement* l'ensemble $A \times B$ introduit ci-dessus mais nous en capturerons la définition *modulo isomorphisme*, c'est-à-dire, nous définirons une classe d'ensembles tous isomorphes les uns les autres, parmi lesquels il y aura aussi $A \times B$.

Définition 1.23 (produit) *Soient A et B deux ensembles. Un* produit *de A et B est un ensemble P muni de deux fonctions*

$$\pi_1 : P \to A$$
$$\pi_2 : P \to B$$

tel que, pour tout autre ensemble C muni de deux fonctions

$$f : C \to A$$
$$g : C \to B$$

il existe une unique fonction $u : C \to P$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "u"] \arrow[dr, "g"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[r, "\pi_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

Les fonctions π_1 et π_2 sont appelées *projections*. La fonction u, qui dépend bien sûr de f et g, est souvent notée $\langle f, g \rangle$.[5]

Nous avons parlé de « un » produit dans la définition, car il y en général plusieurs ensemble différents pouvant jouer le rôle de P. Cependant, ils sont tous isomorphes, selon un unique isomorphisme canonique :

Lemme 1.24 (unicité du produit modulo iso) *Soient P, P' deux produits de A et B. Alors, $P \cong P'$. De plus, si π_1, π_2 sont les projections de P et π'_1, π'_2 sont les projections de P', il existe un unique isomorphisme $u : P' \to P$ tel que $\pi'_1 = \pi_1 \circ u$ et $\pi'_2 = \pi_2 \circ u$.*

Lemme 1.25 (préservation du produit par iso) *Soit P un produit de A et B, et soit $P' \cong P$. Alors, P' aussi est un produit de A et B.*

Nous encourageons le lecteur à prouver le Lemme 1.24 et le Lemme 1.25. Nous ne le ferons pas ici car nous démontrerons par la suite deux résultats beaucoup plus généraux (Lemme 2.20, Lemme 2.21), dont le Lemme 1.24 et le Lemme 1.25 sont des cas particuliers. L'important, c'est de savoir que l'on a bien droit de parler « du » produit de A et B, car cette notion est unique modulo isomorphisme et, du point de vue catégorique, l'isomorphisme est essentiellement une égalité.

Vérifions maintenant que la Définition 1.23 capture bien le produit cartésien, modulo isomorphisme :

Lemme 1.26 *Soient A, B, P trois ensembles. Alors, P est le produit de A et B ssi $P \cong A \times B$.*

Preuve. Il suffit de démontrer que $A \times B$ est bien un produit de A et B dans le sens de la Définition 1.23. Le résultat découle alors du Lemme 1.24 et du Lemme 1.25 : en effet, en supposant que $A \times B$ est un produit, si P est un produit le Lemme 1.24 implique $P \cong A \times B$; dans l'autre direction, si $P \cong A \times B$, le Lemme 1.25 nous assure que P aussi est un produit, en sachant que $A \times B$ l'est.

Démontrons donc que $A \times B$ est le produit de A et B. Il faut d'abord définir les projections de $A \times B$:

$$\pi_1(a, b) := a \qquad\qquad \pi_2(a, b) := b,$$

ce qui est tout à fait attendu. Soit maintenant C un ensemble quelconque, avec $f : C \to A$ et $g : C \to B$ deux fonctions quelconques. Nous définissons une

5. La notation est censée rappeler une paire, elle n'a rien à voir avec un produit scalaire.

fonction $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ de la façon suivante :

$$\langle f, g\rangle(c) := (f(c), g(c)).$$

Il est clair que $\pi_1 \circ \langle f, g\rangle = f$ et $\pi_2 \circ \langle f, g\rangle = g$, donc le diagramme de la Définition 1.23 commute. Il reste à vérifier que la fonction $\langle f, g\rangle$ est la seule à faire commuter le diagramme. Supposons que $h : C \to A \times B$ soit une autre fonction faisant commuter le diagramme. Si $C = \emptyset$, alors trivialement $h = \langle f, g\rangle$ (il y a une seule fonction du vide vers n'importe quel ensemble). Si $C \neq \emptyset$, on peut prendre $c \in C$ arbitraire et considérer $h(c)$. En tant qu'élément de $A \times B$, on a forcement $h(c) = (a, b)$ pour un certain $a \in A$ et $b \in B$. On a donc $\pi_1(h(c)) = a$ et $\pi_2(h(c)) = b$. Mais, par hypothèse, $\pi_1(h(c)) = f(c)$ et $\pi_2(h(c)) = g(c)$, donc $h(c) = (f(c), g(c))$, ce qui implique $h = \langle f, g\rangle$ puisque c est arbitraire. $\square$

1.5 Objet terminal

Le produit cartésien a un élément neutre, si l'on travaille à isomorphisme près. En effet, si on dénote par 1 n'importe quel singleton (ensemble avec un seul élément), nous avons, pour tout ensemble A,

$$A \times 1 \cong 1 \times A \cong A.$$

Par exemple, si l'on dénote par $*$ le seul élément de 1, la fonction de type $A \times 1 \to A$ qui envoie $(a, *)$ sur a est évidemment une bijection.

On peut caractériser, modulo isomorphisme, un ensemble avec un seul élément *sans parler d'éléments*.

Définition 1.27 (objet terminal) *Un ensemble U est* terminal *si, pour tout ensemble A, il existe une unique fonction $A \to U$.*

Lorsqu'il existe, l'objet terminal est unique modulo un unique isomorphisme. De plus, la propriété d'être terminal est préservée par isomorphisme.

Lemme 1.28 (unicité de l'objet terminal modulo iso) *Soient U, U' deux objets terminaux. Alors, $U \cong U'$ via un unique isomorphisme.*

Preuve. Par terminalité de U, il existe une unique $u : U' \to U$. Symétriquement, par terminalité de U' il existe une unique $u' : U \to U'$. Or, $u' \circ u = \mathrm{id}_U$, toujours par terminalité de U. Symétriquement, $u \circ u' = \mathrm{id}_{U'}$ par terminalité de U'. Donc $u' = u^{-1}$ et on a bien un unique isomorphisme. $\square$

Lemme 1.29 (préservation de l'objet terminal par iso) *Soit U terminal et $U' \cong U$. Alors, U' est terminal aussi.*

Preuve. Soit $i : U \to U'$ l'isomorphisme entre U et U'. Soit A un ensemble quelconque. Par terminalité de U, il existe une fonction $u : A \to U$, et donc il existe aussi $i \circ u : A \to U'$. On va montrer que cette fonction est unique. Soit

$f : A \to U'$. On a alors $i^{-1} \circ f : A \to U$, et donc $i^{-1} \circ f = u$ par terminalité de U. Mais alors $f = \mathrm{id}_{U'} \circ f = (i \circ i^{-1}) \circ f = i \circ (i^{-1} \circ f) = i \circ u$. □

Comme pour le produit, on peut vérifier que la définition d'ensemble terminal capture bien la notion de singleton, modulo isomorphisme :

Lemme 1.30 *Un ensemble U est terminal ssi $U \cong 1$ (un singleton).*

Preuve. Comme pour le Lemme 1.26, il suffit de démontrer que 1 est bien terminal (dans le sens de la Définition 1.27), et le résultat découle du Lemme 1.28 et du Lemme 1.29.

Soit $1 := \{*\}$ et soit A un ensemble quelconque. Si $A = \emptyset$, il y a une unique fonction $A \to 1$. Si $A \neq \emptyset$, il y a aussi une seule fonction, car on n'a pas le choix : tout élément $a \in A$ doit être envoyé sur $*$. □

L'objet terminal nous offre une façon de parler d'éléments d'un ensemble en parlant de fonctions : en effet, donné un ensemble quelconque A, il y a une bijection entre A et l'ensemble des fonctions $1 \to A$. Ainsi, au lieu d'écrire « soit $a \in A$ », il est parfaitement équivalent d'écrire « soit $a : 1 \to A$ ». Nous avons donc une façon apparemment universelle de convertir un énoncé ou une définition « ensembliste » en un énoncé ou une définition « catégorique », c'est-à-dire, « sans éléments ». Malheureusement, cette méthode n'est pas vraiment universelle car la bijection dont il est question ici est spécifique aux ensembles et n'est pas valide dans des contextes plus généraux, où l'objet terminal pourrait ne pas exister. Cependant, l'idée qu'une transformation $X \to A$ (où X est quelconque) est une espèce d'« élément généralisé » de A est importante en théorie des catégories.

1.6 Sous-objets

Dans la pratique mathématique il arrive très souvent de parler de *sous-ensembles*. La définition habituelle utilise le symbole $\in$: un ensemble X est un sous-ensemble (ou partie) d'un ensemble A si pour tout $a \in X$, on a $a \in A$. On écrit alors $X \subseteq A$. Encore une fois, on va donner une définition « sans éléments », qui sera équivalente modulo isomorphisme.

Définition 1.31 (sous-objet) *Soit A un ensemble. Un* sous-objet *de A est un monomorphisme $i : X \rightarrowtail A$. On dit que deux sous-objets $i : X \rightarrowtail A$ et $j : Y \rightarrowtail A$ sont* isomorphes, *ce que l'on note comme d'habitude par $i \cong j$, s'il existe un iso $h : X \to Y$ tel que $i = j \circ h$.*

Lemme 1.32 *Soit $i : X \rightarrowtail A$ et $j : Y \rightarrowtail A$ deux sous-objets de A, et soit $k : X \to Y$ tel que $i = j \circ k$. Alors :*

1. *k aussi est un mono ;*
2. *si $k' : X \to Y$ est tel que $i = j \circ k'$, alors $k' = k$.*

En particulier, si $i \cong j$, alors l'isomorphisme est unique.

Preuve. Nous exhortons le lecteur à prouver ce résultat en guise d'exercice. Nous l'énonçons ici par complétude mais nous ne nous en servirons pas dans la suite. $\square$

Parmi tous les sous-objets de A, il existe bien sûr les sous-ensembles proprement dits : si on a $X \subseteq A$, on a une injection canonique (qui est un mono par le Lemme 1.18) $X \rightarrowtail A$ qui envoie tout élément de X (s'il y en a) sur lui-même. Ce sont en fait les seuls sous-objets, modulo isomorphisme, ce qui montre que la Définition 1.31 capture bien la notion de sous-ensemble :

Lemme 1.33 *Pour tout ensemble A, $i : X \to A$ est un sous-objet de A ssi il existe $X' \subseteq A$ tel que $i \cong i'$ avec i' l'injection canonique de X' dans A.*

Preuve. Soit $i : X \rightarrowtail A$ un mono. Définissons l'image de i de la façon habituelle :

$$\mathrm{im}(i) := \{a \in A \mid \exists\, x \in X.\ i(x) = a\}.$$

Grâce au Lemme 1.18, nous savons que i est une injection, ce qui veut dire que tout élément $a \in \mathrm{im}(i)$ a un unique antécédent x_a. Ceci établit une bijection entre X et $\mathrm{im}(i) \subseteq A$, qui est clairement un iso entre i et l'injection canonique.

Pour la réciproque, s'il existe $X' \subseteq A$ avec i' son injection canonique, et s'il existe un iso $h : X \to X'$ tel que $i = i' \circ h$, on a que i' est un mono (Lemme 1.18) et h est un mono (Lemme 1.22), d'où i est un mono (Lemme 1.17). $\square$

Même si, strictement parlant, un sous-objet de A est un mono $i : X \rightarrowtail A$, il est assez courant d'omettre i et de parler directement de X comme sous-objet de A. Il arrivera donc que l'on dise « soit $X \rightarrowtail A$ un sous-objet de A », sans donner de nom au mono aillant de X à A. Quoique commode, cette pratique cache une imprécision, car il peut y avoir plusieurs sous-objets différents (c'est-à-dire, non isomorphes) avec la même source. Par exemple, si $X := \{0, 1\}$ et $A := \{a, b, c\}$, nous pouvons considérer les fonctions $i, j : X \to A$ telles que

$$\begin{aligned} i(0) &= a & \qquad j(0) &= a \\ i(1) &= b & \qquad j(1) &= c. \end{aligned}$$

Il s'agit évidemment de deux injections, donc de deux monos, donc de deux sous-objets de A. Or, on vérifie immédiatement que $i \ncong j$: il n'y a que deux bijections sur $\{0, 1\}$, à savoir l'identité et la fonction s qui échange les éléments : $s(0) = 1$ et $s(1) = 0$. Évidemment $i \neq j$, donc l'identité n'est pas un isomorphisme. Pour ce qui concerne s, nous invitons le lecteur à vérifier que $i \circ s \neq j$ et $j \circ s \neq i$, donc s n'est pas non plus un isomorphisme entre i et j. En effet, i et j correspondent à deux sous-ensemble de A de même cardinalité (2) mais *différents* : i correspond à $\{a, b\}$, tandis que j correspond à $\{a, c\}$.

Ceci montre que dire juste « soit $X \rightarrowtail A$ un sous-objet de A » est imprécis. Dans la pratique, cet abus de terminologie est sans danger : il suffit de ne jamais parler en même temps d'un autre sous-objet de A avec la même source X. C'est-à-dire, au lieu de dire « soient $i, j : X \rightarrowtail A$ deux sous-objets de A », on pourra dire « soient $X \rightarrowtail A$ et $Y \rightarrowtail A$ deux sous-objets de A », en choisissant un Y isomorphe à X comme source de j. Dans cet emploi abusif de la terminologie, on imputera à X les propriétés que l'on aurait normalement (et plus exactement) imputées à i. On écrira, par exemple, $X \cong Y$ au lieu de $i \cong j$.

1.7 Égaliseurs

Il est très courant en mathématique de définir des ensembles par des solutions d'équations. Par exemple, le cercle de rayon 2 centré en l'origine est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que $x^2 + y^2 = 4$. En symboles, si l'on dénote par Cercle_r^c le cercle centré en $c \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\mathrm{Cercle}_2^{(0,0)} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4\}.$$

Une équation peut toujours être interprétée comme l'égalisation de deux fonctions parallèles (avec même domaine et codomaine), une pour chaque côté de l'égalité. Dans l'exemple ci-dessus, on a deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telles que $f(x, y) := x^2 + y^2$ et $g(x, y) := 4$ (c'est-à-dire, g est la fonction constante qui envoie tous les points du plan sur 4), et on peut écrire

$$\mathrm{Cercle}_2^{(0,0)} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = g(x, y)\}.$$

On abouti ainsi à la notion générale d'*ensemble des solutions d'une équation*. Soient A, B deux ensembles quelconques et soient $f, g : A \to B$. On définit

$$\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}} := \{x \in A \mid f(x) = g(x)\}.$$

Comme d'habitude, le symbole $\in$ figure explicitement dans la définition de $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$. Nous allons donner une définition « sans éléments » équivalente, modulo isomorphisme.

Définition 1.34 (égaliseur) *Soient $f, g : A \to B$ quelconques. Un* égaliseur *de f et g est un ensemble E muni d'une fonction*

$$i : E \to A$$

telle que $f \circ i = g \circ i$, et tel que, pour tout ensemble C muni d'une fonction

$$h : C \to A$$

satisfaisant $f \circ h = g \circ h$, il existe une unique $u : C \to E$ telle que $h = i \circ u$.

La fonction $i : E \to A$ est parfois appelée *inclusion* de l'égaliseur (dans A).

Les deux résultats suivants sont, encore une fois, des cas particuliers du Lemme 2.20 et Lemme 2.21 :

Lemme 1.35 (unicité de l'égaliseur modulo iso) *Soient $f, g : A \to B$ et soient E, E' deux égaliseurs de f et g. Alors, $E \cong E'$. De plus, si i et i' sont les inclusions de E et E' dans A, il existe un unique iso $u : E' \to E$ tel que $i' = i \circ u$.*

Lemme 1.36 (préservation de l'égaliseur par iso) *Soit E un égaliseur de $f, g : A \to B$, et soit $E' \cong E$. Alors, E' est aussi un égaliseur de f et g.*

La notion d'égaliseur capture bien celle d'ensemble de solutions d'une équation, modulo isomorphisme :

Lemme 1.37 *Soient $f, g : A \to B$. Un ensemble E est l'égaliseur de f et g ssi $E \cong \mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$.*

Preuve. Comme d'habitude, il suffit de montrer que $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$ est bien un égaliseur (dans le sens de la Définition 1.34), et le résultat découle du Lemme 1.35 et Lemme 1.36.

Tout d'abord, l'inclusion est triviale : par définition, $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}} \subseteq A$, et $i : \mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}} \to A$ est l'injection canonique. Il est ainsi immédiat (par définition) que $f \circ i = g \circ i$. Soit maintenant $h : C \to A$ telle que $f \circ h = g \circ h$. Si $C = \emptyset$, alors h est la fonction vide et, trivialement, la fonction vide $u : C \to \mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$ est l'unique telle que $h = i \circ u$. Supposons donc que $C \neq \emptyset$, et choisissons arbitrairement $c \in C$. Puisque, par hypothèse, $f(h(c)) = g(h(c))$, nous avons $h(c) \in \mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$, et donc $\mathrm{im}(h) \subseteq \mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$ par généricité de c. Donc, si u est la fonction h restreinte a $\mathrm{im}(h)$, on a bien $h = i \circ u$. Il reste à prouver que u est unique avec cette propriété. Soit donc $k : C \to \mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$ telle que $h = i \circ k$. Rappelons que nous sommes toujours sous l'hypothèse $C \neq \emptyset$, nous pouvons donc choisir $c \in C$ arbitrairement. En rappelant que l'injection canonique i envoie un élément sur lui-même, on a

$$k(c) = i(k(c)) = h(c) = i(u(c)) = u(c),$$

ce qui montre $k = u$ par généricité de c. □

Pour $f, g : A \to B$, comme $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}} \subseteq A$, on sait en combinant le Lemme 1.37 et le Lemme 1.33 que tout égaliseur de f et g est un sous-objet de A. Cependant, nous pouvons montrer ce fait de façon générale, sans faire appel à la définition ensembliste de $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$:

Lemme 1.38 *Soit $f, g : A \to B$ et soit $i : E \to A$ l'égaliseur de f et g. Alors, i est un mono, c'est-à-dire l'égaliseur est toujours un sous-objet de A.*
Preuve. Soient $h, k : C \to E$ telles que $i \circ h = i \circ k$. Nous avons bien sûr que $f \circ (i \circ h) = (f \circ i) \circ h = (g \circ i) \circ h = g \circ (i \circ h)$, ce qui montre que $i \circ h : C \to A$ égalise f et g. En appliquant la propriété de l'égaliseur, nous avons qu'il existe une unique $u : C \to E$ telle que $i \circ h = i \circ u$, et donc $h = u = k$. □

Dans les ensembles, tout mono (c'est-à-dire, toute injection) est l'égaliseur d'une paire de fonctions. En effet, soit $i : A \to B$ une injection, et soient $\blacksquare$ et $\bullet$ deux éléments qui ne sont pas dans B (on peut toujours supposer qu'il y en a, en changeant de nom éventuellement). Considérons les fonctions

$$f, g : B \to B \cup \{\blacksquare, \bullet\}$$

définies ainsi :

$$f(b) := \begin{cases} b & \text{si } b \in \mathrm{im}(i) \\ \blacksquare & \text{sinon} \end{cases} \qquad\qquad g(b) := \begin{cases} b & \text{si } b \in \mathrm{im}(i) \\ \bullet & \text{sinon} \end{cases}$$

Il est clair que $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}} = \mathrm{im}(i)$ et que i est donc l'égaliseur de f et g.

Dans des contextes plus généraux, il existe des monos qui ne sont égaliseurs d'aucune paire de transformations. Le monos qui le sont, sont appelés *réguliers*. La construction ci-dessus montre donc que, dans les ensembles, tous les monos sont réguliers.

1.8 Pullbacks

Soit $f : A \to B$ et soit $Y \subseteq B$. Il est parfois utile de parler d'*image réciproque* de Y par rapport à f : c'est le sous-ensemble de A défini ainsi

$$f^*(Y) := \{a \in A \mid f(a) \in Y\}.$$

Reformulons cela en termes de sous-objets. Le sous-ensemble Y devient un mono $i : Y \rightarrowtail B$, et $f^*(Y)$ est isomorphe au mono $f^*(i) : X \rightarrowtail A$ où

$$X := \{(a,b) \in A \times Y \mid f(a) = i(b)\}$$

et

$$f^*(i)(a,b) := a.$$

L'ensemble X ci-dessus, avec la projection f^* (et celle, non écrite, de type $X \to Y$ agissant comme $(a,b) \mapsto b$), est un exemple de *produit fibré*, notamment de f et i. Plus généralement, si $f : A \to C$ et $g : B \to C$, le produit fibré de f et g, noté un peu abusivement par $A \times_C B$, est défini de la façon suivante :

$$A \times_C B := \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = g(b)\}.$$

La similarité avec l'ensemble des solutions d'une équation est superficielle : même dans le cas où $A = B$ et $f, g : A \to C$ sont parallèles, le produit fibré de f et g est différent de $\mathrm{Sol}_{\mathrm{f=g}}$ car il s'agit d'en ensemble de *paires* de $A \times A$, non pas d'un sous-ensemble de A tout court.

Nous procédons à donner une définition « sans éléments » du produit fibré.

Définition 1.39 (pullback) *Soient $f : A \to C$ et $g : B \to C$ deux fonctions. Un* pullback *de f et g est un ensemble R muni de deux fonctions*

$$p : R \to A$$
$$q : R \to B$$

tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

et tel que, pour tout autre ensemble D muni de fonctions $r : D \to A$ et $s : D \to B$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

il existe une unique $u : D \to R$ telle que

$$r = p \circ u \qquad \text{et} \qquad s = q \circ u.$$

Autrement dit, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[dr, "u"] \arrow[drr, bend left, "s"] \arrow[ddr, bend right, "r"'] & & \\
& R \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

Les fonctions p, q sont appelées *projections* du pullback. La fonction p (resp. q) est aussi appelée *pullback de g le long de f* (resp. *pullback de f le long de g*), et parfois notée $f^*(g)$ (resp. $g^*(f)$).

Le pullback d'un mono est un mono :

Lemme 1.40 (préservation des monos par pullback) *Soient $f : A \to B$ et $j : Y \rightarrowtail B$, où j est un mono. Alors, s'il existe, $f^*(j) : X \rightarrowtail A$ est aussi un mono.*

Preuve. Supposons que le pullback de f et j existe et, comme dans l'énoncé, appelons-le X :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "j^*(f)"] \arrow[d, "f^*(j)"'] & Y \arrow[d, "j"] \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}$$

Par breveté, posons

$$i := f^*(j) \qquad \text{et} \qquad q := j^*(f).$$

Soit maintenant $g : C \to X$ quelconque. Le diagramme suivant commute trivialement :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "g"] \arrow[dd, "g"'] & & X \arrow[dr, "q"] & \\
& & & Y \arrow[dd, "j"] \\
X \arrow[dr, "i"'] & & & \\
& A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Puisque X est le pullback de f et j, nous savons qu'il existe une unique u telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "u"] \arrow[dd, "g"'] & & X \arrow[dr, "q"] & \\
& X \arrow[rr, "q"] \arrow[dd, "i"'] & & Y \arrow[dd, "j"] \\
X \arrow[dr, "i"'] & & & \\
& A \arrow[rr, "f"'] & & B
\end{tikzcd}$$

Il est clair que nous pouvons choisir $u := g$. Supposons maintenant que $h : C \to X$ soit telle que $i \circ g = i \circ h$. Si on montre que $q \circ g = q \circ h$, cela implique que nous pouvons également prendre $u := h$, ce qui implique $g = h$ par unicité de u. Mais ceci est bien le cas : en effet, $i \circ g = i \circ h$ implique $f \circ i \circ g = f \circ i \circ h$, et donc $j \circ q \circ g = j \circ q \circ h$. Mais j est un mono, donc $q \circ g = q \circ h$, comme souhaité. On a ainsi démontré que, pour toutes $g, h : C \to X$, $i \circ g = i \circ h$ implique $g = h$, ce qui revient à dire que i est un mono. □

Dans le cas d'un sous-objet $Y \rightarrowtail B$ et d'une fonction $f : A \to B$, on parle de *pullback de Y le long de f* et on écrit $f^*(Y)$, ce qui évoque la notation d'image réciproque. Le Lemme 1.40 montre que $f^*(Y)$ est bien un sous-objet de A.

On vient maintenant à nos résultats habituels sur l'unicité et la préservation par iso, cas particuliers des Lemme 2.20 et Lemme 2.21 :

Lemme 1.41 (unicité du pullback modulo iso) *Soient $f : A \to C$, $g : B \to C$ et soient R, R' deux pullback de f et g. Alors, $R \cong R'$. De plus, si p, q et p', q' sont les projections de R et R', il existe un unique iso $u : R' \to R$ tel que $p' = p \circ u$ et $q' = q \circ u$.*

Lemme 1.42 (préservation du pullback par iso) *Soit R un pullback de $f : A \to C$ et $g : B \to C$, et soit $R' \cong R$. Alors, R' est aussi un pullback de f et g.*

Dans les ensembles, les pullback coïncident bien avec les produits fibrés, toujours modulo isomorphisme :

Lemme 1.43 *Soient $f : A \to C$ et $g : B \to C$, et soit $A \times_C B$ le produit fibré de A et B par f et g comme défini ci-dessus. Un ensemble R muni de deux fonctions $p : R \to A$ et $q : R \to B$ est un pullback de f et g ssi $R \cong A \times_C B$.*

Preuve. Cette preuve est similaire à celle des résultats analogues en Sect. 1.4, Sect. 1.5 et Sect. 1.7. Elle est laissée au lecteur comme exercice. □

1.9 Objet puissance et classifieur de sous-objets

Nous avons vu dans la Sect. 1.6 comment traiter de façon « sans éléments » la notion de sous-ensemble. Nous allons maintenant considérer une notion étroitement liée, celle d'*ensemble des parties* $P(A)$ d'un ensemble A, c'est-à-dire, l'ensemble dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de A.

Une caractéristique clé de $P(A)$ est que, grâce à cet ensemble, on peut définir la relation d'appartenance $a \in X$ d'un élément de A à un sous-ensemble quelconque X de A. Nous rappelons qu'une *relation binaire* R sur deux ensembles B et C quelconques n'est rien d'autre qu'un sous-ensemble $R \subseteq B \times C$. La relation d'appartenance est juste une relation binaire $\mathrm{App}_A \subseteq A \times P(A)$:

$$\mathrm{App}_A := \{(a, X) \in A \times P(A) \mid a \in X\}.$$

C'est-à-dire, App_A est l'ensemble de toutes les paires (a, X) où a est un élément de A est X est un sous-ensemble de A contenant a. La définition donne immédiatement que, si $X \subseteq A$, écrire $a \in X$ est exactement la même chose qu'écrire $(a, X) \in \mathrm{App}_A$.

L'intuition pour la définition « sans éléments » de $P(A)$ est que la relation App_A est « universelle » au sens où elle permet de récupérer, par image réciproque, toute autre relation binaire sur A et un autre ensemble quelconque B. En effet, soit B un ensemble quelconque et soit $R \subseteq A \times B$ une relation binaire sur A et B. La relation R induit la fonction $\chi_R : B \to P(A)$ ainsi définie :

$$\begin{aligned} \chi_R :\ B &\longrightarrow P(A) \\ b &\longmapsto \{a \in A \mid (a,b) \in R\} \end{aligned}$$

C'est-à-dire, donné un $b \in B$ quelconque, $\chi_R(b)$ est le sous-ensemble de A contenant tous les éléments en relation avec b selon R. L'assignation $R \mapsto \chi_R$ est inversible, dans le sens où R peut être récupérée à partir de χ_R : nous invitons le lecteur à vérifier que

$$R = \{(a,b) \in A \times B \mid a \in \chi_A(b)\}.$$

Or, nous avons observé ci-dessus que, $\chi_A(b)$ étant un sous-ensemble de A, écrire $a \in \chi_A(b)$ est la même chose qu'écrire $(a, \chi_A(b)) \in \mathrm{App}_A$. On peut donc réécrire l'égalité ci-dessus comme

$$R = \{(a,b) \in A \times B \mid (a, \chi_A(b)) \in \mathrm{App}_A\}.$$

Considérons maintenant la fonction $\mathrm{id}_A \times \chi_R : A \times B \to A \times P(A)$ qui, donnée une paire $(a,b) \in A \times B$, se comporte comme l'identité sur a et comme χ_A sur b :

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_A \times \chi_R :\ A \times B &\longrightarrow A \times P(A) \\ (a,b) &\longmapsto (a, \chi_A(b)) \end{aligned}$$

On invite le lecteur à vérifier, à partir de l'égalité ci-dessus, que

$$R = (\mathrm{id}_A \times \chi_R)^*(\mathrm{App}_A),$$

c'est-à-dire, R est l'image réciproque de App_A par $\mathrm{id}_A \times \chi_R$. Dans ce sens App_A est universelle : tout autre relation sur A et B, pour B quelconque, peut être récupérée à partir de App_A par pullback le long de $\mathrm{id}_A \times f$ pour une $f : B \to P(A)$ appropriée. On invite le lecteur à vérifié que, de plus, χ_R est l'unique fonction $f : B \to P(A)$ permettant de retrouver R comme image réciproque de App_A le long de $\mathrm{id}_A \times f$.

Nous avons tout le nécessaire pour donner notre définition « sans éléments » d'ensemble des parties :

Définition 1.44 (objet puissance) *Soit A un ensemble quelconque. Un* objet puissance *de A est un ensemble P muni d'un sous-objet* $\mathrm{App} \rightarrowtail A \times P$ *tel que pour tout ensemble B et sous-objet $R \rightarrowtail A \times B$, il existe une unique fonction $\chi_R : B \to P$ telle que R est le pullback de* App *le long de* $\mathrm{id}_A \times \chi_R$ *:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d, tail] & \mathrm{App} \arrow[d, tail] \\ A \times B \arrow[r, "\mathrm{id}_A \times \chi_R"'] & A \times P \end{tikzcd}$$

Plus précisément, $(\mathrm{id}_A \times \chi_R)^*(\mathrm{App}) \cong R$ *dans le sens d'isomorphisme de sous-objets (Définition 1.31).*

Le mono $\mathrm{App} \rightarrowtail A \times P$ est appelé *relation d'appartenance* de P.

Lemme 1.45 (unicité de l'objet puissance modulo iso) *Soit A un ensemble et soient P, P' deux objets puissance de A. Alors, $P \cong P'$. De plus, si $v : \mathrm{App} \rightarrowtail P$ et $v' : \mathrm{App}' \rightarrowtail P'$ sont les relations d'appartenance de P et P', il existe un unique iso $u : P' \to P$ tel que $v' = v \circ u$.*

Lemme 1.46 (préservation de l'objet puissance par iso) *Soit P un objet puissance de A, et soit $P' \cong P$. Alors, P' est aussi un objet puissance de A.*

Lemme 1.47 *Soit A un ensemble. Un ensemble P est un objet puissance de A ssi $P \cong P(A)$.*

Le cas particulier suivant joue un rôle spécial en théorie des catégories :

Définition 1.48 (classifieur de sous-objets) *Soit 1 l'objet terminal. L'objet puissance de 1 (s'il existe) est appelé* classifieur de sous-objets *et est dénoté par Ω.*

Comme 1 est l'élément neutre du produit, on peut simplifier la propriété de l'objet puissance (Définition 1.44) dans le cas du classifieur de sous-objets et la reformuler ainsi. Le classifieur de sous-objet Ω est muni d'un mono $\mathrm{vrai} : 1 \rightarrowtail \Omega$ tel que, pour tout sous-objet $X \rightarrowtail B$, il existe une unique $\chi_X : B \to \Omega$ telle que X est le pullback de vrai le long de χ_X :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, tail] & 1 \arrow[d, tail, "\mathrm{vrai}"] \\ B \arrow[r, "\chi_X"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

Plus précisément, $X \cong \chi_X^*(\mathrm{vrai})$. Notons que, dans ce cas, la projection $X \to 1$ ne peut être que l'unique fonction dans l'objet terminal.

Dans les ensembles, on sait que 1 est le singleton $\{*\}$ et que les objets puissance existent toujours et sont donnés par les ensembles des parties. Le classifieur de sous-objets est donc

$$P(1) = \{\varnothing, \{*\}\} \cong \{0, 1\},$$

c'est-à-dire l'ensemble à deux éléments. Le mono vrai : $\{*\} \to \{0,1\}$ envoie $*$ sur 1, correspondant au sous-ensemble $\{1\} \subseteq \{0,1\}$. Le nom « vrai » dérive du fait que l'on peut voir $\{0,1\}$ comme l'ensemble des valeurs de vérités, 0 représentant « faux » et 1 représentant « vrai », et la fonction vrai choisit justement la valeur de vérité « vrai ».

On découvre ainsi que la propriété du classifieur de sous-objets décrite abstraitement ci-dessus est quelque chose de très familière : ce n'est rien d'autre que le fait, bien connu, qu'une partie X d'un ensemble B est la même chose qu'une fonction $\chi_X : B \to \{0,1\}$, appelée *fonction caractéristique* de X, définie de la façon suivante :

$$\chi_X(b) := \begin{cases} 1 & \text{si } b \in X, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Quand on dit que « X est la même chose que χ_X », on veut dire que X peut être récupéré de façon unique à partir de χ_X :

$$X = \{b \in B \mid \chi_X(b) = 1\}.$$

Autrement dit, X est l'image réciproque de $\{1\}$ par χ_X.

2 Les bases du langage catégorique

2.1 Catégories

Au cours de la Sect. 1 nous avons employé à plusieurs reprises la locution, un peu vague, « contexte mathématique dans lequel on a des objets et des transformations entre eux composables de façon associative et avec éléments neutres ». Cela se formalise justement avec la notion de *catégorie* :

Définition 2.1 (catégorie) *Une* catégorie $\mathbf{C}$ *est la donnée de :*

— *une classe* $\mathbf{C}_0$ *d'*objets*, notés* $A, B, C, D \ldots$

— *Pour toute paire d'objets* A, B*, une classe* $\mathbf{C}(A,B)$ *de* morphismes*, ou* flèches *de source* A *et but* B*. On dénote par* $f : A \to B$ *ou encore* $A \xrightarrow{f} B$ *le fait que* $f \in \mathbf{C}(A,B)$*.*

— *Pour toute triplée d'objets* A, B, C*, une application*

$$\circ : \mathbf{C}(B,C) \times \mathbf{C}(A,B) \longrightarrow \mathbf{C}(A,C)$$

appelée composition*, avec les propriétés suivantes :*

associativité : *pour toutes* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$ *et* $h : C \to D$*,* $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$*;*

neutralité : *pour tout* A*, il existe une flèche* $\mathrm{id}_A : A \to A$ *telle que, pour toutes* $g : A \to B$ *et* $h : B \to A$*,* $g \circ \mathrm{id}_A = g$ *et* $\mathrm{id}_A \circ h = h$*.*

Un catégorie $\mathbf{C}$ est dite *localement petite* si, pour tous objets A, B, $\mathbf{C}(A,B)$ est un ensemble. Une catégorie localement petite $\mathbf{C}$ est *petite* si $\mathbf{C}_0$ est lui-même un ensemble. On utilise parfois la notation $A \in \mathbf{C}$ pour dire $A \in \mathbf{C}_0$.

Définition 2.2 (sous-catégorie) *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie. Une* sous-catégorie *de* $\mathbf{C}$ *est une catégorie* $\mathbf{C}'$ *telle que :*

- $\mathbf{C}'_0$ *est une sous-classe de* $\mathbf{C}_0$ *(modulo isomorphisme) ;*
- *pour tout* $A, B \in \mathbf{C}'_0$, $\mathbf{C}'(A, B)$ *est une sous-classe de* $\mathbf{C}(A, B)$ *(modulo isomorphisme) ;*
- *la composition de* $\mathbf{C}'$ *est définie comme dans* $\mathbf{C}$ *: pour toutes* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *flèches de* $\mathbf{C}'$*, si* $h := g \circ f$ *est la composée dans* $\mathbf{C}$*, alors on a* $h \in \mathbf{C}'(A, C)$ *et* h *est aussi la composée de* f *et* g *dans* $\mathbf{C}'$*.*

Une sous-catégorie $\mathbf{C}'$ *de* $\mathbf{C}$ *est*

- pleine *si, pour tous objets* A, B *de* $\mathbf{C}'$*,* $\mathbf{C}'(A, B) \cong \mathbf{C}(A, B)$*, c'est-à-dire,* $\mathbf{C}'$ *est définie en restreignant les objets de* $\mathbf{C}$ *et en prenant* tous *les morphismes qui en résultent ;*
- ample *si* $\mathbf{C}'_0 \cong \mathbf{C}_0$*, c'est-à-dire, les objets de* $\mathbf{C}'$ *sont (modulo isomorphisme) les mêmes que ceux de* $\mathbf{C}$*, tandis que* $\mathbf{C}'$ *pourrait contenir moins de morphismes que* $\mathbf{C}$*.*

Exemple 2.3 *L'exemple primordial de catégorie localement petite est* **Set***, dont les objets sont les ensembles et, donné deux ensembles* A *et* B*,* $\mathbf{Set}(A, B)$ *est l'ensemble des fonctions de* A *dans* B*, qui se composent comme d'habitude. C'est la catégorie qui fait l'objet de la Sect. 1. Il ne s'agit pas d'une petite catégorie car, par le théorème de Cantor (Théorème 1.10), la classe de tous les ensembles n'est pas un ensemble. C'est d'ailleurs pour cette raison que, dans la définition de catégorie (Définition 2.1), nous avons employé le mot « classe » au lieu d'« ensemble ».*

Comme on vient de le mentionner, la Sect. 1 est essentiellement une étude de la catégorie **Set**. Cependant, un grand nombre de notions introduites lors de cet étude (isomorphisme, monomorphisme, objet terminal, produit. . .) ne sont pas du tout limitées à **Set** mais s'appliquent à n'importe quelle catégorie. Pour souligner ce fait, nous avons mis en évidence par une barre verticale orange en marge gauche du texte toute définition, énoncé et preuve qui ne dépend pas de **Set** mais qui se généralise à toute catégorie. Ces définitions, énoncés et preuves restent parfaitement valables dans n'importe quelle catégorie pourvu que l'on remplace le mot « ensemble » par « objet » et le mot « fonction » par « flèche ». Dans la suite, on prendra donc la liberté de faire appel à ce notions, avec la même terminologie, dans le cadre d'une catégorie quelconque. En fait, on adoptera désormais une approche catégorique générale et on n'employera plus le démarcage typographique adopté dans la Sect. 1 (sinon on devrait mettre une barre verticale orange le long de la marge gauche de quasiment *tout* le reste de ce texte !).

Exemple 2.4 *Le lecteur avec un peu d'expérience mathématique connaîtra déjà plusieurs exemples de catégories :*

- **Pos***, dont les objets sont les ensembles ordonnés et les flèches les fonctions monotones.*
- **Mon***, dont les objets sont les monoïdes et les flèches les homomorphismes de monoïdes.*
- **CMon***, la sous-catégorie pleine de* **Mon** *dont les objets sont les monoïdes commutatifs.*

- **Grp**, *la sous-catégorie pleine de* **Mon** *dont les objets sont les groupes.*
- **Ab**, *la sous-catégorie pleine à la fois de* **Grp** *et de* **CMon** *dont les objets sont les groupes abéliens.*
- *pour un corps k fixé,* $\mathbf{Vect}_k$, *la catégorie dont les objets sont les espaces vectoriels sur k et les flèches les fonctions linéaires.*
- **Top**, *dont les objets sont les espaces topologiques et les flèches les fonctions continues.*

Toutes ces catégories sont localement petites mais pas petites.

Exemple 2.5 *La définition de catégorie généralise simultanément les ensembles, les préordres, les monoïdes et les (multi)graphes (dirigés). En effet :*

- *tout ensemble X définit une catégorie dont les objets sont les éléments de X et où il n'y a que les flèches identité. Une telle catégorie est dite* discrète.
- *Un* préordre *est une paire $(X, \leq)$ où X est un ensemble et $\leq$ une relation réflexive et transitive sur X. En d'autres termes, un préordre est un ensemble ordonné qui n'est pas forcement anti-symétrique, c'est-à-dire, il peut exister $x \neq y \in X$ tels que $x \leq y$ et $y \leq x$. Donné un préordre $(X, \leq)$, on peut toujours définir la relation d'équivalence $x \sim x'$ ssi $x \leq x$ et $x' \leq x$, et on vérifie aisément que $(X/\!\sim, \leq)$ (le quotient par la relation d'équivalence $\sim$) est un ensemble ordonné.*
  Un préordre $(X, \leq)$ induit une catégorie de la façon suivante : les objets sont les éléments de X, et il y a une flèche entre x et y ssi $x \leq y$. La transitivité garantit que l'on peut définir la composition et la réflexivité garantit l'existence des identités. Notons que dans cette catégorie il y a au plus une flèche entre chaque paire d'objets. Une telle catégorie est dite fine *(«* thin *» en anglais).*
- *Un monoïde $(M, \cdot, e)$ induit une catégorie de la façon suivante : il y a un seul objet, appelons-le $*$, et il y a une flèche $x : * \to *$ pour chaque élément x de M. La composition est donnée par la loi de monoïde : $x \circ y := x \cdot y$. L'identité est donné par l'élément neutre : $\mathrm{id}_* := e$. On peut voir cela comme une définition alternative de monoïde : un monoïde, c'est juste une catégorie avec un seul objet.*
- *Un multigraphe dirigé est un graphe dirigé où l'on peut avoir plusieurs arrêtes entre les mêmes sommets. Un multigraphe dirigé G induit une catégorie G^* de la façon suivante : les objets de G^* sont les sommets de G ; donnés deux sommets x, y, $G^*(x, y)$ est l'ensemble des chemins de x à y, y compris le chemin vide au cas où $x = y$. La composition est donné par la concaténation de chemins. L'identité id_x est le chemin vide sur x. On dit que G^* est la* catégorie libre *sur le graphe G.*

Toutes les catégories décrites ci-dessus sont petites.

Exemple 2.6 *Il existe aussi des catégories* finies *(et donc forcément petites) intéressantes. Nous les utiliserons dans la suite.*

- *Trois cas particuliers de catégories discrètes (avec seulement les flèches identités) :*
  - **0**, *la catégorie vide : pas d'objets, et donc pas de morphismes ;*
  - **1**, *la catégorie avec un seul objet ;*
  - $\mathbf{Disc}_2$, *la catégorie avec deux objets.*
- **Ar**, *la catégorie avec deux objets a, b et une flèche $a \to b$ (plus les identités).*

— **Par**, *la catégorie avec deux objets a, b et deux flèches parallèles $a \rightrightarrows b$ (plus les identités) ;*
— **Cosp**, *la catégorie avec trois objets a, b, c et deux flèches $a \to c$, $b \to c$ (plus les identités).*

Dans chacune de ces catégories, nous n'avons pas à définir la composition car elle est triviale, c'est-à-dire, les seules compositions possibles sont de la forme $f \circ g$ avec au moins une entre f et g étant une identité, le résultat étant donc obligé.

On donne maintenant deux exemples particulièrement utiles de façons de définir des catégories à partir d'autres déjà définies.

Définition 2.7 (produit de catégories) *Le* produit *de deux catégories* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *est la catégorie dénotée par* $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ *ainsi définie :*
— *les objets sont les paires (A, B) où A est un objet de $\mathbf{A}$ et B est un objet de $\mathbf{B}$;*
— *les flèches $(A, B) \to (A', B')$ sont des paires (f, g) où $f : A \to A'$ est une flèche de $\mathbf{A}$ et $g : B \to B'$ est une flèche de $\mathbf{B}$;*
— *la composition se fait composante par composante : $(f', g') \circ (f, g) := (f' \circ f, g' \circ g)$, en utilisant les compositions de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Les identités sont les paires d'identités : $\mathrm{id}_{(A,B)} := (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$.*

Définition 2.8 (catégorie slice) *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie et* A *un objet de* $\mathbf{C}$. *La* catégorie slice *sur* A *(*slice *signifie « tranche » en anglais), dénotée par* $\mathbf{C}/A$, *et définie de la façon suivante :*
— *les objets sont les flèches de $\mathbf{C}$ avec but A, c'est-à-dire de la forme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] \\ A \end{tikzcd}$$

pour X arbitraire.
— *Si $f : X \to A$ et $g : Y \to A$ sont deux objets de $\mathbf{C}/A$, un flèche $f \to g$ est une flèche $h : X \to Y$ de $\mathbf{C}$ telle que $g = f \circ h$, c'est-à-dire telle que le triangle suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

— *La composition est définie comme dans $\mathbf{C}$: par exemple, si $f_1 : X_1 \to A$, $f_2 : X_2 \to A$ et $f_3 : X_3 \to A$ sont trois objets de $\mathbf{C}/A$ et si on a deux flèches $h_1 : f_1 \to f_2$ et $h_2 : f_2 \to f_3$ de $\mathbf{C}/A$, $h_2 \circ h_1$ est bien une flèche de type $f_1 \to f_3$ dans $\mathbf{C}/A$, comme le montre le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "h_1"] \arrow[dr, "f_1"'] & X_2 \arrow[r, "h_2"] \arrow[d, "f_2"] & X_3 \arrow[dl, "f_3"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

L'identité id_f de $f : X \to A$ est donc id_X.

2.2 Foncteurs

Définition 2.9 (foncteur) *Soient* $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ *deux catégories. Un* foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est la donné de :*

- *une application* $F_0 : \mathbf{A}_0 \to \mathbf{B}_0$ *;*
- *pour tous objets* A, B *de* $\mathbf{A}$*, une application*

$$F_{A,B} : \mathbf{A}(A, B) \to \mathbf{B}(F_0(A), F_0(B));$$

avec les propriété suivantes :

préservation de la composition : *pour toutes flèches* $f : A \to B$*,* $g : B \to C$ *de* $\mathbf{A}$*,*

$$F_{A,C}(g \circ f) = F_{B,C}(g) \circ F_{A,B}(f);$$

préservation des identités : *pour tout objet* A *de* $\mathbf{A}$*,*

$$F_{A,A}(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F_0(A)}.$$

Les indices sont habituellement omis, ce qui donne les notations simplifiées $F(A)$ *et* $F(f)$ *pour l'image d'un objet et d'une flèche de* $\mathbf{A}$*, respectivement. Lorsque ce n'est pas nécessaire, on fait aussi économie de parenthèses, en écrivant* FA *et* Ff *au lieu de* $F(A)$ *et* $F(f)$*. Avec ces conventions, les propriétés du foncteur deviennent plus concises et claires :*

$$F(g \circ f) = Fg \circ Ff$$
$$F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{FA}$$

Définition 2.10 (composition de foncteurs) *Donnés deux foncteurs* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *et* $G : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$*, on définit un foncteur* $G \circ F : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *de la façon suivante :*

- $(G \circ F)_0 := G_0 \circ F_0$ *;*
- *pour tous objets* A, B *de* $\mathbf{A}$*,* $(G \circ F)_{A,B} := G_{F_0(A),F_0(B)} \circ F_{A,B}$*.*

Il est évident que ceci vérifie en effet les propriétés d'un foncteur. On vérifie aussi aisément que cette loi de composition est associative.

Si $\mathbf{A}$ *est une catégorie, il y a un foncteur évident* $\mathrm{Id}_A : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ *qui envoie tout objet sur lui-même et toute flèche sur elle-même. Il est évident que ce foncteur est l'identité pour la composition définie ci-dessus.*

Exemple 2.11 *Avec les définitions ci-dessus, on a deux autres exemples de catégorie :*

- **Cat***, la catégorie dont les objets sont les petites catégories et les flèches les foncteurs. C'est une catégorie localement petite (mais pas petite). Les catégories de l'Exemple 2.5 sont des objets de cette catégorie. Au contraire, ni* **Set***, ni les catégories de l'Exemple 2.4 ne sont des objets de* **Cat***. Et, bien entendu,* **Cat** *non plus n'est pas un objet d'elle-même !*
- *Cat (attention à la notation !), la catégorie dont les objets sont les catégories localement petites et les flèches les foncteurs. Tous les exemples de catégories vus jusqu'ici (Exemple 2.3, Exemple 2.4, Exemple 2.5, ainsi que* **Cat** *elle-même) sont des objets de cette catégorie. C'est notre premier exemple de catégorie qui n'est même pas localement petite. En effet, soient* $\mathbf{A}$ *est* $\mathbf{B}$ *deux catégories localement petites, avec* $\mathbf{B}$ pas *petite, et soit* B *un objet de* $\mathbf{B}$*. On peut toujours*

définir le foncteur $K_B : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui est constant sur B : il envoie tout objet de $\mathbf{A}$ sur B et tout morphisme de $\mathbf{A}$ sur id_B. Donc $\mathcal{C}at(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ contient une classe en bijection avec la classe des objets de $\mathbf{B}$. Mais, par hypothèse, celle-ci est une classe propre (c'est-à-dire, une classe qui n'est pas un ensemble), et une classe contenant une classe propre ne peut pas être un ensemble.

En regardant les catégories comme des objets de **Cat** ou de $\mathcal{C}at$, selon ce qui est approprié pour leur taille, on peut parler d'*isomorphisme* de catégories : en instanciant la définition générale, $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$ ssi il existe un foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et un foncteur $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tels que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ et $F \circ G = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$.

Exemple 2.12 *Reprenons l'Exemple 2.5 et appliquons la notions de foncteur à chaque cas :*

- *si X et Y sont des ensembles vus comme catégories discrètes, il est immediat de voir qu'un foncteur $X \to Y$ est exactement la même chose qu'une fonction. Plus généralement, tout foncteur $\mathbf{D} \to \mathbf{A}$ entre petites catégories où $\mathbf{D}$ est discrète se réduit à une fonction $\mathbf{D}_0 \to \mathbf{A}_0$ entre les ensembles des objets des deux catégories.*
- *Nous invitons le lecteur à vérifier que, si $\mathbf{X} := (X, \leq)$ et $\mathbf{Y} := (Y, \preceq)$ sont deux préordres vus comme catégories fines, alors un foncteur $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ est exactement la même chose qu'un fonction monotone $f : X \to Y$, c'est-à-dire, telle que $x \leq x'$ implique $f(x) \preceq f(x')$. C'est la notion habituelle de morphisme entre préordres.*
- *Nous invitons aussi le lecteur à vérifier que, si $\mathbf{M} := (M, \cdot, 1)$ et $\mathbf{N} := (N, \bullet, e)$ sont deux monoïdes vus comme catégories avec un seul objet, un foncteur $\mathbf{M} \to \mathbf{N}$ est exactement la même chose qu'un homomorphisme de monoïdes $f : M \to N$, c'est-à-dire, tel que, pour tout $x, x' \in M$, $f(x \cdot x') = f(x) \bullet f(x')$ et $f(1) = e$.*
- *Soient G, H deux multigraphes dirigés. Nous rappelons qu'un* morphisme de graphes *$G \to H$ est la donnée de deux fonctions f_0, f_1 telle que :*
  - *f_0 envoie les sommets de G sur des sommets de H ;*
  - *f_1 envoie les arêtes de G sur les arêtes de H, de façon à ce que si e est une arête de G avec source x et but y, alors $f_1(e)$ a comme source $f_0(x)$ et comme but $f_0(y)$.*

  On exhorte le lecteur à vérifier qu'un foncteur $G^* \to H^*$ est la même chose qu'un morphisme de graphes $G \to H^*$, où on est en train de voir H^* comme un graphe, en oubliant sa structure de catégorie (composition et identités).

Définition 2.13 *Un foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est*

fidèle : *si, pour tous objets A, B de $\mathbf{A}$, l'application $F_{A,B}$ est injective ;*

plein : *si, pour tous objets A, B de $\mathbf{A}$, l'application $F_{A,B}$ est surjective.*

En d'autres termes, F est fidèle s'il est injectif sur les flèches parallèles. Il est plein si, quels que soient les objets A, B de $\mathbf{A}$ et quelle que soit la flèche $g : FA \to FB$ de $\mathbf{B}$, il existe une flèche $f : A \to B$ de $\mathbf{A}$ telle que $Ff = g$.

On remarque qu'un foncteur fidèle n'est pas forcément injectif sur *toutes* les flèches. Par exemple, le foncteur envoyant les deux flèches non-identités de **Cosp** sur la seule flèche non-identité de **Ar**, est fidèle.

De même, un foncteur plein n'est pas forcément surjectif sur la classe de *toutes* les flèches. Par exemple, le foncteur $\mathbf{Ar} \to \mathbf{Cosp}$ envoyant l'unique flèche non-identité sur une flèche quelconque est plein.

Il n'y a pas de terminologie spéciale pour un foncteur qui serait injectif ou surjectif sur les objets. Observons que :

— un foncteur $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$ plein, fidèle et injectif sur les objets est la même chose qu'une sous-catégorie pleine de $\mathbf{A}$;

— un foncteur $\mathbf{X} \to \mathbf{A}$ fidèle et qui est l'identité sur les objets est la même chose qu'une sous-catégorie ample de $\mathbf{A}$.

Exercice 2.14 *Décrire les monos et les épis de* **Cat** *(ou de $\mathcal{C}at$, ce qui est la même chose).*

Exercice 2.15 *Démontrer que les foncteurs fidèles* réflètent *les monos, c'est-à-dire, si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est fidèle et que, pour une flèche quelconque f de $\mathbf{A}$, Ff est un mono, alors f aussi est un mono.*

Exercice 2.16 *Donné un foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, on aurait envie de définir son image comme la sous-catégorie de $\mathbf{B}$ dont les objets sont de la forme FA pour A un objet de $\mathbf{A}$ et les flèches sont de la forme Ff pour f une flèche de $\mathbf{A}$. Cette définition est fausse : en général, la structure ainsi définie n'est* pas *une catégorie.*

1. *Trouver un exemple de l'affirmation ci-dessus. (Suggestion : penser à un foncteur qui identifie deux objets).*
2. *Montrer que, lorsque F est injectif sur les objets, alors l'image de F définie ci-dessus est bien une sous-catégorie de $\mathbf{B}$.*

Les foncteurs qui sont à la fois pleins et fidèles sont très importants en théorie des catégories. Si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et plein et fidèle, on a que, pour tous objets A, B de $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}(A, B) \cong \mathbf{B}(FA, FB).$$

Cela veut dire essentiellement que $\mathbf{B}$ contient une « copie » de $\mathbf{A}$: les objets de la forme FA de $\mathbf{B}$ se comportent, entre eux, exactement comme les objets de $\mathbf{A}$, dans le sens où il y a entre eux exactement « les mêmes » flèches que dans $\mathbf{A}$. C'est pour cela que l'on parle souvent de *plongement* de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$, et on utilise la notation $F : \mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$.

Il est important de souligner que, à cause des remarques sur la possible non-injectivité de foncteurs fidèles (ou pleins) au niveau des objets, la notion de plongement plein est fidèle est un peu plus subtile de ce que l'on pourrait imaginer initialement. Par exemple, si $\mathbf{T}$ est la catégorie avec deux objets a, b et deux flèches $f : a \to b$, $f^{-1} : b \to a$ l'une inverse de l'autre, il y a un plongement plein et fidèle $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la catégorie avec un seul objet et la seule flèche identité. Cet exemple fonctionne pour n'importe quelle cardinalité : on peut généraliser $\mathbf{T}$ à une catégorie dont les objets forment une classe propre, tels qu'il y a exactement un isomorphisme entre chacun d'eux, et on a toujours $\mathbf{T} \hookrightarrow \mathbf{1}$.

Les plongements pleins et fidèles peuvent donc être très loin de l'injectivité sur les objets, et l'affirmation que, lorsque $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$, « $\mathbf{B}$ contient une copie de **A** » n'est pas littéralement vraie : la copie de **B** peut être arbitrairement « comprimée ». Cependant, si on raisonne modulo isomorphisme (comme le langage catégorique nous suggère), l'idée que **1** contient une copie de **T** reste moralement vraie : localement, chaque objet de **T** se comporte exactement comme l'unique objet de **1**, car ils ont tous un seul endomorphisme (l'identité) et ils sont tous isomorphes modulo un unique isomorphisme. Le fait que cet isomoprhisme soit unique est important : par exemple, si $\mathbf{T}'$ consiste de deux objets isomorphes via *deux* isomorphismes différents (deux flèches $f, g : a \to b$ avec leurs inverses $f^{-1}, g^{-1} : b \to a$), alors il n'y a *pas* de plongement plein et fidèle de $\mathbf{T}'$ dans **1**.

2.3 Limites

Définition 2.17 (diagramme) *Un* diagramme *dans une catégorie* **A** *est un foncteur* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$. *La catégorie* **J** *est appelée* catégorie indice *du diagramme et ses objets sont habituellement notés* i, j, k. *Un diagramme est dit* fini *ou* petit *si* **J** *l'est.*

Le fait que dans un diagramme $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ les indices **J** forment une catégorie n'est qu'un escamotage pour donner une définition concise. En réalité, quand on manipule un diagramme, la composition de la catégorie indice **J** n'est jamais utilisée et il suffirait de supposer que **J** soit un graphe (dans le sens de multigraphe dirigé). Formellement, on pourrait dire que **J** est une catégorie libre sur un graphe (voir Exemple 2.5). Mais la définition générale est plus concise, et est donc celle que l'on utilise.

Définition 2.18 (catégorie des cônes) *Soit* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ *un diagramme de* **A**. *Un* cône *pour* D *est une paire* $(A, (h_i)_{i \in \mathbf{J}})$ *où :*

— *A est un objet de* **A**,

— *pour tout* $i \in \mathbf{J}$, $h_i : A \to Di$,

telle que, pour toute flèche $f : i \to j$ *de* **J**, *le diagramme*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "h_i"'] \arrow[dr, "h_j"] & \\ Di \arrow[rr, "Df"'] & & Dj \end{tikzcd}$$

commute. Soient $C := (A, (h_i)_{i \in \mathbf{J}})$ *et* $C' := (A', (h'_i)_{i \in \mathbf{J}})$ *deux cônes pour* D. *Un* morphisme de cônes $C \to C'$ *est une flèche* $f : A \to A'$ *telle que, pour tout* $i \in \mathbf{J}$, $h_i = h'_i \circ f$.

Si $f : C \to C'$ *et* $f' : C' \to C''$ *sont deux morphismes de cônes, il est immédiat de voir que* $f' \circ f : C \to C''$ *l'est aussi, où la composition est celle de* **A**. *Les identités sont évidemment des morphismes de cônes. Les cônes pour* D *et leurs morphismes sont donc les objets et flèches d'une catégorie, que l'on dénote par* $\mathbf{Cone}(D)$.

La notion d'objet terminal est « catégorique » : en remplaçant « ensemble » par « objet » et « fonction » par « flèche », la Définition 1.27 n'a rien de spécifique à **Set** et s'applique à n'importe quelle catégorie. De plus, l'objet terminal est unique à un unique isomorphisme près : le Lemme 1.28 n'utilise pas de notions ensemblistes et est valide dans n'importe quelle catégorie. On a donc bien le droit de dire *l'*objet terminal au lieu de juste *un* objet terminal.

Lorsqu'ils existent, les objets terminaux des catégories $\mathbf{Cone}(D)$ pour D un diagramme jouent un rôle très important en théorie des catégories.

Définition 2.19 (limite) *Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un diagramme de $\mathbf{A}$. L'objet terminal de $\mathbf{Cone}(D)$, s'il existe, est appelé* limite *de D. Si $(A, (h_i)_{i\in\mathbf{J}})$ est un tel cône, on note souvent* $\lim D$ *l'objet A et, par abus de terminologie, on dit que cet objet est la limite de D, sans préciser les flèches h_i.*

Lemme 2.20 (unicité des limites modulo isomorphisme) *Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un diagramme et soient $(A, (h_i)_{i\in\mathbf{J}})$ et $(A', (h'_i)_{i\in\mathbf{J}})$ deux limites de D. Alors, il existe un unique isomorphisme $u : A \to A'$ tel que, pour tout $i \in \mathbf{J}$, $h_i = h'_i \circ u$.*

Preuve. Conséquence immédiate de la Définition 2.19 et du Lemme 1.28. □

Lemme 2.21 (préservation des limites par isomorphisme) *Soit D un diagramme de $\mathbf{A}$ dont la limite existe, et soit $A \cong \lim D$. Alors, A aussi est une limite de D.*

Preuve. Conséquence immédiate de la Définition 2.19 et du Lemme 1.29. □

La définition de diagramme comme foncteur est très synthétique et commode du point de vue formel. Cependant, cela peut être utile de la développer pour mieux la comprendre et l'utiliser dans la pratique. Faisons cela au moyen d'un exemple. Soit $\mathbf{J}$ le graphe suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & j \arrow[loop right, "h"] & \\
i \arrow[ur, shift left, "f_1"] \arrow[ur, shift right, "f_2"'] \arrow[dr, "g"'] & & \\
 & k \arrow[r, "g'"'] & l
\end{tikzcd}$$

On peut considérer que $\mathbf{J}$ soit une catégorie : cela n'a aucune importance comment les compositions sont définies. Par exemple, cela ne changera rien dans la suite si $h \circ f_1 = h$ ou $h \circ f_1 = \mathrm{id}_j$. Encore pire, il n'est même pas possible de définir, avec les flèches indiquées ci-dessus, la composition $g' \circ g$, car il n'y a aucune flèche avec source i et but l. Cela ne sera pas un problème dans la suite. [6]

Soit maintenant $\mathbf{A}$ une catégorie. Un foncteur

$$D : \mathbf{J} \longrightarrow \mathbf{A}$$

est entièrement déterminé une fois que l'on connait :
— les objets Di, Dj, Dk et Dl ;
— les flèches Df_1, Df_2, Dg, Dg' et Dh.

6. En fait, comme déjà évoqué plus haut, ce questions peuvent être réglées formellement en disant que $\mathbf{J}$ est la catégorie libre engendré par le graphe en question (voir le dernier point de l'Exemple 2.5). Mais on ne se souciera pas d'être aussi formels ici.

En effet, la valeur de D est ainsi connue partout ailleurs : par exemple, peu importe comment $g' \circ g$ soit définie dans $\mathbf{J}$, on sait que $D(g' \circ g) = Dg' \circ Dg$ et donc on en connait la valeur dans $\mathbf{A}$. Ces données peuvent être représentées par un graphe dans la catégorie $\mathbf{A}$:

$$\begin{tikzcd}
 & Dj \arrow[loop right, "Dh"] & \\
Di \arrow[ur, shift left, "Df_1"] \arrow[ur, shift right, "Df_2"'] \arrow[dr, "Dg"'] & & \\
 & Dk \arrow[r, "Dg'"'] & Dl
\end{tikzcd}$$

Essentiellement, on a pris le graphe $\mathbf{J}$ et on a rajouté « D » partout, en obtenant un graphe dont les sommets et les arêtes sont des objets et des flèches de $\mathbf{A}$.

D'habitude, on oublie D et on écrit directement ses valeurs. Par exemple, si $Di = A$, $Dj = B$, $Dk = C$ et $Dl = E$, et si $Df_1 = a_1$, $Df_2 = a_2$, $Dg = b$, $Dg' = b'$ et $Dh = c$, on a le graphe

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[loop right, "c"] & \\
A \arrow[ur, shift left, "a_1"] \arrow[ur, shift right, "a_2"'] \arrow[dr, "b"'] & & \\
 & C \arrow[r, "b'"'] & E
\end{tikzcd}$$

Le graphe ci dessus est l'image de $\mathbf{J}$ par D. En quelque sorte, c'est comme si chaque foncteur $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ projetait une « ombre » de $\mathbf{J}$ dans $\mathbf{A}$. Cette « ombre » est un graphe comme celui ci-dessus, et dans la pratique c'est plutôt des graphes comme ça que l'on appelle « diagrammes ». La définition de diagramme comme foncteur n'est qu'une manière de formaliser cela.

Un cône $(L, (h_k)_{k \in \mathbf{J}})$ pour le diagramme ci-dessus admet une représentation assez intuitive :

$$\begin{tikzcd}
 & L \arrow[dl, bend right, "h_i"'] \arrow[d, "h_j"'] \arrow[dd, bend left, "h_k"] \arrow[ddr, bend left, "h_l"] & \\
 & B \arrow[loop right, "c"] & \\
A \arrow[ur, shift left, "a_1"] \arrow[ur, shift right, "a_2"'] \arrow[dr, "b"'] & & \\
 & C \arrow[r, "b'"'] & E
\end{tikzcd}$$

tel que tout commute. On voit ainsi la justification de la terminologie « cône » : le diagramme est la base, L le sommet et les flèches $(h_k)_{k \in \mathbf{J}}$ décrivent le cône proprement dit.[7]

Le cône avec sommet L ci-dessus est la limite du diagramme si, pour tout outre cône $(K, (h'_k)_{k \in \mathbf{J}})$, on a une unique flèche $u : K \to L$ telle que le dia-

7. Un étudiant a remarqué qu'il serait plus approprié de parler de « pyramide », ce qui est tout à fait vrai en effet. Cependant, si l'on dessine schématiquement un diagramme arbitraire comme un cercle ou une ellipse, cela ressemble déjà plus à un cône… (voir Sect. 2.5).

gramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
& K \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[dddl, bend right, "h'_i"'] \arrow[dd, bend right, "h'_j"'] \arrow[dddd, bend left, "h'_k"] \arrow[ddddr, bend left, "h'_l"] & \\
& L \arrow[d, "h_j"] \arrow[ddl, bend right, "h_i"'] \arrow[ddd, bend left, "h_k"] \arrow[dddr, bend left, "h_l"] & \\
& B \arrow[loop right, "c"] & \\
A \arrow[ur, shift left, "a_1"] \arrow[ur, shift right, "a_2"'] \arrow[dr, "b"'] & & \\
& C \arrow[r, "b'"'] & E
\end{tikzcd}$$

Dans les exemples suivants on fixe une catégorie $\mathbf{A}$ quelconque. On fera référence aux catégories finies introduites dans l'Exemple 2.6.

Exemple 2.22 *Il n'y a qu'un foncteur* $\varnothing_{\mathbf{A}} : \mathbf{0} \to \mathbf{A}$. *C'est le diagramme vide de* $\mathbf{A}$. *Sa limite, si elle existe, n'est rien d'autre que l'objet terminal de* $\mathbf{A}$ *: en effet, dans ce cas les cônes sont réduits à des objets de* $\mathbf{A}$ *et les morphismes de cônes à des flèches de* $\mathbf{A}$, *donc* $\mathbf{Cone}(\varnothing_{\mathbf{A}}) \cong \mathbf{A}$.

Attention : même si l'on retrouve la notion d'objet terminal comme cas particulier de limite, dans notre approche il faut définir ce que c'est qu'un objet terminal *avant* l'introduction de la notion de limite, sinon la définition serait circulaire.

Exemple 2.23 *Il y a exactement un foncteur* $F_A : \mathbf{1} \to \mathbf{A}$ *pour chaque objet* A *de* $\mathbf{A}$. *Il est facile de voir que* $\lim F_A = A$.

Exemple 2.24 *Un diagramme* $D : \mathbf{Disc}_2 \to \mathbf{A}$ *est la donnée de deux objets de* $\mathbf{A}$

$$A \qquad\qquad B$$

(On remarque que, ici comme dans tout autre diagramme, rien n'empêche que $A = B$). Un cône, c'est juste un objet C de $\mathbf{A}$ *muni de deux flèches $C \to A$ et $C \to B$. Donc la limite de D, si elle existe, est exactement le produit de A et B (Définition 1.23) et est dénotée par $A \times B$.*

Exemple 2.25 *Un diagramme* $D : \mathbf{Par} \to \mathbf{A}$ *est la donnée de deux flèches parallèles de* $\mathbf{A}$ *:*

$$A \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} B$$

Un cône, c'est un objet C muni de deux flèches $h : C \to A$ et $k : C \to B$, telles que $f \circ h = k$ et $g \circ h = k$. On peut oublier k et dire juste qu'un cône est un objet C muni d'une flèche $h : C \to A$ telle que $f \circ h = g \circ h$. La limite de D, si elle existe, est donc l'égaliseur de f et g (Définition 1.34).

Exemple 2.26 *Un diagramme D : $\mathbf{Cosp} \to \mathbf{A}$ est la donnée de deux flèches*

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & C \end{tikzcd}$$

de $\mathbf{A}$. Un cône, c'est un objet X muni de trois flèches $p : X \to A$, $q : X \to B$ et $r : X \to C$, telles que $f \circ p = r$ et $g \circ q = r$. Comme dans l'exemple ci-dessus, cela revient à ne considérer que les deux flèches p et q et déclarer que $f \circ p = g \circ q$. Donc la limite de D, si elle existe, est le pullback de f et g (Définition 1.39).

Comme dans l'Exemple 2.24, rien n'empêche que dans l'Exemple 2.25 et l'Exemple 2.26 on ait $f = g$ (et donc, $A = B = C$). Cependant, même dans ce cas les deux limites sont en général différentes : l'égaliseur, c'est un objet E muni d'*une* flèche $e : E \to A$ telle que $f \circ e = g \circ e$; le pullback, c'est un objet E muni de *deux* flèches $p, q : E \to A$ telles que $f \circ p = g \circ q$.

Exercice 2.27 *Soit $\mathbf{C}$ une catégorie et A un objet de $\mathbf{C}$.*

1. *Montrer que $\mathbf{C}/A$ a toujours l'objet terminal.*
2. *Montrer que si $\mathbf{C}$ a les pullbacks, alors $\mathbf{C}/A$ a les produits (binaires).*

Exercice 2.28 *Vérifier que la catégorie produit $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ introduite à la Définition 2.7 et bien le produit dans $\mathbf{Cat}$ (ou Cat) des catégories $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$.*

Exercice 2.29 *Démontrer que, dans n'importe quelle catégorie, $f : A \to B$ est un monomorphisme ssi A est le pullback de f le long d'elle même, c'est à dire, le diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, equal, "\mathrm{id}_A"] \arrow[d, equal, "\mathrm{id}_A"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

est un diagramme de pullback.

2.4 Catégories complètes

On peut généraliser les produits et les égaliseurs à une cardinalité quelconque :

Définition 2.30 (produit, cardinalité arbitraire) *Un diagramme D : $\mathbf{J} \to \mathbf{A}$ est dit* discret *lorsque $\mathbf{J}$ est discrète (elle n'a aucune flèche à part les identités). La limite d'un diagramme discret est appelé* produit. *Si $\mathbf{J}$ est finie, on parle de* produit fini.

Les catégories $\mathbf{0}$ et $\mathbf{Disc}_2$ introduites dans l'Exemple 2.6 sont discrètes. En effet, les produits de la Définition 1.23 sont des *produits binaires*, et l'objet terminal est aussi un cas particulier de produit, le produit « zéroaire ».

Exercice 2.31 *Montrer que l'existence de produits binaires et de l'objet terminal implique l'existence de tous les produits finis.*

Définition 2.32 (égaliseur, cardinalité arbitraire) *Un diagramme* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ *est dit* d'égalisation *si* $\mathbf{J}$ *consiste de deux objets, disons* a *et* b, *et d'un nombre arbitraire mais supérieur ou égale à deux de flèches parallèles* $a \to b$. *Un* égaliseur *est, de manière générale, la limite d'un diagramme d'égalisation. Si* $\mathbf{J}$ *est finie, on parle d'*égaliseur fini.

La catégorie **Par** de l'Exemple 2.6 est une catégorie d'égalisation *binaire*.

Exercice 2.33 *Montrer que l'existence d'égaliseurs binaires implique l'existence de tous les égaliseurs finis.*

Définition 2.34 (catégorie complète) *Une catégorie* $\mathbf{A}$ *est dite* complète *(resp.* finiment complète*) lorsque pour tout diagramme* $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ *avec* $\mathbf{J}$ *petite (resp. finie),* $\lim D$ *existe. Autrement dit,* $\mathbf{A}$ *est (finiment) complète si elle a* toutes *les limites (finies).*

La restriction aux diagrammes petits est technique mais importante. On n'en dira pas plus ici.

Le résultat suivant est un des théorèmes essentiels de la théorie des catégories.

Théorème 2.35 *Une catégorie est (finiment) complète ssi elle a tous les produits (finis) et tous les égaliseurs (finis).*

Preuve. Soit $\mathbf{A}$ une catégorie. Il est clair que si $\mathbf{A}$ est complète, alors elle a en particulier tous les produits et tous les égaliseurs. Il reste donc montrer la réciproque.

Supposons que $\mathbf{A}$ ait tous les produits et tous les égaliseurs, et soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un digramme quelconque. Soit $\mathbf{disc}(\mathbf{J})$ la « discrétisation » de $\mathbf{J}$, c'est-à-dire, la catégorie dont les objets sont ceux de $\mathbf{J}$ mais sans aucun morphisme (sauf les identités). Nous avons un foncteur évident $I : \mathbf{disc}(\mathbf{J}) \to \mathbf{J}$ qui envoie tout objet sur lui-même (et toute flèche identité sur elle-même).

Considérons le diagramme $D \circ I : \mathbf{disc}(\mathbf{J}) \to \mathbf{A}$. Comme $\mathbf{disc}(\mathbf{J})$ est discrète, $\lim(D \circ I)$ existe : c'est le produit $\prod_{k \in \mathbf{J}} Dk$ des objets du diagramme D. Comme d'habitude, si $i \in \mathbf{J}$, on dénote par $\pi_i : \prod_{k \in \mathbf{J}} Dk \to Di$ la projection sur la i-ème composante du produit. En outre, donnée une famille quelconque $g_k : C \to Dk$ de flèches indexées par les objets de $\mathbf{J}$, on dénote par $\langle g_k \rangle_{k \in \mathbf{J}}$ l'unique flèche résultante de la propriété universelle du produit, satisfaisant que, pour tout $i \in \mathbf{J}$, on a $\pi_i \circ \langle g_k \rangle_{k \in \mathbf{J}} = g_i$.

Soit $f : i \to j$ une flèche de $\mathbf{J}$. On définit, pour tout $l \in \mathbf{J}$, une flèche $\widetilde{f_l} : \prod_{k \in \mathbf{J}} Dk \to Dl$ comme suit :

$$\widetilde{f_l} := \begin{cases} \pi_l & \text{si } l \neq j, \\ Df \circ \pi_i & \text{si } l = j. \end{cases}$$

Nous posons ensuite

$$\widehat{f} := \langle \widetilde{f_k} \rangle_{k \in \mathbf{J}} : \prod_{k \in \mathbf{J}} Dk \to \prod_{k \in \mathbf{J}} Dk.$$

Soit maintenant $\mathbf{eq}(\mathbf{J})$ la catégorie d'égalisation avec deux objets a, b et avec un morphisme $[f] : a \to b$ pour chaque flèche f de $\mathbf{J}$, plus un morphisme $[*] : a \to b$. On considère le diagramme $E : \mathbf{eq}(\mathbf{J}) \to \mathbf{A}$ défini ainsi :

— $Ea := Eb := \prod_{k\in\mathbf{J}} Dk$;

— $E[f] := \widehat{f}$;

— $E[*] := \mathrm{id}_{\prod_{k\in\mathbf{J}} Dk}$.

Par hypothèse, l'égaliseur $\lim E$ existe. Appelons $e : \lim E \to \prod_{k\in\mathbf{J}} Dk$ son injection. Pour tout $i \in \mathbf{J}$, on définit

$$h_i := \pi_i \circ e : \lim E \to Di.$$

On va démontrer que $(\lim E, (h_i)_{i\in\mathbf{J}})$ est la limite de D.

Tout d'abord, il faut montrer qu'il s'agit bien d'un cône pour D. Pour cela, on prend n'importe quelle flèche $f : i \to j$, et on montre que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
& \lim E \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\prod_{k\in\mathbf{J}} Dk \arrow[rr, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\pi_i"'] & & \prod_{k\in\mathbf{J}} Dk \arrow[d, "\pi_j"] \\
Di \arrow[rr, "Df"'] & & Dj
\end{tikzcd}$$

Pour le triangle en haut, on a

$$\widehat{f} \circ e = \mathrm{id}_{\prod_{k\in\mathbf{J}}} \circ e = e$$

car $\lim E$ égalise, entre autres, $\widehat{f}$ et $\mathrm{id}_{\prod_{k\in\mathbf{J}}}$ (qui sont égales à $E[f]$ et $E[*]$, respectivement). Pour le carré en bas, on a

$$\pi_j \circ \widehat{f} = \pi_j \circ \langle \widetilde{f_k} \rangle_{k\in\mathbf{J}} = \widetilde{f_j} = Df \circ \pi_i.$$

Il reste à montrer la terminalité de ce cône. Soit $(C, (h'_i)_{i\in\mathbf{J}})$ un autre cône pour D. On remarque que, pour toute flèche $f : i \to j$ de $\mathbf{J}$, le diagramme suivant commute (en ignorant le morphisme u dessiné en pointillé) :

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[d, dotted, "u"] \arrow[ddl, bend right, "\langle h'_k \rangle_{k\in\mathbf{J}}"'] \arrow[ddr, bend left, "\langle h'_k \rangle_{k\in\mathbf{J}}"] \arrow[dddl, bend right=60, "h'_i"'] \arrow[dddr, bend left=60, "h'_j"] & \\
& \lim E \arrow[dl, "e"'] \arrow[dr, "e"] & \\
\prod_{k\in\mathbf{J}} Dk \arrow[rr, "\widehat{f}"] \arrow[d, "\pi_i"'] & & \prod_{k\in\mathbf{J}} Dk \arrow[d, "\pi_j"] \\
Di \arrow[rr, "Df"'] & & Dj
\end{tikzcd}$$

La seule chose non-triviale à vérifier est la commutation $\widehat{f} \circ \langle h'_k \rangle_{k \in \mathbf{J}} = \langle h'_k \rangle_{k \in \mathbf{J}}$. Pour cela, on observe d'abord que, par définition de $\widetilde{f}_k$, on a

$$\widetilde{f}_k \circ \langle h'_l \rangle_{l \in \mathbf{J}} = \begin{cases} \pi_k \circ \langle h'_l \rangle_{l \in \mathbf{J}} = h'_k & \text{si } k \neq j \\ Df \circ \pi_i \circ \langle h'_l \rangle_{l \in \mathbf{J}} = Df \circ h'_i = h'_j & \text{si } k = j \end{cases}$$

et donc $\widetilde{f}_k \circ \langle h'_l \rangle_{l \in \mathbf{J}} = h'_k$ quel que soit $k \in \mathbf{J}$. On peut alors écrire

$$\widehat{f} \circ \langle h'_k \rangle_{k \in \mathbf{J}} = \langle \widetilde{f}_k \rangle_{k \in \mathbf{J}} \circ \langle h'_k \rangle_{k \in \mathbf{J}} = \langle \widetilde{f}_k \circ \langle h'_l \rangle_{l \in \mathbf{J}} \rangle_{k \in \mathbf{J}} = \langle h'_k \rangle_{k \in \mathbf{J}},$$

comme souhaité. Cela montre en particulier que $(C, \langle h'_k \rangle_{k \in \mathbf{J}})$ est un cône pour E. On peut alors appliquer la propriété universelle de l'égaliseur et obtenir un unique $u : C \to \lim E$ faisant commuter le diagramme ci-dessus (où u est dessiné en pointillé). En particulier, ce u factorise tout h'_k le long de $h_k = \pi_k \circ e$. Son unicité découle de la propriété universelle de $\lim E$. Cela conclut la preuve que $(\lim E, (h_k)_{k \in \mathbf{J}})$ est la limite de D.

On termine en observant que, lorsque $\mathbf{J}$ est finie, les catégories $\mathbf{disc}(\mathbf{J})$ et $\mathbf{eq}(\mathbf{J})$ introduites dans l'argument ci-dessus sont elles aussi finies, donc les produits finis et les égaliseurs finis suffisent pour construire n'importe quelle limite finie. □

L'Exercice 2.31 et Exercice 2.33 nous donnent le corollaire suivant :

Corollaire 2.36 *Une catégorie est finiment complète ssi elle a l'objet terminal, les produits binaires et les égaliseurs binaires.*

Exercice 2.37 *Montrer que si une catégorie a l'objet terminal et les pullbacks, alors elle a les produits binaires et les égaliseurs binaires.*

Corollaire 2.38 *Une catégorie est finiment complète ssi elle a l'objet terminal et les pullbacks.*

On peut bien entendu définir des pullbacks de cardinalité quelconque (auquel cas les pullbacks de la Définition 1.39 seront appelés *binaires*) et démontrer un résultat analogue à l'Exercice 2.37 pour les cardinalités arbitraires, ce qui donne la version généralisée à toutes les limites du Corollaire 2.38 : une catégorie est complète ssi elle a l'objet terminal et les pullbacks de cardinalité arbitraire.

2.5 Catégorie opposée

Un phénomène dont on se rend compte assez rapidement lorsqu'on manipule des concepts catégoriques est que, dans la grande majorité des cas, si on prend une définition et on « inverse toutes les flèches » (dans le sens où l'on change uniformement leur direction), on obtient une définition parfaitement valable. On parle souvent de « dual » d'une notion, et on marque cela par le préfixe « co- », c'est-à-dire, le dual d'une « chose » est une « cochose ».

La notion de cône (Définition 2.18) se prête bien à expliquer ce phénomène. Prenons un diagramme $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$, représenté abstraitement par

$$Di \xrightarrow[Df]{} Dj$$

Un cône pour D, on le rappelle, est la donné d'un objet C de $\mathbf{A}$ muni d'une flèche $h_k : C \to Dk$ pour chaque $k \in \mathbf{J}$, tel que $Df \circ h_i = h_j$ pour toute flèche $f : i \to j$ de $\mathbf{J}$:

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "h_i"'] \arrow[dr, "h_j"] & \\ Di \arrow[rr, "Df"'] & & Dj \end{tikzcd}$$

Inversons toutes les flèches : un *cocône* pour le diagramme D ci-dessus est un objet C muni de flèches $h_k : Dk \to C$ pour chaque $k \in \mathbf{J}$ tel que $h_j \circ Df = h_i$ pour toute flèche $f : i \to j$ de $\mathbf{J}$:

$$\begin{tikzcd} & C & \\ Di \arrow[ur, "h_i"] \arrow[rr, "Df"'] & & Dj \arrow[ul, "h_j"'] \end{tikzcd}$$

On observe qu'un cocône pour D n'est pas du tout la même chose qu'un cône pour D : dans un cône, les flèches h_k vont du sommet C vers D ; dans un cocône, elle vont de D vers le sommet.

Il y a une observation très simple qui justifie ce phénomène de dualisation : toute catégorie en cache une autre, obtenue en inversant la direction de ses flèches.

Définition 2.39 (catégorie opposée) *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie. On définit une catégorie* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ *de la façon suivante :*

- *les objets sont les mêmes que ceux de* $\mathbf{C}$ *;*
- *les flèches sont celles de* $\mathbf{C}$ *mais dans la direction opposée, c'est-à-dire, pour tous objets* A, B, $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}(A, B) := \mathbf{C}(B, A)$ *;*
- *la composition est définie comme dans* $\mathbf{C}$ *: si* $f : A \to B$ *et* $g : B \to C$ *dans* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*, par définition* $f : B \to A$ *et* $g : C \to B$ *dans* $\mathbf{C}$*, donc on a* $f \circ g : C \to A$ *dans* $\mathbf{C}$*, et on prend cette flèche comme définition de* $g \circ f : A \to C$ *dans* $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$*. Les identités restent les mêmes que dans* $\mathbf{C}$*.*

En se restreignant aux catégories localement petites, il existe un foncteur canonique $(-)^{\mathrm{op}} : \mathcal{C}at \to \mathcal{C}at$ *défini ainsi :*

- *sur les objets (c'est-à-dire les catégories),* $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ *est la catégorie que l'on vient de définir ;*
- *sur les flèches (c'est-à-dire les foncteurs), si* $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est un foncteur, on définit* $F^{\mathrm{op}} : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{B}^{\mathrm{op}}$ *exactement comme* F *:*
  - *sur les objets,* $F^{\mathrm{op}}(A) := FA$ *;*
  - *sur les flèches* $F^{\mathrm{op}}(f) := Ff$*, ce qui est légitime car si* $f : A \to B$ *dans* $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$*, alors* $f : B \to A$ *dans* $\mathbf{A}$*, donc* $Ff : FB \to FA$ *dans* $\mathbf{B}$*, et donc* $Ff : FA \to FB$ *dans* $\mathbf{B}^{\mathrm{op}}$*.*

La catégorie opposée justifie l'existence de la dualisation : toute « chose » catégorique vient avec une « co-chose », tout simplement en définissant une « co-chose » dans un catégorie $\mathbf{C}$ comme une « chose » dans $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Cela revient, en général, à reprendre la définition de la « chose » en « inversant toutes les flèches », comme illustré par l'exemple des cocônes.

Exercice 2.40 *Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un diagramme. Vérifier qu'un cocône pour D comme défini ci-dessus est bien un cône pour $D^{\mathrm{op}} : \mathbf{J}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{A}^{\mathrm{op}}$.*

On pose $\mathbf{Cocone}(D) := \mathbf{Cone}(D^{\mathrm{op}})$. Est-ce que $\mathbf{Cocone}(D)$ est la même chose que $\mathbf{Cone}(D)^{\mathrm{op}}$?

2.6 Colimites

Notre premier exemple important de notion introduite par dualité est celle de *colimite* :

Définition 2.41 (colimite) *Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un diagramme de la catégorie $\mathbf{A}$. Cela induit un diagramme $D^{\mathrm{op}} : \mathbf{J}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ dans $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$. La limite de D^{op}, si elle existe, est appelée* colimite *de D et son objet sous-jacent, vu comme objet de $\mathbf{A}$, est dénoté par* $\operatorname{colim} D$.

La Définition 2.41 est assez synthétique (c'est l'intérêt de la dualité !) mais elle est sans doute un peu cryptique. Développons-là. Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un diagramme de $\mathbf{A}$. On rappelle que la limite de D est un cône $(L, (h_k)_{k \in \mathbf{J}})$ tel que tout autre cône $(C, (h'_k)_{k \in \mathbf{J}})$ pour D se factorise à travers L via une unique flèche $u : C \to L$:

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[d, "u"] \arrow[ddl, bend right, "h'_i"'] \arrow[ddr, bend left, "h'_j"] & \\
 & L \arrow[dl, "h_i"] \arrow[dr, "h_j"'] & \\
Di \arrow[rr, "Df"'] & & Dj
\end{tikzcd}$$

En inversant les flèches, cela donne que la *colimite* de D est un cocône $(L, (h_k)_{k \in \mathbf{J}})$ tel que tout autre cocône $(C, (h'_k)_{k \in \mathbf{J}})$ pour D se factorise à travers L via une unique flèche $u : L \to C$:

$$\begin{tikzcd}
 & C & \\
 & L \arrow[u, "u"'] & \\
Di \arrow[ur, "h_i"] \arrow[uur, bend left, "h'_i"] \arrow[rr, "Df"'] & & Dj \arrow[ul, "h_j"'] \arrow[uul, bend right, "h'_j"']
\end{tikzcd}$$

Exercice 2.42 *Vérifier que la description donnée ci-dessus correspond bien à la Définition 2.41.*

Par définition, les Lemme 2.20 et Lemme 2.21 s'appliquent immédiatement aux colimites :

Lemme 2.43 (unicité des colimites modulo isomorphisme) *Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ un diagramme et soient $(A, (h_i)_{i \in \mathbf{J}})$ et $(A', (h'_i)_{i \in \mathbf{J}})$ deux colimites de D. Alors, il existe un unique isomorphisme $u : A \to A'$ tel que, pour tout $i \in \mathbf{J}$, $h_i = h'_i \circ u$.*

Lemme 2.44 (préservation des colimites par isomorphisme) *Soit D un diagramme de $\mathbf{A}$ dont la colimite existe, et soit $A \cong \operatorname{colim} D$. Alors, A aussi est une colimite de D.*

On peut reprendre tous les exemples de limites finies remarquables de la Sect. 2.3 et les revoir comme colimites. Sans trop de surprises, cela donne le concept obtenu en « inversant les flèches ». Dans ce qui suit, on fixe une catégorie $\mathbf{A}$.

Exemple 2.45 (objet initial) *La colimite du diagramme vide $\emptyset_{\mathbf{A}} : \mathbf{0} \to \mathbf{A}$, si elle existe, est appelée* objet initial *de $\mathbf{A}$: il s'agit d'un objet, souvent dénoté par 0, tel que tout objet A de $\mathbf{A}$ admet une unique flèche $0 \to A$.*

Exemple 2.46 (coproduit) *La colimite d'un diagramme discret est appelée un* coproduit. *Le cas binaire est celui d'un diagramme $D : \mathbf{Disc}_2 \to \mathbf{A}$, de la forme*

$$A \qquad B$$

On la dénote généralement par $A \amalg B$ ou par $A + B$ (mais cette dernière notation est parfois réservée aux coproduits ayant une propriété supplémentaire, à savoir les coproduits disjoints, *que l'on ne définira pas pour le moment). Par définition, cet objet est muni de deux flèches*

$$\iota_1 : A \longrightarrow A \amalg B$$
$$\iota_2 : B \longrightarrow A \amalg B$$

appelées injections, *telles que, pour tout autre objet C muni de deux flèches $f : A \to C$ et $g : B \to C$, il existe une unique flèche $u : A \amalg B \to C$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & C & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "\iota_1"'] & A \amalg B \arrow[u, "u"] & B \arrow[ul, "g"'] \arrow[l, "\iota_2"] \end{tikzcd}$$

La flèche u, qui dépend de f et g, est parfois dénotée par $[f, g]$.

Exemple 2.47 (coégaliseur) *La colimite d'un diagramme $D : \mathbf{Par} \to \mathbf{A}$ de la forme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

est appelée coégaliseur *de f et g. Il s'agit d'un objet Q muni d'une flèche $q : B \to Q$ telle que, pour tout autre objet C muni d'une flèche $h : B \to C$ satisfaisant $h \circ f = h \circ g$, il existe une unique $u : Q \to C$ telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} & & C \\ A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "q"'] & Q \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

Exemple 2.48 (pushouts) *La colimite d'un diagramme D : $\mathbf{Cosp}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{A}$ de la forme*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \\ B & \end{tikzcd}$$

est appelée pushout *de f et g. Il s'agit d'un objet Q muni de deux flèches*

$$p : A \longrightarrow Q$$
$$q : B \longrightarrow Q$$

faisant commuter le carré suivant :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "q"'] & Q \end{tikzcd}$$

De plus, pour tout autre objet E muni de deux flèches $h : A \to E$ et $k : B \to E$ telles que $h \circ f = k \circ g$ (c'est-à-dire, faisant commuter un carré simlaire à celui ci-dessus), il existe une unique flèche $u : Q \to E$ telle que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & A \arrow[d, "p"] \arrow[ddr, bend left, "h"] & \\ B \arrow[r, "q"'] \arrow[drr, bend right, "k"'] & Q \arrow[dr, "u"] & \\ & & E \end{tikzcd}$$

Comme pour les égaliseurs et les pullbacks, les coégaliseurs et pushouts peuvent être étendus au cas de cardinalité quelconque, y compris infinie.

Par dualité, tous les résultats de la Sect. 2.4 sont valides pour les colimites, en « inversant toutes les flèches ».

Définition 2.49 (catégorie cocomplète) *Une catégorie* $\mathbf{A}$ *est dite* cocomplète *(resp.* finiment cocomplète*) lorsque pour tout diagramme D : $\mathbf{J} \to \mathbf{A}$ avec $\mathbf{J}$ petite (resp. finie),* $\operatorname{colim} D$ *existe. Autrement dit,* $\mathbf{A}$ *est (finiment) cocomplète si elle a* toutes *les colimites (finies).*

Théorème 2.50 *Une catégorie est (finiment) cocomplète ssi elle a tous les coproduits (finis) et tous les coégaliseurs (finis).*

Corollaire 2.51 *Une catégorie est finiment complète ssi elle a l'objet initial, les coproduits binaires et les coégaliseurs binaires.*

Corollaire 2.52 *Une catégorie est finiment cocomplète ssi elle a l'objet initial et les pushouts.*

2.7 Colimites dans Set

Si la notion de colimite fait certainement sens du point de vue formel, il n'est pas clair qu'elle soit utile en pratique. On va donc l'instancier dans le cas de la catégorie **Set**, et voir qu'elle correspond en effet à des concepts bien connus et d'utilisation très fréquente en mathématique.

Exemple 2.53 (objet initial) *La catégorie* **Set** *a l'objet terminal : c'est l'ensemble vide $\emptyset$. En effet, tout ensemble A admet une et une seule fonction $\emptyset \to A$, la "fonction vide".*

Exemple 2.54 (coproduits) *La catégorie* **Set** *a tous les coproduits, de cardinalité quelconque. Commençons par décrire le cas binaire (le cas zéroaire est l'objet initial, que l'on a traité dans l'exemple précédent). Si A et B sont deux ensembles, on pose*

$$A + B := A \times \{1\} \cup B \times \{2\}.$$

On appelle $A + B$ la réunion disjointe *de A et B. Il s'agit de la réunion de A et B en considérant leurs éléments comme tous différents, c'est-à-dire, si $c \in A \cap B$, on retrouve c deux fois dans $A + B$. C'est la raison pour laquelle on effectue le produit cartésien avec $\{1\}$ ou $\{2\}$ avant de prendre la réunion. Ces produits ont l'effet de créer des « copies » distinctes des éléments qui pourraient être égaux. Par exemple :*

$$\{a, b, c\} + \{c, d\} = \{(a, 1), (b, 1), (c, 1), (c, 2), (d, 2)\},$$

où l'on voit que $(c, 1)$ et $(c, 2)$ jouent le rôle de deux « copies » de c. (Bien entendu, on aurait pu utiliser n'importe quelle paire d'éléments $x \neq y$ au lieu de 0 et 1).

On définit ensuite

$$\begin{aligned} \iota_1 : \quad A &\longrightarrow A + B \\ a &\longmapsto (a, 1) \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \iota_2 : \quad B &\longrightarrow A + B \\ b &\longmapsto (b, 2) \end{aligned}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que $(A + B, \iota_1, \iota_2)$ est bien le coproduit de A et B dans **Set***, dans le sens de l'Exemple 2.46. On se bornera à observer que, si $f : A \to C$ et $g : B \to C$, l'unique fonction $[f, g] : A + B \to C$ donnée par la proproété universelle de la colimite est définie de la façon suivante : pour tout $p \in A + B$,*

$$[f, g](p) := \begin{cases} f(a) & \text{si } p = (a, 1) \\ g(b) & \text{si } p = (b, 2) \end{cases}$$

On reconnait ici une définition, assez commune dans la pratique mathématique, d'une fonction « par cas » : si l'argument p de la fonction appartient à A, on applique f ; s'il appartient à B, on applique g. Ceci épuise les possibilités, car $p \in A + B$. Notons que l'on ne peut jamais avoir les deux cas à la fois, car on a « dupliqué » les éléments en commun entre A et B : si $c \in A \cap B$, en entrée on aura soit $(c, 1)$, et donc on donne $f(c)$ en sortie, soit $(c, 2)$, auquel cas on donne en sortie $g(c)$.

L'objet initial et les coproduits binaires donnent les coproduits finis quelconques. Pour le cas général, soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexée par un ensemble I quelconque, de cardinalité arbitraire. On pose

$$\sum_{i \in I} A_i := \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\}$$

et, pour les injections $\iota_k : A_k \to \sum_{i\in I} A_i$ (avec $k \in I$), on pose

$$\iota_k(a) := (a, k).$$

Si C est un ensemble quelconque et $f_i : A_i \to C$ une famille de fonctions indexée par I, on définit la fonction $[f_i]_{i\in I} : \sum_{i\in I} A_i \to C$ « par cas » : donné en entrée $x \in \sum_{i\in I} A_i$, on sait qu'il existe un unique $k \in I$ tel que $x = (a, k)$ avec $a \in A_k$, et on pose alors $[f_i]_{i\in I}(x) := f_k(a)$. Le lecteur pourra vérifier que, avec ces définitions, $\sum_{i\in I} A_i$ est bien le coproduit des A_i dans **Set***.*

Exemple 2.55 (coégaliseurs) *La catégorie* **Set** *a aussi tous les coégaliseurs. On va s'occuper ici du cas binaire. Soient $f, g : A \to B$. On définit une relation binaire $\rhd$ sur B de la façon suivante :*

$$b \rhd b' \qquad \textit{ssi} \qquad \exists\, a \in A.\, f(a) = b \textit{ et } g(a) = b'$$

Soit $\sim$ la plus petite relation d'équivalence sur B contenant $\rhd$, et soit $q : B \to B/{\sim}$ la fonction envoyant chaque élément de B sur sa classe d'équivalence (on rappelle que $B/{\sim}$, appelé habituellement « B modulo $\sim$ », est l'ensemble des classes d'équivalence de la relation $\sim$). On va voir que $(B/{\sim}, q)$ est le coégaliseur de f et g.

Tout d'abord, il faut vérifier que $q \circ f = q \circ g$. En effet, pour tout $a \in A$, on a par définition $f(a) \rhd g(a)$, donc $f(a) \sim g(a)$, c'est-à-dire $f(a)$ et $g(a)$ sont dans la même classe d'équivalence, et donc $q(f(a)) = q(g(a))$, comme souhaité.

Soit maintenant C un autre ensemble muni d'une fonction $h : B \to C$ telle que $h \circ f = h \circ g$. On définit la fonction $u : B/{\sim} \to C$ de la façon suivante. Soit x une classe d'équivalence de $\sim$, et soit $b, b' \in x$, c'est-à-dire $b \sim b'$. On peut démontrer que, comme $\sim$ est la plus petite relation d'équivalence incluant $\rhd$, on a

$$b \sim b' \quad \textit{ssi} \quad \exists b_1, \ldots, b_n \in B.\, b \lhd^* b_1 \rhd^* b_1 \lhd^* \cdots \rhd^* b_{n-2} \lhd^* b_{n-1} \rhd^* b'$$

où :

- *$\rhd^*$ est la clôture refléxive-transitive de $\rhd$;*
- *$\lhd$ est la relation opposée de $\rhd$, c'est-à-dire, $b \lhd b'$ ssi $b' \rhd b$;*
- *$\lhd^*$ est la clôture réflexive-transitive de $\lhd$.*

On va montrer que $h(b) = h(b')$ par induction sur n. Si $n = 0$, c'est que $b = b'$ est on conclut immédiatement. Si $n > 0$, on a

$$b \sim b_{n-2} \lhd^* b_{n-1} \rhd^* b'$$

et l'hypothèse d'induction nous donne $h(b) = h(b_{n-2})$. Or, par définiton il existe $b''_1, \ldots b''_m \in B$ tels que

$$b_{n-2} \lhd b'_1 \lhd \cdots \lhd b'_m \lhd b_{n-1}.$$

On montre que $h(b_{n-2}) = h(b_{n-1})$ par induction sur m. Si $m = 0$, on conclut immédiatement car cela veut dire que $b_{n-2} = b_{n-1}$. Si $m > 0$, on a par hypothèse d'induction que $h(b_{n-2}) = h(b'_m)$. Mais $b'_m \lhd b_{n-1}$ signifie, par définition, qu'il existe $a \in A$ tel que $g(a) = b'_m$ et $f(a) = b_{n-1}$. Comme on travaille sous l'hypothèse que $h \circ f = h \circ g$, cela nous donne $h(b'_m) = h(b_{n-1})$, comme souhaité. Un argument *similaire nous donne que $h(b_{n-1}) = h(b')$, ce qui conclut la preuve que $h(b) = h(b')$. On peut donc poser, pour $x \in B/{\sim}$,*

$$u(x) := h(b) \quad \textit{pour n'importe quel } b \in x,$$

car on vient de démontrer que l'image par h est toujours la même. Cette fonction vérifie bien que $h = u \circ q$: en effet, pour tout $b \in B$, on a $u(q(b)) = h(b)$ par définition de u et de q.

Il nous reste à vérifier que la fonction u définie ci-dessus est l'unique telle que $h = u \circ q$. Supposons qu'il y ait une autre $u' : B/\sim \to C$ telle que $h = h' \circ q$. Soit $x \in B/{\sim}$. Comme les classes d'équivalence forment une partition de B, et qu'un élément d'une partition n'est jamais vide, il existe forcément $b \in x$ et, par définition de q, $x = q(b)$. On a donc

$$u'(x) = u'(q(b)) = u(q(b)) = u(x),$$

ce qui montre que $u' = u$.

Les coégaliseurs dans **Set** font donc intervenir la notion de quotient par une relation d'équivalence, un concept très important en mathématique. Toutefois, ce concept correspond de façon beaucoup plus naturelle aux pushouts :

Exemple 2.56 (pushouts) *Les exemples précédents montrent, grâce au Théorème 2.50, que* **Set** *est cocomplète, et elle a donc en particulier les pushouts. On va les décrire explicitement ici, dans le cas binaire. Soient $f : C \to A$ et $g : C \to B$ deux fonctions. On définit la relation binaire sur $A + B$ suivante :*

$$(a, 1) \rhd (b, 2) \qquad \textit{ssi} \qquad \exists c \in C.\ f(c) = a \textit{ et } g(c) = b.$$

Soit $\sim$ la plus petite relation d'équivalence sur $A + B$ contenant $\rhd$. On définit deux fonctions

$$\begin{aligned} p &: A \to A + B/{\sim} \\ q &: B \to A + B/{\sim} \end{aligned}$$

de la façon suivante : pour $a \in A$, $p(a)$ est la classe d'équivalence de $(a, 1)$; pour $b \in B$, $q(b)$ est la classe d'équivalence de $(b, 2)$. Il est immédiait de constater que $p \circ f = q \circ g$. En fait, on invite le lecteur à vérifier que $(A + B/{\sim}, p, q)$ est le pushout de f et g (les arguments sont tout à fait similaires à ceux de l'exemple précédent). On l'appelle habituellement somme amalgamée *de A et B le long de f et g, et on emploie parfois la notation (un peu imprécise) $A \amalg_C B$.*

On peut maintenant donner une définition « sans éléments », dans l'esprit de la Sect. 1, de l'ensemble quotient d'une relation d'équivalence. En effet, soit $\sim$ une relation d'équivalence sur un ensemble A quelconque. En tant que relation binaire, $\sim$ est en fait un sous-ensemble $S_\sim \subseteq A \times A$, représenté par la fonction inclusion $i_\sim : S_\sim \rightarrowtail A \times A$. En composant avec les projections, on obtient deux fonctions

$$\begin{tikzcd} S_\sim \arrow[r, "\pi_1 \circ i_\sim"] \arrow[d, "\pi_2 \circ i_\sim"'] & A \\ A & \end{tikzcd}$$

On peut alors considérer le pushout de $\pi_1 \circ i_\sim$ et $\pi_2 \circ i_\sim$; il s'agit, à isomorphisme près, exactement de l'ensemble quotient $A/\sim$. En effet, dans ce cas la relation $\rhd$ introduite ci-dessus est

$$(a,1) \rhd (a',2) \quad \text{ssi} \quad \exists\,(a_1,a_2) \in S_\sim.\ \pi_1(i_\sim(a_1,a_2)) = a \text{ et } \pi_2(i_\sim(a_1,a_2)) = a'.$$

Mais $i_\sim(a_1,a_2) = (a_1,a_2)$ (car $i_\sim$ est juste la fonction inclusion) et, par définition, $(a_1,a_2) \in S_\sim$ ssi $a_1 \sim a_2$. On a donc

$$(a,1) \rhd (a',2) \qquad \text{ssi} \qquad a \sim a'.$$

La relation d'équivalence engendrée par $\rhd$ est donc, en quelque sorte, « deux copies » de la relation $\sim$, étendue aux deux copies de A dans $A + A$. Son quotient est isomorphe à $A/\sim$.

La discussion précédente indique que, si on arrive à généraliser la notion de relation d'équivalence dans n'importe quelle catégorie (avec produits binaires), on sait aussi comment généraliser la notion de quotient par cette relation d'équivalence. Ceci est en fait possible, avec la notion catégorique de *congruence*. Sans donner la définition, on se limitera à dire que, comme on a vu dans la Sect. 1.6, la notion de sous-ensemble peut être remplacée par celle de sous-objet, et une congruence sur un objet A d'une catégorie $\mathbf{C}$ avec produits finis sera donc un sous-objet $i : R \rightarrowtail A \times A$, avec certaines données supplémentaires correspondantes aux propriétés de réflexivité, symétrie et transitivité, que l'on ne détaillera pas ici. Par analogie avec la catégorie **Set**, l'*objet quotient* A/R, s'il existe, sera donc défini comme le pushout des flèches $\pi_i \circ i$ et $\pi_2 \circ i$.

3 Quelques notions de théorie des catégories

3.1 Comparer les catégories entre elles

Considérons les trois catégories suivantes :
- **FinSet**, la sous-catégorie pleine de **Set** sur les ensembles finis ;
- $\mathbb{F}'$, la sous-catégorie pleine de **FinSet** sur les ensembles de la forme $\{1,\dots,n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (lorsque $n = 0$, on a l'ensemble vide) ;
- $\mathbb{F}$, la catégorie ainsi définie :
  - les objets sont les entiers naturels $(0,1,2,3\dots)$;
  - une flèche $m \to n$ est une fonction $f : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$;
  - la composition et les identités sont comme dans $\mathbb{F}'$.

Il est assez clair au niveau intuitif que $\mathbb{F}'$ et $\mathbb{F}$ sont essentiellement la même catégorie. En effet, on peut montrer qu'elle sont isomorphes (en tant qu'objets de **Cat**, la catégorie des petites catégories introduite dans l'Exemple 2.11) : il suffit de définir le foncteur

$$\begin{aligned} B :\ & \mathbb{F} \longrightarrow \mathbb{F}' \\ & n \longmapsto \{1,\dots,n\} \\ & f \longmapsto f \end{aligned}$$

qui est évidemment inversible en posant $B^{-1}(\{1,\ldots,n\}) := n$ sur les objets.

Quant au rapport entre $\mathbb{F}$ et **FinSet**, la question est différente. Tout d'abord, on peut considérer l'extension de B le long de l'inclusion $I : \mathbb{F}' \rightarrowtail$ **FinSet**, ce qui donne un foncteur $E := I \circ B : \mathbb{F} \to$ **FinSet**. On voit tout de suite que E n'est pas inversible : en effet, pour qu'un foncteur soit inversible, il faut au moins qu'il soit une bijection au niveau des objets, et donc il faut au moins qu'il soit surjectif sur les objet, ce qui est très loin d'être le cas pour E : il y a énormement d'ensembles finis qui ne sont pas de la forme $\{0,\ldots,n\}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Et pourtant, d'après notre discussion introductive de la Sect. 1.1, en théorie des catégories on considère deux objets isomorphes comme étant essentiellement égaux, et on a bien que tout ensemble fini A est isomorphe, dans **FinSet**, à un ensemble de la forme $\{1,\ldots,n\}$: il suffit de prendre $n := |A|$, la cardinalité de A. De plus, si l'on choisit une bijection

$$\beta_A : A \to \{1,\ldots,|A|\}$$

pour chaque ensemble fini A, on peut transporter toute fonction $f : A \to B$ entre ensembles finis sur une fonction $Ff : \{1,\ldots,|A|\} \to \{1,\ldots,|B|\}$ en posant

$$Ff := \beta_B \circ f \circ \beta_A^{-1},$$

et ceci est compatible avec la composition : si $g : B \to C$,

$$F(g \circ f) = \beta_C \circ (g \circ f) \circ \beta_A^{-1} = \beta_C \circ g \circ \beta_B^{-1} \circ \beta_B \circ f \circ \beta_A^{-1} = Fg \circ Ff,$$

$$F(\mathrm{id}_A) = \beta_A \circ \mathrm{id}_A \circ \beta_A^{-1} = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,|A|\}}.$$

On vient donc de définir un foncteur

$$F : \textbf{FinSet} \to \mathbb{F}$$

associant à chaque ensemble fini A l'entier $|A|$ et se comportant de la façon que l'on vient de décrire sur les fonctions.

Si E n'était pas surjectif sur les objets, F est loin d'être injectif : toute paire d'ensembles différents A et B avec le même nombre d'éléments donne $FA = FB$. Le foncteur F n'est donc pas plus inversible que E, mais il semble clair que F est « presque » l'inverse de E ou, mieux, que F est l'inverse de E « à isomorphisme près ». En effet, dans une direction, la composition des deux *est* l'identité :

$$F \circ E = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}}.$$

Ceci est immédiat : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F(En) = F\{1,\ldots,n\} = n,$$

et pour toute $f : \{1,\ldots,m\} \to \{1,\ldots,n\}$,

$$F(Ef) = Ff = \beta_{\{1,\ldots,n\}} \circ f \circ \beta_{\{1,\ldots,m\}}^{-1} = f,$$

modulo l'hypothèse que, pour chaque $k \in \mathbb{N}$, on a pris $\beta_{\{1,\ldots,k\}}$ égale à l'identité, ce qui est tout à fait possible.

Dans l'autre direction, $E(FA) = \{1, \ldots, |A|\}$, et donc $E \circ F \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{FinSet}}$. Cependant, comme on a remarqué ci-dessus, on a bien $E(FA) \cong A$ via les bijections β_A. De plus, pour toute $f : A \to B$, on a

$$\beta_B^{-1} \circ E(Ff) \circ \beta_A = \beta_B^{-1} \circ \beta_B \circ f \circ \beta_A^{-1} \circ \beta_A = f,$$

c'est-à-dire, toujours modulo les bijections β_A, $E \circ F$ se comporte comme l'identité sur les flèches aussi.

La conlcusion de cette discussion semble être que, si les catégories $\mathbb{F}$ et **FinSet** ne sont pas isomorphes, elles devraient pour le moins être considérées comme « équivalentes ». Le concept de *transformation naturelle*, que l'on introduira dans la section suivante, donne justement la façon de définir formellement une telle notion d'équivalence.

3.2 Transformations naturelles

Avant de les définir formellement, discutons brièvement de la nature des transformations naturelles. Reprenons l'exemple de la section précédente : que manque-t-il pour que $\mathbb{F}$ et **FinSet** soient isomorphes ? On a déjà vu que $F \circ E = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}}$, le seul obstacle est donc que $E \circ F \neq \mathrm{Id}_{\mathbf{FinSet}}$. Dans la Sect. 1.1, nous avons insisté sur le fait qu'un principe de base de la théorie des catégories est que deux objets sont à considérer comme essentiellement égaux dès qu'il existe un isomorphisme (c'est-à-dire, une flèche inversible) entre les deux. Ceci nous suggère que, même si l'on n'a pas d'égalité entre $E \circ F$ et $\mathrm{Id}_{\mathbf{FinSet}}$, on pourrait se contenter d'un isomorphisme. Pour parler d'isomorphisme, il faut d'abord pouvoir voir $E \circ F$ et $\mathrm{Id}_{\mathbf{FinSet}}$ comme des objets d'une catégorie. Pour cela faire, il faut définir des *flèches* entre foncteurs. C'est précisement l'enjeux des transformations naturelles : elles sont des *transformations entre foncteurs* (de même source et but).

Le concept de transformation naturelle est propre à la théorie des catégories. Tandis que les catégories peuvent être vues comme des généralisations d'ensembles, préordres, monoïdes, graphes, etc. (Exemple 2.5), et que les foncteurs peuvent être vus comme des généralisations des transformations appropriées pour ces objets (fonctions, fonctions monotones, homomorphismes de monoïdes ou de graphes, etc., voir l'Exemple 2.12), les transformations naturelles n'ont pas de correspondant dans ces analogies. Elles ne généralisent rien, elles sont tout simplement un « nouveau produit » de la théorie des catégories. En fait, on dit que Saunders Mac Lane, l'un des fondateur de ce domaine, a remarqué une fois qu'il n'a pas « inventé les catégories pour étudier les foncteurs [mais] pour étudier les transformations naturelles ».

Définition 3.1 (transformation naturelle) *Soient $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ deux foncteurs. Une* transformation naturelle *de F vers G est une famille $(\varphi_A)_{A \in \mathbf{A}}$ de flèches de $\mathbf{B}$ indexée par les objets de $\mathbf{A}$, telle que*

$$\varphi_A : FA \longrightarrow GA$$

et telle que, pour toute flèche $f : A \to B$ de $\mathbf{A}$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\varphi_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

Les flèches φ_A sont appelées composantes *de la transformation naturelle, et la commutation du diagramme ci-dessus est appelée* condition de naturalité*.*

On utilise la notation $\varphi : F \Rightarrow G$ pour indiquer que φ est une transformation naturelle de F vers G. Si l'on veut préciser aussi la source et le but de F et G (qui doivent forcément coïncider), on peut écrire

$$\varphi : F \Rightarrow G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}.$$

Pour insister sur la nature « exclusivement catégorique » des transformations naturelles, nous exhortons le lecteur à reprendre l'Exemple 2.12 et vérifier que la notion de transformation naturelle instanciée à chaque cas de l'exemple est triviale. Par exemple, si on regarde deux ensembles X et Y comme des catégories discrètes et deux fonctions $f, g : X \to Y$ comme deux foncteurs, il ne peut y avoir de transformations naturelles $f \Rightarrow g$ que si $f = g$, et dans ce cas la seule transformation naturelle possible est l'identité.

Définition 3.2 (catégorie de foncteurs) *Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux catégories. On dénote par $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$ la catégorie ainsi définie :*

- *les objets sont les foncteurs $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$;*
- *les flèches $F \to G$ sont les transformations naturelles $F \Rightarrow G$;*
- *si $\varphi : F \Rightarrow G$ et $\psi : G \Rightarrow H$, leur composition $\psi \circ \varphi : F \Rightarrow H$ est définie composante par composante :*

$$(\psi \circ \varphi)_A := \psi_A \circ \varphi_A.$$

On vérifie immédiatement que cette composition est associative et que, pour tout foncteur F, la famille id_{FA} est une tranformation naturelle $F \Rightarrow F$, qui est l'identité pour cette composition.

Deux foncteurs $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ sont isomorphes s'il le sont en tant qu'objets de $\mathbf{B}^{\mathbf{A}}$. Pour souligner le fait que cette notion s'appuie sur les tranformations naturelles, on l'appelle souvent isomorphisme naturel*.*

Lemme 3.3 *Une transformation naturelle $\varphi : F \Rightarrow G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un isomorphisme naturel ssi chaque composante φ_A pour $A \in \mathbf{A}$ est un iso de $\mathbf{B}$.*

Preuve. Si φ est un iso, il existe $\varphi^{-1} : G \Rightarrow F$. Or, comme, pour tout $A \in \mathbf{A}$,

$$\mathrm{id}_{GA} = (\varphi \circ \varphi^{-1})_A = \varphi_A \circ \varphi_A^{-1},$$

on a que chaque composante φ_A^{-1} est l'inverse à droite de chaque composante φ_A. Similairement, $\varphi_A^{-1} \circ \varphi_A = \mathrm{id}_{FA}$, et on conclut.

Dans l'autre direction, si chaque φ_A est inversible, il est facile de vérifier que $(\varphi_A^{-1})_{A \in \mathbf{A}}$ est naturelle de G vers F, et c'est évidemment l'inverse de φ. □

Le Lemme 3.3 ne se géneralise pas à l'inversibilité monolaterale (à gauche ou à droite) : si la preuve ci-dessus montre qu'une transformation naturelle φ inversible à gauche (resp. à droite) a forcément toutes ses composantes φ_A inversibles à gauche (resp. à droite), le fait que chaque φ_A soit inversible à gauche (resp. à droite) n'implique pas que φ le soit.

L'isomorphisme de foncteur préserve toutes les propriétés catégoriques. Par exemple :

Lemme 3.4 (préservation de la plénitude et de la fidélité par iso) *Soit F un focteur fidèle (resp. plein), et sot $G \cong F$. Alors, G aussi est fidèle (resp. plein).*

Preuve. Supposons que $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, et appelons $\beta : F \Rightarrow G$ l'isomorphisme naturel entre les deux. On commence par une remarque de nature générale : si $f : A \to B$ est une flèche de $\mathbf{A}$, la naturalité de β nous dit que le diagramme

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\beta_A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\beta_B"'] & GB \end{tikzcd}$$

commute. Comme β_B est inversible, nous en dérivons que

$$Ff = \beta_B^{-1} \circ Gf \circ \beta_A,$$
$$Gf = \beta_B \circ Ff \circ \beta_A^{-1}.$$

Commençon maintenant par prouvuer la fidélité de G, en supposant celle de F. Soient $f, g : A \to B$ telles que $Gf = Gg$. Grâce à l'observation ci dessus, on a

$$Ff = \beta_B^{-1} \circ Gf \circ \beta_A = \beta_B^{-1} \circ Gg \circ \beta_A = Fg,$$

ce qui implique $f = g$ par fidélité de F.

Pour ce qui concerne la plénitude, supposons F plein et prenons $g : GA \to GB$. Soit

$$g' := \beta_B^{-1} \circ g \circ \beta_A : FA \to FB.$$

Par plénitude de F, il existe $f : A \to B$ telle que $Ff = g'$. En appliquant la remarque ci-dessus, on a

$$Gf = \beta_B \circ Ff \circ \beta_A^{-1} = \beta_B \circ g' \circ \beta_A^{-1} = \beta_B \circ \beta_B^{-1} \circ g \circ \beta_A \circ \beta_A^{-1} = g,$$

ce qui montre la plénitude de G. $\square$

Exercice 3.5 *Soient $\mathbf{J}$ et $\mathbf{A}$ deux catégories. Donné un objet A de $\mathbf{A}$, on dénote par $K_A : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$ le foncteur constant sur A, associant A à tout objet de $\mathbf{J}$ et id_A à toute flèche de $\mathbf{J}$.*

Soit $D : \mathbf{J} \to \mathbf{A}$. Vérifier que la catégorie $\mathbf{Cone}(D)$ introduite à la Définition 2.18 est isomorphe à la sous-catégorie pleine de la catégorie slice (Définition 2.8) $\mathbf{A}^{\mathbf{J}}/D$ dont les objets sont de la forme $K_A \Rightarrow D$ pour A un objet de $\mathbf{A}$.

3.3 Lemme de Yoneda

Nous avons répété à plusieurs reprises que la théorie des catégories se franchit du fait que les objets mathématiques soient forcément composés d'« éléments », ou de « points ». Nous avons vu par ailleurs (Sect. 1.5) que, dans le cas des ensembles, la notion d'élément peut être internalisée en langage catégorique : un élément $a \in A$ est la même chose qu'une flèche $a : 1 \to A$, où 1 est l'objet terminal (le singleton). Nous pouvons prendre inspiration de la catégorie **Set** et déclarer que, pour A objet quelconque d'une catégorie $\mathbf{C}$ avec objet terminal 1, un *élément* (ou *point*) de A est une flèche $1 \to A$.

Si cette définition fonctionne bien dans certains cas, elle est très mal adaptée à certains autres :

Exemple 3.6 *Nous invitons le lecteur à vérifier que toutes les catégories de l'Exemple 2.4 sont munies d'objet terminal : dans tous les cas, il s'agit de l'objet dont l'ensemble sous-jacent est un singleton, avec la seule structure possible (ordre, monoïde, groupe, espace vectoriel, espace topologique). La catégorie* **Cat** *(ou* Cat*) aussi a l'objet terminal : c'est la catégorie* **1** *avec un seul objet et la seule flèche indentité.*

Dans les cas de **Pos**, **Top** *et* **Cat**, *la définition d'élément donnée ci-dessus est satisfaisante : dans* **Pos** *et* **Top**, *une flèche de l'objet terminal vers un objet* X *est effectivement la même chose qu'un élément de l'ensemble ordonné* X *ou un point de l'espace topologique* X *; dans* **Cat**, *un élément d'une catégorie* $\mathbf{C}$ *(c'est-à-dire, un foncteur* $\mathbf{1} \to \mathbf{C}$*) correspond à un objet de* $\mathbf{C}$, *ce qui est tout à fait raisonnable.*

Dans **Mon** *et toutes ses sous-catégories mentionnées dans l'Exemple 2.4, y compris* $\mathbf{Vect}_k$, *la situation est assez différente. En effet, l'objet terminal de* **Mon** *est aussi* initial *(Exemple 2.45) : si* 1 *est le monoïde terminal (avec un seul élément* e, *qui est forcément neutre), il y a exactement une flèche* $1 \to M$ *pour n'importe quel monoïde* M, *car les flèches de* **Mon** *sont les homomorphismes de monoïdes, et un homomorphisme doit préserver l'élément neutre, ce qui oblige* e *à être envoyé sur l'élément neutre de* M. *Nous avons donc que, selon la définition ci-dessus, tout monoïde a exactement un élément. Ceci est à fortiori vrai pour toutes les sous-catégories de* **Mon** *en question.*

Cette définition naïve d'élément, bien que parfois utile, est donc en général défectueuse. En fait, il y a un problème bien plus grave : que fait-on si $\mathbf{C}$ n'a pas d'objet terminal ? Dans ce cas, il semblerait que nous ayons totalement perdu la notion d'élément.

Il y a pourtant une possibilité, qui peut certe paraître radicale mais qui est aussi la seule qui ait un air tant soit peu canonique : considérer que *toute* flèche avec but A, c'est-à-dire de type $X \to A$ pour X objet quelconque, soit un *élément généralisé* de A (avec A objet arbitraire d'une catégorie arbitraire $\mathbf{C}$). Vu que la source X varie, cette définition est paramétrique : pour chaque X, on a un ensemble de « X-éléments de A », à savoir les flèches $X \to A$ de $\mathbf{C}$. Une remarque fondamentale de la théorie des catégories est que cette paramétricité est fonctorielle.

Définition 3.7 (foncteur hom) *Soit* $\mathbf{C}$ *une catégorie localement petite. On appelle* foncteur hom *de* $\mathbf{C}$ *le foncteur*

$$\hom_{\mathbf{C}} : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

ainsi défini :

- *pour deux objets A, B de $\mathbf{C}$, $\hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ est l'ensemble des flèches de source A et but B dans $\mathbf{C}$;*
- *soit $f : A' \to A$ et $g : B \to B'$ deux flèches de $\mathbf{C}$; l'image de (f, g) est définie de la façon suivante :*

$$\begin{aligned}\hom_{\mathbf{C}}(f,g) : \quad \hom_{\mathbf{C}}(A,B) &\longrightarrow \hom_{\mathbf{C}}(A',B') \\ h &\longmapsto g \circ h \circ f\end{aligned}$$

Comme l'ensemble $\hom_{\mathbf{C}}(A, B)$ *est habituellement dénoté par* $\mathbf{C}(A, B)$ *(Définition 2.1), le foncteur hom de* $\mathbf{C}$ *est souvent aussi noté* $\mathbf{C}(-, -)$.

Or, si l'on fixe un objet A de $\mathbf{C}$ et on le met à la place du deuxième argument du foncteur $\hom_{\mathbf{C}}$, on obtient un foncteur

$$\mathbf{C}(-, A) : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}.$$

L'image de X par ce foncteur est justement $\mathbf{C}(X, A)$, l'ensemble des « X-éléments » de A. Le lemme de Yoneda, un résultat central de la théorie des catégories, dit que le foncteur $\mathbf{C}(-, A)$ est, en quelque sorte, exactement la même chose que A. C'est-à-dire, si dans le cas de $\mathbf{Set}$ l'ensemble $\mathbf{Set}(1, A)$ suffit à décrire A complètement, dans le cas d'une catégorie quelconque il suffit de considérer l'« ensemble paramétrique » $\mathbf{C}(-, A)$.

Comment peut-on dire que $\mathbf{C}(-, A)$ est « la même chose » que A ? L'idée est la suivante : $\mathbf{C}(-, A)$ est un foncteur ; d'après la Définition 3.2, nous savons que les foncteurs de même source et but forment une catégorie, avec les transformations naturelles comme flèches, notée $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ dans ce cas. Nous allons donc montrer que la sous-catégorie pleine de $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ sur les foncteurs de la forme $\mathbf{C}(-, A)$ est *isomorphe* à $\mathbf{C}$. C'est-à-dire, chaque transformation naturelle $\mathbf{C}(-, A) \Rightarrow \mathbf{C}(-, B)$ est en bijection avec une flèche $A \to B$ de $\mathbf{C}$, et cette correspondence est compatible avec la composition.

Avant de démontrer le lemme de Yoneda, faisons quelques remarques d'ordre général sur les foncteurs dont la source est une catégorie opposée, comme $\mathbf{C}(-, A)$. Dans la pratique, un foncteur

$$F : \mathbf{A}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{B}$$

est traité comme un foncteur de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$ qui « inverse » la direction des flèches : c'est-à-dire, F a la péculiarité qu'une flèche $f : A \to B$ de $\mathbf{A}$ est envoyée sur un flèche $Ff : FB \to FA$ de $\mathbf{B}$ (au lieu de $FA \to FB$). Dans ce cas, la fonctorialité s'exprime ainsi

$$F(g \circ f) = Ff \circ Fg,$$

ce qui montre bien que F « inverse » les flèches lors de son « passage ». Un tel foncteur est appelé *contravariant*, tandis que les foncteurs au sens de la Définition 2.9 sont appelés *covariants*. Un foncteur contravariant de $\mathbf{A}$ vers $\mathbf{B}$ est donc la même chose qu'un foncteur covariant de $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ vers $\mathbf{B}$, et c'est pour cela que l'on ne donne pas de définition séparée. Cependant, il est parfois commode d'oublier la catégorie $\mathbf{A}^{\mathrm{op}}$ et de travailler directement dans $\mathbf{A}$, en utilisant donc directement la définition de foncteur contravariant. C'est ce que nous ferons dans la preuve du lemme de Yoneda.

Lemme 3.8 (Lemme de Yoneda) *Soit* $\mathbf{C}$ *un catégorie et*

$$F : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

un foncteur. Alors, pour tout objet A *de* $\mathbf{C}$*, on a une bijection*

$$FA \cong \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}\big(\mathbf{C}(-,A), F\big)$$

qui est naturelle en A*.*

Preuve. Comme expliqué ci-dessus, nous allons traiter F comme un foncteur contravariant de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{Set}$, et n'allons donc considérer dans la suite que des flèches de $\mathbf{C}$, jamais de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$. Ainsi, si $f : A \to B$ est une flèche de $\mathbf{C}$, nous allons écrire directement $Ff : FB \to FA$ pour la fonction résultante de l'application de F à la flèche de $\mathbf{C}^{\mathrm{op}}$ correspondante à f.

Commençons par remarquer que chaque $x \in FA$ détermine une transformation naturelle

$$\{x\} : \mathbf{C}(-,A) \Rightarrow F$$

dont les composantes, pour X objet de $\mathbf{C}$, sont définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \{x\}_X : \quad \mathbf{C}(X,A) &\longrightarrow \mathbf{F}X \\ h &\longmapsto Fh(x) \end{aligned}$$

Pour montrer la naturalité, on remarque que, pour toutes flèches $f : X' \to X$ et $h : X \to A$ de $\mathbf{C}$, on a, par définition de $\{\cdot\}$ et fonctorialité de F,

$$\begin{aligned} \{x\}_{X'}(\mathbf{C}(f,A)(h)) &= \{x\}_{X'}(h \circ f) = F(h \circ f)(x) \\ &= Ff(Fh(x)) = Ff(\{x\}_X(h)). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant montrer que, pour toute transformation naturelle

$$\varphi : \mathbf{C}(-,A) \Rightarrow F,$$

il existe un unique $x \in FA$ tel que

$$\varphi = \{x\}.$$

Pour l'existence, prenons une telle transformation naturelle φ et posons

$$x_\varphi := \varphi_A(\mathrm{id}_A).$$

Observons tout d'abord que $x_\varphi \in FA$ car, par définition, $\varphi_A : \mathbf{C}(A,A) \to FA$, on a donc bien le droit d'appliquer φ_A à id_A, qui est une flèche $A \to A$, en obtenant ainsi un élément de FA. On va montrer que, pour tout objet X de $\mathbf{C}$, on a $\varphi_X = \{x_\varphi\}_X$. Soit $h : X \to A$. Par naturalité de φ, nous avons le carré commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}(A,A) \arrow[r, "\varphi_A"] \arrow[d, "\mathbf{C}(h,A)"'] & FA \arrow[d, "Fh"] \\
\mathbf{C}(X,A) \arrow[r, "\varphi_X"'] & FX
\end{tikzcd}$$

En rappelant que, pour toute $g : A \to A$, $\mathbf{C}(h, A)(g) = g \circ h$, grâce à la commutativité de ce diagramme on a

$$\begin{aligned}\varphi_X(h) &= \varphi_X(\mathrm{id}_A \circ h) = \varphi_X(\mathbf{C}(h, A)(\mathrm{id}_A)) \\ &= Fh(\varphi_A(\mathrm{id}_A)) = Fh(x_\varphi) = \{x_\varphi\}_X(h).\end{aligned}$$

Pour ce qui concerne l'unicité, supposons que $x, x' \in FA$ soient tels que $\{x\} = \{x'\}$. On remarque que, par définition et fonctorialité de F,

$$\{x\}_A(\mathrm{id}_A) = F(\mathrm{id}_A)(x) = \mathrm{id}_{FA}(x) = x.$$

De même, $\{x'\}_A(\mathrm{id}_A) = x'$. Mais comme, par hypothèse, $\{x\}_A(\mathrm{id}_A) = \{x'\}_A(\mathrm{id}_A)$, on a $x = x'$.

On a donc bien établi une bijection $\{\cdot\}$ entre FA et les transformation naturelles $\mathbf{C}(-, A) \Rightarrow F$. On va montrer que cette bijection est naturelle en A. En effet, pour souligner que tout au long du raisonnement on avait fixé un objet A de $\mathbf{C}$, on peut écrire

$$\{\cdot\}^A : FA \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}\big(\mathbf{C}(-, A), F\big).$$

Si on prend un autre objet B de $\mathbf{C}$, on peut reprendre essentiellement la même définition et obtenir une bijection

$$\{\cdot\}^B : FB \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}\big(\mathbf{C}(-, B), F\big).$$

Pour raccourcir les notations, on appelle

$$G : \mathbf{C}^{\mathrm{op}} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

le foncteur tel que :

- $GA := \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}\big(\mathbf{C}(-, A), F\big)$, c'est-à-dire, l'ensemble des transformations naturelles $\mathbf{C}(-, A) \Rightarrow F$;
- pour $f : B \to A$, Gf est la fonction suivante : si $\varphi : \mathbf{C}(-, A) \Rightarrow F$, on définit une transformation naturelle $Gf(\varphi) : \mathbf{C}(-, B) \Rightarrow F$ dont les composantes sont, pour X objet de $\mathbf{C}$ et $h : X \to B$,

$$Gf(\varphi)_X(h) := \varphi_X(f \circ h).$$

Avec ces notations, notre bijection est une transformation

$$\{\cdot\} : F \Rightarrow G$$

dont la naturalité est la commutativité du diagramme suivant, pour toute flèche $f : B \to A$ de $\mathbf{C}$:

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[r, "\{\cdot\}^A"] \arrow[d, "Ff"'] & GA \arrow[d, "Gf"] \\ FB \arrow[r, "\{\cdot\}^B"'] & GB \end{tikzcd}$$

On va montrer cela pour chaque composante. Soit X un objet de $\mathbf{C}$, $h : X \to B$ et $x \in FA$. On a

$$\begin{aligned} \{Ff(x)\}^B_X(h) &= Fh(Ff(x)) = F(f \circ h)(x) \\ &= \{x\}^A_X(f \circ h) = Gf(\{x\}^A)_X(h) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Théorème 3.9 (plongement de Yoneda) *Pour toute catégorie* $\mathbf{C}$*, il esiste un plongement plein et fidèle*

$$Y : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}.$$

Preuve. Définissons d'abord le foncteur Y :

— sur les objets, $YA := \mathbf{C}(-, A)$;
— sur les flèches, si $f : A \to B$, Yf est la transformation dont les composantes sont, pour chaque X dans $\mathbf{C}$,

$$\begin{aligned} (Yf)_X : \quad \mathbf{C}(X, A) &\longrightarrow \mathbf{C}(X, B) \\ h &\longmapsto f \circ h \end{aligned}$$

La naturalité de Yf est une conséquence immédiate de l'associativité de la composition.

Or, grâce au Lemme 3.8, nous avons

$$\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(YA, YB) = \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}(\mathbf{C}(-, A), YB) \cong YB(A) = \mathbf{C}(A, B),$$

ce qui montre bien la plénitude et la fidélité de Y. □

Le foncteurs de type $\mathbf{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ pour une catégorie $\mathbf{C}$ donnée sont appelés, pour des raisons historiques, *préfaisceaux*, et pour cette raison la catégorie $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ est parfois notée $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$. Les préfaisceaux jouent un rôle extrément important en théorie des catégories. Le lemme de Yoneda nous autorise à les voir comme des « objets virtuels » de la catégorie $\mathbf{C}$. C'est-à-dire, tout objet « réel » A de $\mathbf{C}$ peut être vu comme le préfaisceau $\mathbf{C}(-, A)$, et le lemme de Yoneda nous garantit qu'une « flèche virtuelle » (une transformation naturelle) entre objets réels est en fait une flèche « réelle » de $\mathbf{C}$.

Un préfaisceau F de $\mathbf{C}$ isomorphe à un préfaisceau de la forme $\mathbf{C}(-, A)$ est dit *représentable*, et A est l'*objet représentant*, que l'on peut montrer unique modulo isomorphisme. Bien entendu, il y a en général énormement de préfaisceaux non représentables (on peut penser notamment au cas où $\mathbf{C} = \mathbf{1}$, ce qui donne $\mathbf{PSh}(\mathbf{1}) \cong \mathbf{Set}$).

Le point de vue des « objets virtuels » est particulièrement important dans l'étude des limites et colimites. En fait, il n'est pas difficile de voir que $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ est toujours complète et cocomplète : ceci est parce que **Set** l'est, et limites et colimites dans $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ se calculent « point par point ». Par exemple, le produit de deux préfaisceaux F et G est défini par

$$(F \times G)(A) := FA \times GA.$$

Donc, donné un diagramme $D : \mathbf{J} \to \mathbf{C}$, on peut considérer le diagramme $Y \circ D : \mathbf{J} \to \mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ (où Y est le plongement de Yoneda), dont la limite (ou colimite) existe toujours. Or, il se trouve que $\lim D$ existe ssi le préfaisceau $\lim Y \circ D$ est représentable, auquel cas l'objet représentant est précisement $\lim D$.

On peut reformuler la situation ainsi : tout diagramme de $\mathbf{C}$ a comme limite un objet virtuel de $\mathbf{C}$; on dit que la limite existe dans $\mathbf{C}$ si cet objet s'avère être réel. On peut donc voir $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ comme une sorte de « complétion » de $\mathbf{C}$, au sens où $\mathbf{PSh}(\mathbf{C})$ a toutes les limites que $\mathbf{C}$ pourrait ne pas avoir.

3.4 Adjonctions

La notion d'isomorphisme naturel définie en Sect. 3.2 va nous servir pour formaliser le concept d'équivalence de catégories, mais nous allons d'abord l'utiliser pour introduire un concept plus général, et donc d'importance encore majeure en mathématique.

Définition 3.10 (adjonction) *Soient $R : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $L : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ deux foncteurs, avec $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ localement petites. On dit que L est* adjoint à gauche *de R, et donc que R est* adjoint à droite *de L, et on écrit $L \dashv R$, s'il existe un isomorphisme de foncteurs*

$$\mathbf{A}(L, -) \cong \mathbf{B}(-, R).$$

Diagrammatiquement, on écrit

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "R"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{B} \arrow[l, bend left, "L"] \end{tikzcd}$$

Développons un petit peu la définition. Les foncteurs isomorphes dont il est question dans l'adjonction sont de type $\mathbf{B}^{\mathrm{op}} \times \mathbf{A} \to \mathbf{Set}$, que l'on peut définir plus formellement ainsi :

$$\mathbf{A}(L, -) := \hom_{\mathbf{A}} \circ (L^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Id}_{\mathbf{A}})$$
$$\mathbf{B}(-, R) := \hom_{\mathbf{B}} \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{B}^{\mathrm{op}}} \times R)$$

Les composantes de l'isomorphisme naturel sont des bijections

$$\mathbf{A}(LB, A) \cong \mathbf{B}(B, RA)$$

pour tout objet A de $\mathbf{A}$ et B de $\mathbf{B}$. L'adjonction donc est en train de nous dire qu'une flèche de $\mathbf{A}$ de type $LB \to A$ est la même chose qu'une flèche de $\mathbf{B}$ de type $A \to RB$. Cette situation peut paraître anodine à ce niveau d'abstraction mais a en fait énormement d'exemples concrets en mathématique.

Un exemple important est celui des « objets libres ». Il est très fréquent en mathématique de définir une classe d'objets en rajoutant de la structure à une classe d'objets définis auparavant. Par exemple : on prend un ensemble (pas de structure), on lui rajoute une opération binaire associative avec un élément neutre, et on obtient un monoïde ; on prend un monoïde, on lui rajoute les inverses, et on obtient un groupe ; on prend un groupe abélien, on lui rajoute une autre opération binaire associative qui distribue sur la première, et on obtient un anneau ; et ainsi de suite.

On peut résumer ces situations en disant que l'on a une catégorie de base $\mathbf{B}$ et, en rajoutant de la structure aux objets de $\mathbf{B}$, on obtient une autre catégorie $\mathbf{A}$. On remarque que l'on peut toujours « oublier » la structure additionnelle : un anneau, c'est toujours un groupe (abélien) ; un groupe, c'est toujours un monoïde ; et un monoïde, c'est toujours un ensemble. Ceci se traduit par l'existence de ce que l'on appelle un *foncteur d'oubli*

$$U : \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{B}.$$

C'est un foncteur, c'est-à-dire il agit aussi sur les flèches, car normalement les transformations entres les objets de $\mathbf{A}$ seront des transformations de $\mathbf{B}$ préservant la structure additionnelle (un homomorphisme de monoïdes, c'est d'abord une fonction ; un homomorphisme de groupes s'avère être la même chose qu'un homomorphisme de monoïdes ; et un homomorphisme d'anneaux est avant tout un homomorphisme de groupes).

Une remarque intéressante est que, dans ce genre de situations, il est généralement possible d'aller dans l'autre sens, c'est-à-dire, on prend un objet B de $\mathbf{B}$ et on construit un objet de $\mathbf{A}$ « autour de lui ». Un tel objet, appelons-le FB, est un quelque sorte le « plus petit » objet muni de la structure additionnelle des objets de $\mathbf{A}$ et contenant B. On dit alors que FB est l'*objet (de* $\mathbf{A}$*) libre engendré par* B. La terminologie « libre » réflète l'idée que FB ne satisfait aucune contrainte supplémentaire qui ne soit pas spécifiée par la structure en question.

Or, il se trouve que l'association d'un objet de $\mathbf{B}$ à l'objet libre de $\mathbf{A}$ qu'il engendre est aussi fonctorielle, c'est-à-dire, elle définit un foncteur

$$F : \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}.$$

De plus, comme les transformations $FB \to A$ de $\mathbf{A}$ présevent la structure additionnelle imposée aux objets de $\mathbf{A}$, et comme dans FB cette structure est « libre », au sens où elle ne vérifie rien de plus que le fait d'être construite autour de B, une telle transformation sera complètement définie une fois que l'on connait son action sur B vers A vu comme objet de $\mathbf{B}$, c'est-à-dire, oubliant la structure additionnelle de A. On vient donc de dire qu'une flèche $FB \to A$ de $\mathbf{A}$ est la même chose qu'un flèche $B \to UA$ de $\mathbf{B}$, ce qui est exactement la définition d'adjonction :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, bend left, "U"] \arrow[r, phantom, "\top"] & \mathbf{B} \arrow[l, bend left, "F"] \end{tikzcd}$$

D'où le slogan « les foncteurs libres sont les adjoints à gauche des foncteurs d'oubli ». Cette vision unificatrice des constructions libres, réalisée par la notion d'adjonction, est un très bel exemple du pouvoir d'abstraction fourni par la théorie des catégories.

Exemple 3.11 *Soit* **Mon** *la catégorie des monoïdes et leurs homomorphismes (introduite dans l'Exemple 2.4). Comme remarqué plus haut, on a un foncteur d'oubli*

$$U : \mathbf{Mon} \longrightarrow \mathbf{Set}$$

associant à chaque monoïde $(M, \cdot, 1)$ son ensemble sous-jacent M est à chaque homomorphisme de monoïdes la fonction sous-jacente.

Dans la suite on considérera l'ensemble des mots (suite finies) construits à partir d'éléments d'un ensemble X quelconque, que l'on notera X^*. Par exemple, dans $\{a, b, c\}^*$ on trouvera les mots a, ba, ccb, $caca$, etc., ainsi que le mot vide ε.

Soit maintenant

$$F : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Mon}$$

le foncteur ainsi défini :

- *pour tout ensemble A, FA est le monoide $(A^*, \cdot, \varepsilon)$, où $\cdot$ dénote la concaténation de mots. Par exemple, $ab \cdot bac = abbac$.*
- *Pour toute fonction $f : A \to B$, on définit l'homomorphisme de monoïdes $Ff : FA \to FB$ comme suit : si $x \in A^*$ est de la forme $a_1 \cdots a_n$, où $a_i \in A$, on pose*

  $$Ff(x) := f(a_1) \cdots f(a_n),$$

  c'est-à-dire, le mot de B^* formé par les lettres $f(a_i)$.

On encourage le lecteur à vérifier que $F \dashv U$. En effet, FA est habituellement appelé le monoïde libre *sur A.*

L'exemple précédent explique peut-être un peu mieux l'idée de « liberté » : il s'agit de prendre un ensemble A quelconque, et de spéficier une loi de monoïde sur A. Prenons $a, b \in A$. Que devrait être $a \cdot b$? Si on déclare $a \cdot b \in A$, on est en train de *forcer* une équation sur la loi de monoïde : $a \cdot b = c$ où c est un certain élément de A. De même, si on déclare un élément a de A comme neutre, on est en train de *forcer* des équations, comme $a \cdot b = b$. Ces choix, à part le fait d'être totalement arbitraires (pourquoi a est neutre et non pas b ?), *contraignent* la structure du monoïde résultant. Au contraire, dans la construction du monoïde libre FA on ne fait aucun choix, et donc *on ne force aucune contrainte*. Le produit $a \cdot b$, c'est tout simplement ab, un nouvel élément qui n'était pas dans A. Et $ab \cdot c := abc$, encore un autre élément, et ainsi de suite. On ne force aucun de ces nouveaux éléments à être égaux. Par exemple, $b \cdot a = ba \neq ab$, car rien n'oblige le monoïde à être commutatif. De même, l'élément neutre n'est *pas* un élément de A. On « rajoute » donc à A tout ce qu'il faut pour qu'il devienne un monoïde, sans imposer de contraintes, c'est-à-dire de façon « libre ».

Exemple 3.12 *On a déjà parlé de catégorie libre sur un graphe (dernier point de l'Exemple 2.5). On est à présent en position de formaliser cette définition. En effet, toute catégorie petite n'est rien d'autre qu'un multigraphe dirigé avec une structure* *supplémentaire, donnée par la composition et la présence d'identités. Si* **Grph** *dénote la catégorie des multigraphes dirigés et de leur morphismes (introduits au dernier point de l'Exemple 2.12), on a donc un foncteur d'oubli*

$$U : \mathbf{Cat} \longrightarrow \mathbf{Grph}.$$

On invite le lecteur à vérifier que U admet un adjoint à gauche, donné par le foncteur associant à chaque graphe G la catégorie G^* définie à l'Exemple 2.5. Il s'agit donc bien de la catégorie libre engendrée par G.

3.5 Équivalence de catégories

Nous pouvons maintenant formaliser la notion d'équivalence que le lecteur perspicace aura peut-être deviné après la discussion de la Sect. 3.1.

Définition 3.13 (équivalence de catégories) *Soit $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un foncteur. On dit que F est une* équivalence de catégories *s'il existe un foncteur $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tel que $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ et $F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{B}}$. Le foncteur G est parfois appelé* pseudo-inverse *de F. On écrit $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}$ pour affirmer l'existence d'une équivalence entre* **A** *et* **B** *(la situation étant parfaitement symétrique).*

Exemple 3.14 *Dans la Sect. 3.1, nous avons démontré que $\mathbb{F} \simeq \mathbf{FinSet}$, via les deux foncteurs $E : \mathbb{F} \to \mathbf{FinSet}$ et $F : \mathbf{FinSet} \to \mathbb{F}$. On sait déjà que $F \circ E = \mathrm{Id}_{\mathbb{F}}$, et bien sûr l'égalité est une forme très forte d'isomorphisme. Pour ce qui concerne $E \circ F$, on invite le lecteur à vérifier la discussion de la Sect. 3.1 contient déjà une preuve du fait que $(\beta_A)_{A \in \mathbf{FinSet}}$ est une transformation naturelle $\mathrm{Id}_{\mathbf{FinSet}} \Rightarrow R \circ F$. C'est un isomorphisme car chaque composante β_A en est un (Lemme 3.3).*

Cet exemple est intéressant car il montre que l'équivalence peut réduire drastiquement la taille d'une catégorie : **FinSet** *n'est pas petite, tandis que $\mathbb{F}$ l'est. Une catégorie équivalente à une petite catégorie est dite* essentiellement petite.

Exemple 3.15 *Dans les paragraphes conclusifs de la Sect. 2.2, nous avons vu que, si* **T** *est une catégorie avec exactement une flèche entre toute paire d'objets (ce qui implique que chacune de ces flèches est un iso), alors l'unique foncteur $\mathbf{T} \to \mathbf{1}$ est plein et fidèle (Définition 2.13). Il s'agit en fait d'une équivalence de catégories, comme le lecteur pourra facilement vérifier. La catégorie* **T***, si elle n'est pas petite (elle pourrait ne pas l'être !), est un autre exemple de catégorie essentiellement petite, voire* essentiellement finie.

L'Exemple 3.15 nous offre la possibilité de faire deux remarques intéressantes :

— le foncteur $\mathbf{T} \to \mathbf{1}$ a autant de pseudo-inverses que d'objets de **T**. Cependant, on invite le lecteur à verifier qu'il sont tous isomorphes.

— Soit $F : \mathbf{1} \to \mathbf{T}$ l'un de ces pseudo-inverses. Dès que la cardinalité de la classe des objets de **T** dépasse 1 (c'est-à-dire, dès que **T** n'est pas isomorphe à **1**), F n'est pas surjectif sur les objets. Cependant, si l'on dénote par $*$ le seul objet de **1**, on a que tout objet de **T** est isomorphe à $F*$.

Ces deux remarques ne sont pas un hasard : elle réflètent deux propriétés vraies en toute généralité.

Lemme 3.16 (unicité des pseudo-inverses modulo iso) *Soit F une équivalence de catégories. Si G, G' sont deux pseudo-inverse de F, alors $G \cong G'$.*

Définition 3.17 *Un foncteur $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est dit* essentiellement surjectif *si, pour tout objet B de $\mathbf{B}$, il existe un objet A de $\mathbf{A}$ tel que $FA \cong B$.*

Théorème 3.18 (caractérisation des équivalences) *Un foncteur est une équivalence de catégories ssi il vérifie les trois propriétés suivantes :*
— *il est plein ;*
— *il est fidèle ;*
— *il est essentiellement surjectif.*

Preuve. Soit $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une équivalence, et soit $G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ son pseudo-inverse. Le fait que F est essentiellement surjectif est immédiat : pour B un objet de $\mathbf{B}$, on a toujours $F(GB) \cong B$.

Montrons que F est fidèle. Soient $f, g : A \to A'$ deux flèches parallèles de $\mathbf{A}$, et supposons que $Ff = Fg$. Nous avons donc $G(Ff) = G(Fg)$, ce qui implique $f = g$ car $G \circ F$ est fidèle, grâce à l'hypothèse $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ et au Lemme 3.4 (le foncteur identité étant trivialement fidèle).

Soit maintenant $g : FA \to FA'$. En prenant l'image de g par G, on obtient $Gg : G(FA) \to G(FA')$. Or, comme $G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, le Lemme 3.4 nous assure que $G \circ F$ est plein (l'identité étant trivialement pleine), ce qui implique l'existence de $f : A \to B$ telle que $G(Ff) = Gg$. Mais G est aussi une équivalence (la notion étant symétrique), et on vient de voir ci-dessus que les équivalences sont fidèles, donc $Ff = g$, ce qui montre que F est plein.

Démontrons l'implication réciproque. Supposons que $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ soit un foncteur satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. On va définir un preudo-inverse G de F :

— donné un objet B de $\mathbf{B}$, nous savons qu'il existe un objet A de $\mathbf{A}$ tel que $B \cong FA$. Nous choisissons un iso

$$\beta_B : B \to FA$$

et posons donc $GB := A$. On prend le soin ici de définir $G(FA) := A$, c'est-à-dire, si B est *égal* à l'image par F d'un objet A de $\mathbf{A}$, on prend exactement cet objet A.[8] En outre, nous choisissons dans cas β_B comme l'identité, c'est-à-dire, $\beta_{FA} := \mathrm{id}_{FA}$.

— Donnée une flèche $g : B \to B'$ de $\mathbf{B}$, on a une flèche

$$g' := \beta_{B'} \circ g \circ \beta_B^{-1} : F(GB) \to F(GB'),$$

où $\beta_{B'}$ et β_B sont les iso fixés ci-dessus. Par plénitude de F, il existe une flèche $f : GB \to GB'$ de $\mathbf{A}$ telle que $Ff = g'$. Nous posons donc $Gg := f$.

On observe immédiatement que $G \circ F = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$. En effet :

— sur les objets, on a posé par définition que $G(FA) = A$;

8. En général, il se peut qu'il existe $A' \neq A$ tel que $FA' \cong FA$, auquel cas on aurait pu prendre $G(FA) := A'$. Cela ne serait pas faux mais nous compliquerait la vie inutilement.

— sur les flèches, si $f : A \to A'$ est une flèche de $\mathbf{A}$, on a

$$F(G(Ff)) = \beta_{FA'} \circ Ff \circ \beta_{FA}^{-1} = Ff$$

car on a choisi des identités pour $\beta_{FA'}$ et β_{FA} ; or, F étant fidèle, cela implique $G(F(f)) = f$.

Pour ce qui concerne $F \circ G$, les isos β_B nous donnent les composantes d'une transformation naturelle

$$\beta : \mathrm{Id}_{\mathbf{B}} \Longrightarrow F \circ G.$$

La naturalité est immédiate : pour toute $g : B \to B'$ dans $\mathbf{B}$,

$$F(Gg) \circ \beta_B = \beta_{B'} \circ g \circ \beta_B^{-1} \circ \beta_B = \beta_{B'} \circ g.$$

Chaque composante étant un iso, β est un isomorphisme naturel. □

Corollaire 3.19 (préservation des équivalences par iso) *Soit F une équivalence et $G \cong F$. Alors, G est assi une équivalence.*

Preuve. Toutes les propriétés du Théorème 3.18 sont préservées par iso : pour la plénitude et la fidélité, nous avons le Lemme 3.4 ; si $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est essentiellement surjectif et B est un objet de $\mathbf{B}$, nous avons un objet A de $\mathbf{A}$ tel que $B \cong FA \cong GA$. □