

Empilements de Disques Triangulés

Thomas Fernique

28 septembre 2020

Comment disposer sur une table le plus possible de pièces sans qu'elles ne se chevauchent ? Si les pièces sont toutes identiques, on peut, par exemple, former une grille carrée (Fig. 1, à gauche). Environ 78% de la surface de la table sera alors recouverte. On peut en fait recouvrir plus de 90% de la table en formant une grille triangulaire (Fig. 1, au centre). Peut-on faire mieux ? Et qu'en est-il s'il y a différentes pièces (Fig. 1, à droite) ?



FIGURE 1 – Quelques façons de placer des pièces sur une table.

Sous ses dehors anecdotiques, cette question concerne en fait des domaines aussi variés que les codes correcteurs ou les sciences des matériaux et met en jeu des techniques typiques de l'informatique mathématique.

1 Empilements de disques

Formellement, un **empilement de disques** (en anglais **circle packing**) est un ensemble de disques du plan d'intérieurs disjoints. Sa **densité** δ est la proportion du plan recouverte par les disques, définie par

$$\delta := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{surface du carré } [-n, n]^2 \text{ recouverte par les disques}}{\text{surface du carré } [-n, n]^2}.$$

Avec des disques tous identiques, la densité maximale est effectivement celle de l'empilement représenté Fig. 1, au centre, appelé **empilement hexagonal compact**. Bien qu'intuitif, ce résultat n'a été formellement prouvé que dans les années 1940. Le lecteur intéressé trouvera dans [2] une preuve élémentaire qui repose sur la notion de *triangulation de Delaunay*.

Avec deux tailles de disques, la densité maximale devient une fonction du ratio r de ces tailles. Il a été démontré dans les années 1960 qu'au delà d'un ratio $r_0 \approx 0.74$, il est impossible de faire plus dense qu'avec des disques tous identiques. Ainsi, la meilleure façon de disposer des pièces de 1 et 2 euros (ratio $\frac{93}{103} \approx 0.9$) sur une table est de juxtaposer deux empilements hexagonaux compacts, un pour chaque type de pièce. Il est parfois possible de faire mieux pour des ratios plus petits, mais il existe alors seulement 9 ratios pour lesquels la densité maximale est connue [1]. Ces ratios "magiques" sont des nombres algébriques qui permettent des empilements bien particuliers, dits **triangulés** car leur **graphe de contact** (le graphe reliant les centres des disques adjacents) est une triangulation (Fig. 2).

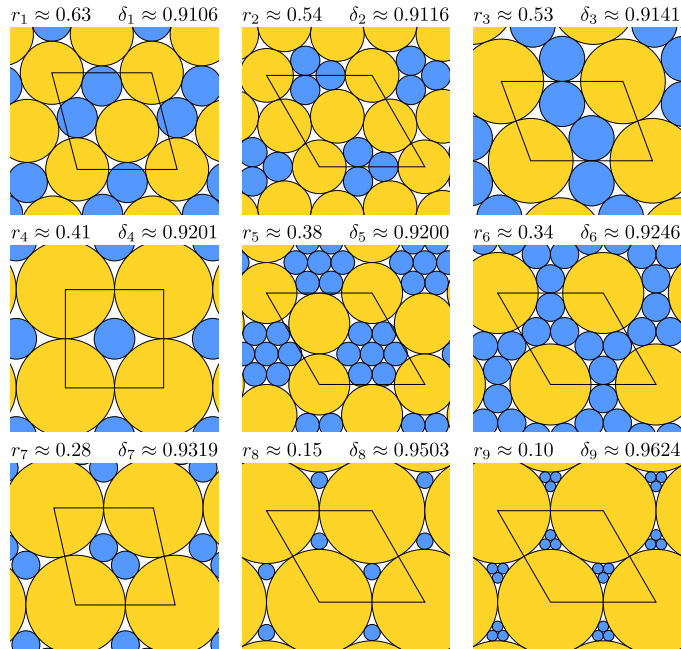


FIGURE 2 – Ratios pour lesquels la densité maximale est connue. Pour chacun, un empilement périodique (domaine fondamental en noir) qui atteint la densité maximale est représenté. Ces empilements sont tous triangulés.

2 Empilement binaires triangulés

Ainsi, tous les ratios pour lesquels on connaît la densité maximale permettent des empilements triangulés. Inversement, si un ratio permet des empilements triangulés¹, alors la densité se trouve être maximisée par un tel empilement. C'est en effet un corollaire du fait que les 9 ratios illustrés Fig. 2 sont les seuls qui permettent un empilement triangulé à deux disques [5]. La preuve de ce résultat repose sur deux points :

1. Dans un empilement triangulé, la **couronne** d'un disque est la suite des tailles des disques qui lui sont tangents, ordonnés cycliquement. Dans le premier des 9 cas représentés Fig. 2, par exemple, chaque petit disque est entouré par 4 grands et 1 petit, *i.e.*, a une couronne 1111r. Comme un petit disque est tangent à au plus 6 disques, deux tailles de disque permettent au plus 2^6 couronnes différentes. On peut en fait assez facilement se ramener à seulement 10 couronnes² : 11111, 1111r, 111rr, 11r1r, 11rrr, 1r1rr, 1111, 111r, 11rr et 111.
2. Considérons les triangles reliant le centre d'un petit disque aux centres de deux disques consécutifs de sa couronne : la somme de leurs angles en le centre du petit disque vaut 2π . Par exemple, toujours pour le premier des 9 cas représentés Fig. 2 :

$$3 \times \widehat{1r1} + 2 \times \widehat{1rr} = 2\pi,$$

où \widehat{ijk} représente l'angle en j dans le triangle reliant les centres de disques mutuellement tangents de rayons i , j et k . Prendre le cosinus de chaque membre permet, après quelques manipulations trigonométriques classiques, d'en déduire une équation algébrique sur r , soit dans l'exemple ci-dessus :

$$r^4 - 10r^2 - 8r + 9 = 0.$$

On peut donc calculer, pour chacune des 10 couronnes de petit disque possible, la valeur algébrique de r qu'elle impose, puis en déduire toutes les couronnes possibles et enfin chercher un empilement compatible avec ces couronnes. Tout ça se fait assez facilement. Le seul cas éliminé est la couronne 11111, qui caractérise un ratio ne permettant pas de former une couronne autour d'un grand disque. Les 9 cas restants sont ceux illustrés Fig. 2.

1. Autre que le cas dégénéré d'un empilement hexagonal compact, toujours possible en n'utilisant qu'une taille de disque.

2. La couronne rrrrrr, toujours possible, est éliminée car s'il n'y a qu'elle dans l'empilement, alors c'est l'empilement compact hexagonal.

3 Empilements ternaires triangulés

Que se passe-t-il si on ajoute maintenant des disques de rayon $s \in]0, r[$? Dans [4], on montre qu'il y a alors exactement 164 paires (r, s) qui permettent un empilement triangulé de disques de rayons s, r et 1 (chaque cas est illustré dans l'article). Le schéma de preuve est le même que quand il n'y a que deux disques, mais sa mise en pratique est bien plus complexe. En particulier, l'outil informatique (programmation python et calcul avec SageMath [6]) joue un rôle crucial. Rentrer dans les détails dépasserait largement le cadre de cet article. Soulignons seulement quelques points :

1. Comme il y a deux rayons inconnus, il faut maintenant deux couronnes pour les caractériser. Le nombre de paires de couronnes à considérer est très grand. Des astuces combinatoires et arithmétiques³ sont nécessaires pour éliminer un maximum de paires impossibles.
2. Les paires de couronnes restantes donnent des systèmes polynomiaux complexes (des polynômes de plusieurs milliers de termes ne sont pas rares). Beaucoup résistent aux techniques éprouvées de résolution comme les *bases de Gröbner*. Ici encore, il faut ruser pour éliminer.
3. Rien n'exclut *a priori* qu'un ensemble de couronnes puisse n'être compatible qu'avec des empilements aperiodiques, ce qui pourrait rendre indécidable le problème de l'existence d'un empilement compatible. Cela s'est avéré ne pas arriver avec seulement trois tailles de disques.

Reste alors la question de la densité. Est-ce que, comme avec deux disques, si un triplet de disques permet un empilement triangulé, alors la densité des empilements de disques de ces tailles est maximisé par un empilement triangulé? Quelques premiers cas encourageants ont été récemment traités...

4 Pour aller plus loin

Les mêmes questions se posent bien sûr pour $k \geq 4$ tailles de disques, ou bien pour des empilements de sphères en dimension $d \geq 3$ (les dimensions 3, 8 et 24 sont celles où l'on en sait le plus, du moins quand il n'y a qu'une seule taille de sphère [3]). Pourtant, ce qui m'intéresserait plus encore serait de faire un lien avec mes travaux sur les *pavages aperiodiques* en trouvant k tailles de disques telles que les empilements les plus denses soient nécessairement aperiodiques. Peut-être des empilements triangulés avec 4 tailles de disques?

3. L'arithmétique d'intervalles, notamment, très utile pour éliminer des couronnes à partir d'encadrements des valeurs des rayons.

Références

- [1] N. Bédaride and Th. Fernique, *Density of binary disc packings : the 9 compact packings*, preprint, 2020.
- [2] H.-Ch. Chang and L.-Ch. Wang, *A simple proof of Thue's theorem on circle packing*, preprint, 2010.
- [3] H. Cohn, *A Conceptual breakthrough in sphere packing*, Notices of the AMS, 2017.
- [4] Th. Fernique, A. Hashemi and O. Sizova, *Compact packings of the plane with three sizes of discs*, Discrete and Computational Geometry, 2020.
- [5] T. Kennedy, *Compact packings of the plane with two sizes of discs*, Discrete and Computational Geometry, 2006.
- [6] P. Zimmerman et al. *Calcul Mathématique avec Sage*. CreateSpace Independent Publishing Platform, 2013.