Inverser la fonction de Sylvester (étude élémentaire)

Si (A,B) sont deux matrices carrées appartenant à $\mathcal{M}_n(K) \times \mathcal{M}_p(K)$ on désignera par S(A,B) la fonction qui associe à toute matrice M de $\mathcal{M}_{(n,p)}$(K) la matrice C=AM-MB.

La fonction S(A,B) est un automorphisme de $\mathcal{M}_{(n,p)}$(K) si et seulement si les polynômes minimaux de A et B sont premiers entre eux; s'il est facile d'exprimer dans ce cas la matrice M en fonction de A,C et B, les choses ne sont pas aussi claires lorsque les polynômes minimaux de A et B ne sont pas premiers entre eux.

Face à l'abondance d'articles concernant les couples (A,B) à polynômes minimaux premiers entre eux, que nous désignerons comme « réguliers » on trouve peu de travaux relatifs au cas que nous qualifierons de « singuliers » et leur lourdeur laisse penser que le dernier mot n'est pas encore écrit.

Nous étudierons le problème dans le cas de matrices compagnons, déterminant une condition nécessaire et suffisante sur C pour que l'équation AX-XB=C possède des solutions et nous décrirons une expression qui associera à chaque valeur « admissible » de C une solution particulière de cette équation, ainsi que quelques autres questions relatives à cette solution.

Comme les rares autres articles relatifs au cas singulier nous devrons étudier le passage du cas (A,B) matrices compagnons au cas général.

Précisons que les outils employés sont élémentaires.