THÉORIE DES GRAPHES. — *Unicité de certains chemins dans des graphes fortement connexes.* Note (*) de M. **Guy Chaty**, présentée par M. André Lichnerowicz.

On démontre une nouvelle condition nécessaire et suffisante, portant sur le cheminement, pour qu'un graphe fortement connexe soit fortement connexe c-minimal. Les propriétés de c-minimalité et d'hyper-c-minimalité (notion introduite ici) peuvent alors se traduire en utilisant, soit la notion d'arbre de circulation, soit le nombre de circuits élémentaires, soit cette propriété de cheminement. On utilise une opération qui, définie dans l'ensemble des p-graphes, n'affecte pas essentiellement la structure des circuits du graphe auquel elle est appliquée, tout en le « simplifiant » éventuellement.

1. Introduction et rappels. — Les graphes considérés ici sont des p-graphes ([1]).

Un *transmetteur* d'un graphe G est un sommet x tel que $d_G^+(x) = d_G^-(x) = 1$, aucune boucle n'existant en x. On le notera ici (y, x, z).

Dans un graphe $G = (X, U)$ une famille d'arcs $V \subset U$ est dite supprimable si et seulement si le graphe partiel $G_V = (X, U - V)$ de G a même fermeture transitive que G. Un graphe est dit μ-minimal s'il n'a pas d'arc supprimable.

Théorème 1. — *Un graphe fortement connexe μ-minimal est sans boucle et a au moins deux transmetteurs* ([1]).

Le nombre de circuits élémentaires d'un graphe G est noté $\xi(G)$. Le nombre cyclomatique, $\nu(G)$.

Soit $G = (X, U)$ tel que $\xi(G) > 0$. Un ensemble d'arcs $V \subset U$ tel que $\xi(G_V) = 0$ et $|V|$ est minimal sera noté $\Delta_m(G)$ et sa cardinalité $\delta(G)$.

Définition. — *Un graphe fortement connexe c-minimal (f. c. c. m.) est un graphe fortement connexe tel que* $\xi(G) = \nu(G)$ ([2]).

Théorème 2. — *Un graphe fortement connexe* G *est f. c. c. m. si et seulement si il possède un arbre de circulation* (arbre maximal H de G tel que tout cycle élémentaire associé à H est un circuit) ([3]).

On peut montrer :

Proposition 1. — *Soit* G *un graphe f. c. c. m. et* H *un arbre de circulation de* G. *Par tout arc du coarbre* $\overline{H}$ *associé à* H, *passe un circuit élémentaire et un seul de* G *et tout circuit élémentaire de* G *contient un arc et un seul de* $\overline{H}$.

Nous dirons qu'un graphe G possède la *propriété* (p) si et seulement si il est fortement connexe et tel que, pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets de G appartenant à un même circuit élémentaire de G, il existe dans G un chemin élémentaire unique $[x, y]$ ou un chemin élémentaire unique $[y, x]$.

2. Opération ψ. — Étant donné un graphe G, l'opération ψ permet de déduire de G un graphe sans boucle ni transmetteur. ψ est définie par les transformations itérées suivantes :

(*a*) toute boucle est supprimée;

(*b*) si x est un transmetteur (y, x, z), on remplace le chemin $[y, x, z]$ par l'arc (y, z). Si $y = z$, l'arc (y, z) obtenu étant une boucle sera supprimé.

On poursuit ces transformations jusqu'à ce qu'on obtienne un graphe G′ sans boucle ni transmetteur. G′ sera noté $\psi(G)$.

On peut montrer que pour tout graphe G, $G' = \psi(G)$ est unique et :

Proposition 2. — *Soit deux sommets x et y qui sont dans* G *et dans* G′. *Il existe une application bijective des chemins élémentaires $[x, y]_{G'}$ de* G′ *sur l'ensemble des chemins élémentaires $[x, y]_G$ de* G *et tout $[x, y]_{G'}$ passe par les arcs de $[x, y]_G$ qui sont dans* G′.

On en déduit que $\psi(G)$ est fortement connexe si et seulement si G est fortement connexe.

On peut montrer :

Proposition 3. — *Pour tout graphe* G, *si* $G' = \psi(G)$, *alors :*

$$\xi(G) - \xi(G') = \nu(G) - \nu(G') = \delta(G) - \delta(G').$$

Remarque. — On peut montrer que la recherche d'un ensemble $\Delta_m(G)$ se ramène aisément à celle d'un ensemble $\Delta_m(G')$.

De la proposition 3, on déduit :

Proposition 4. — $\psi(G)$ *est un graphe f. c. c. m. si et seulement si* G *est un graphe f. c. c. m.*

3. Condition nécessaire et suffisante de *c*-minimalité.

Théorème 3. — *Un graphe* G *est f. c. c. m. si et seulement si il possède la propriété* (*p*).

Démonstration. — 1° Supposons que G soit f. c. c. m. Soit H un arbre de circulation de G. Considérons deux sommets x et y de G appartenant à un même circuit élémentaire c. Appelons $[x, y]_1$ et $[y, x]_1$ les chemins élémentaires formant ce circuit. Supposons qu'il existe un deuxième chemin élémentaire $[y, x]$, soit $[y, x]_2$, distinct de $[y, x]_1$. Soit $t_1 = y$, $t_2, \ldots, t_p$ la suite des sommets communs à $[y, x]_2$ et à c, et telle que l'un au moins des chemins élémentaires $[t_{i-1}, t_i]$ ou $[t_i, t_{i+1}]$ contenus dans $[y, x]_2$ ne soit pas dans c ($i < j$ si et seulement si t_j est un descendant de t_i dans le sous-graphe de G constitué par $[y, x]_2$). Puisque $[y, x]_2$ est élémentaire et distinct de $[y, x]_1$, il existe sur $[y, x]_1$ un sommet t_q, distinct de y et tel que le chemin élémentaire $[t_{q-1}, t_q]$ contenu dans $[y, x]_2$ n'est pas dans c (t_q peut être x). Ce chemin $[t_{q-1}, t_q]$ détermine avec c un circuit élémentaire et, en vertu de la proposition 1, l'arc du coarbre $\overline{H}$, correspondant à ce

circuit, est nécessairement sur ce chemin $[t_{q-1}, t_q]$. Si t_{q-1} est sur $[y, x]_1$, l'arc du coarbre $\overline{H}$, correspondant à c, est nécessairement sur le chemin élémentaire $[t_{q-1}, t_q]$ contenu dans $[y, x]_1$. Si t_{q-1} n'est pas sur $[y, x]_1$, $t_{q-1} \neq y$; pour chaque t_i $(1 < i < q-1)$, l'un des chemins élémentaires $[t_{i-1}, t_i]$ ou $[t_i, t_{i+1}]$ contenus dans $[y, x]_2$ contient un arc du coarbre $\overline{H}$, donc l'arc du coarbre $\overline{H}$, correspondant à c, ne peut être dans $[t_{q-1}, y]$ contenu dans c. Finalement, il y a un arc du coarbre $\overline{H}$ sur $[y, x]_1$.

S'il existe un deuxième chemin élémentaire $[x, y]$ distinct de $[x, y]_1$, soit $[x, y]_2$, on peut faire le même raisonnement et montrer qu'alors il y a un arc du coarbre $\overline{H}$ sur $[x, y]_1$. Ce qui est impossible en vertu de la proposition 1.

Donc G possède la propriété (p).

2° Supposons qu'un graphe G possède la propriété (p).

a. Si G a un arc supprimable $u = (x, y)$, G_u possède la propriété (p).

D'autre part, par u passe un seul circuit élémentaire. En effet, puisque u est supprimable, il existe dans G un chemin élémentaire $[x, y]$ qui ne passe pas par u. Si par u, passaient plusieurs circuits élémentaires, il existerait plusieurs chemins $[y, x]$ et G ne vérifierait pas (p).

Donc $\xi(G) = \xi(G_u) + 1$ et comme $\nu(G) = \nu(G_u) + 1$, G est f. c. c. m. si et seulement si G_u est f. c. c. m.

b. Si G n'a pas d'arc supprimable, considérons $G' = \psi(G)$. Puisque G' n'a ni transmetteur ni boucle, il a au moins un arc supprimable (théor. 1). D'autre part, G' possède la propriété (p) (prop. 2). Enfin, G' est f. c. c. m. si et seulement si G est f. c. c. m. (prop. 4).

En effectuant successivement et alternativement les opérations ψ et de suppression d'arcs (tant que la forte connexité du graphe considéré est conservée), on obtient une suite de graphes G_i qui possèdent la propriété (p) et tels que le graphe G_i est f. c. c. m. si et seulement si le graphe G_{i+1} l'est. On aboutit finalement à un graphe constitué par un sommet unique. Donc G est f. c. c. m.

Remarque. — Si un graphe G est fortement connexe et tel que pour toute paire $\{x, y\}$ de sommets appartenant à un circuit élémentaire de G, il existe dans G un chemin élémentaire unique $[x, y]$ *et* un chemin élémentaire unique $[y, x]$ (propriété (p')), par tout arc de G passe un seul circuit élémentaire. G est alors un graphe f. c. c. m. constitué par un ensemble de circuits élémentaires ayant deux à deux un sommet commun au plus, aucun cycle élémentaire n'existant dans G autre que ces circuits.

Réciproquement, un tel graphe possède la propriété (p').

4. Hyper-*c*-minimalité.

Définition. — *Un graphe fortement connexe est dit fortement connexe hyper-c-minimal (f. c. h. c. m.) s'il admet un graphe partiel f. c. c. m.*

On montre aisément qu'un graphe fortement connexe est f. c. h. c. m. si et seulement si il a une famille supprimable V telle que

$$\xi(G) - \nu(G) = \rho_G(V) - |V|,$$

[$\rho_G(V)$ étant le nombre de circuits élémentaires de G qui passent par au moins un arc de V].

On peut montrer :

PROPOSITION 5. — *Un graphe fortement connexe* G *est f. c. h. c. m. si il admet une famille supprimable* V *telle que le graphe* G′ *déduit de* G *en inversant les arcs de* V *est f. c. c. m.*

Cette proposition 5 se démontre en utilisant la notion d'arbre de circulation mais peut se traduire en termes de cheminement grâce au théorème 3.

(*) Séance du 8 mars 1971.

(1) C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

(2) G. CHATY, *Comptes rendus*, 266, série A, 1968, p. 907.

(3) G. CHATY, *Graphes fortement connexes c-minimaux et graphes sans circuit co-minimaux* (*Journal of Combinatorial Theory*, à paraître).

(*Structures de l'Information,*
Institut Henri Poincaré,
11, *rue Pierre-et-Marie-Curie,*
75-*Paris*, 5e.)