CALCUL FORMEL POUR LA COMBINATOIRE

SÉANCE DE TP

1. Mots contraints

Cet exercice propose de traiter automatiquement le problème suivant posé par Richard Stanley dans le numéro de décembre 2011 de l'*American Mathematical Monthly* :

> *Let $f(n)$ be the number of binary words $a_1 \cdots a_n$ of length n that have the same number of pairs $a_i a_{i+1}$ equal to 00 as equal to 01. Show that*
> $$\sum_{n=0}^{\infty} f(n)t^n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t} + \frac{1+2t}{\sqrt{(1-t)(1-2t)(1+t+2t^2)}}\right).$$

(1) Écrire un système d'équations combinatoires utilisant Union,Prod pour définir l'ensemble des mots sur l'alphabet $\{$`one,zero,ZZ,ZO`$\}$ obtenus à partir de tous les mots sur $\{$`one,zero`$\}$ en intercalant la lettre `ZZ` entre les `zero,zero` et la lettre `ZO` entre les `zero,one`. [Pas de calcul formel ici, c'est de la combinatoire. On pourra introduire deux sous-langages pour les mots commençant par un `zero` et par un `one`.]

(2) En déduire la série génératrice $S(t,u,v)$ dont le coefficient de $u^k v^\ell t^n$ est le nombre de mots de n lettres sur $\{0,1\}$ avec k occurrences de 00 et ℓ occurrences de 01. [`combstruct[gfsolve]`]

La série qui nous intéresse est donc le résidu en 0 $F(t) = [u^{-1}]S(t,u,1/u)/u$.

(3) Calculer F en l'exprimant comme la racine d'un résultant [`resultant`].

2. Marches dans le quart de plan

2.1. **Introduction.** On s'intéresse au dénombrement de certaines marches confinées au quart de plan $\mathbb{N}^2$. On se restreint ici aux marches partant de l'origine et n'utilisant que des pas de longueur un d'un ensemble fixé $\mathfrak{S} \subseteq \{\swarrow, \leftarrow, \nwarrow, \uparrow, \nearrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow\}$. Une telle marche sera appelée $\mathfrak{S}$-*marche*. On note $f_{\mathfrak{S}}(n;i,j)$ le nombre des $\mathfrak{S}$-marches finissant en (i,j) et utilisant exactement n pas, et $F_{\mathfrak{S}}(t;x,y)$ la série génératrice

$$F_{\mathfrak{S}}(t;x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\sum_{i,j=0}^{\infty} f_{\mathfrak{S}}(n;i,j)x^i y^j\Big)t^n. \tag{1}$$

Pour toute valeur de n, la somme portant sur i et j dans (1) est un polynôme en x et y, car $f_{\mathfrak{S}}(n;i,j) = 0$ pour $i > n$ ou $j > n$. Par conséquent, $F_{\mathfrak{S}}(t;x,y)$ appartient à $\mathbb{Q}[x,y][[t]]$. Le but du problème est de conjecturer, puis de prouver, certaines propriétés de $F_{\mathfrak{S}}(t;x,y)$ à l'aide d'outils de calcul formel.

(1) Écrire une procédure prenant en entrée un ensemble de pas $\mathfrak{S}$ et des valeurs $n,i,j \in \mathbb{N}$, et renvoyant $f_{\mathfrak{S}}(n;i,j)$. [Utiliser l'option `remember` pour mémoriser les étapes précédentes.]

Dans la suite, nous considérerons trois cas particuliers de marches : la *marche de Kreweras* pour laquelle $\mathfrak{S} = \{\downarrow, \leftarrow, \nearrow\}$, la *marche de Gessel* pour laquelle $\mathfrak{S} = \{\nearrow, \swarrow, \leftarrow, \rightarrow\}$, et la *marche du roi* pour laquelle $\mathfrak{S} = \{\swarrow, \leftarrow, \nwarrow, \uparrow, \nearrow, \rightarrow, \searrow, \downarrow\}$. Pour simplifier la notation, on écrira dans ces cas $k(n;i,j)$, $g(n;i,j)$, resp. $r(n;i,j)$ pour la suite $f_{\mathfrak{S}}(n;i,j)$, et $K(t;x,y)$, $G(t;x,y)$, resp. $R(t;x,y)$ pour la série $F_{\mathfrak{S}}(t;x,y)$.
On appelle $\mathfrak{S}$-*excursion* une $\mathfrak{S}$-marche retournant à l'origine. Une telle excursion est représentée en Figure 1.

(2) Écrire une procédure prenant en entrée un ensemble de pas $\mathfrak{S}$ et une valeur n, et renvoyant le nombre de $\mathfrak{S}$-excursions $f_{\mathfrak{S}}(n;0,0)$ de longueur n.

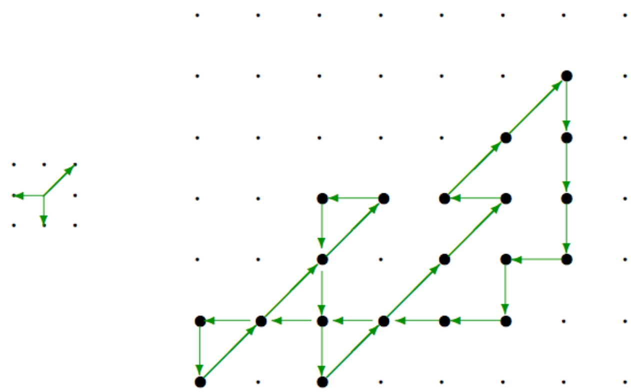

FIGURE 1. Une excursion de Kreweras, de longueur 24.

2.2. Conjectures sur les excursions de Kreweras. Dans cette section, on suppose $\mathfrak{S} = \{\downarrow, \leftarrow, \nearrow\}$.

(3) Calculer le nombre d'excursions $k(n; 0, 0)$ pour $0 \leq n \leq 50$. Pour vérification, vous devez obtenir : $k(0) = 1$, $k(9; 0, 0) = 192$, $k(21; 0, 0) = 15876096$.

Il est facile à prouver que $k(m; 0, 0) = 0$ si m n'est pas un multiple de 3. C'est pourquoi dans la suite on se concentre sur la sous-suite $(k(3n; 0, 0))_{n\geq 0}$ et sa série génératrice $A(t) = K(\sqrt[3]{t}; 0, 0) = \sum_{n\geq 0} k(3n; 0, 0)t^n$.

(4) Conjecturer une récurrence vérifiée par la suite $(k(3n; 0, 0))_{n\geq 0}$ à partir des 15 premiers termes de cette suite. [`gfun[listtorec]`]

(5) Conjecturer une formule explicite pour $k(3n; 0, 0)$; en déduire une formule asymptotique conjecturale de la forme
$$k(3n; 0, 0) = Cn^\alpha \rho^n (1 + a/n + b/n^2 + \dots), \qquad n \to \infty.$$
[Indication : `rsolve, asympt`]

(6) Utiliser la récurrence devinée en (4) pour conjecturer une équation différentielle satisfaite par $A(t)$. [`gfun[rectodiffeq]`]

(7) Résoudre l'équation différentielle trouvée en (6) en termes de fonctions hypergéométriques de Gauss. On ne demande pas une formule explicite, que Maple a du mal à trouver. [`dsolve, convert`]

(8) Regarder le reste de la division de ∂^p par l'opérateur différentiel associé, pour tous les nombres premiers $5 \leq p < 40$. Quelle conjecture est-il raisonnable de formuler sur la nature de $A(t)$?
[`DEtools[de2diffop],DEtools[rightdivision]`]

(9) À partir des valeurs $k(3n; 0, 0)$ pour $n = 0, \dots, 15$, deviner un polynôme dont $A(t)$ est racine. [`gfun[listtoalgeq]`]

(10) Résoudre ce polynôme, en exhibant une formule par radicaux pour son unique solution $B(t) \in \mathbb{Q}[[t]]$ telle que $B(0) = 1$. [`solve,series`]

(11) Écrire une procédure prenant un entier positif N en argument et renvoyant les N premiers termes du développement en série à l'origine de $B(t)$ à l'aide d'une itération de Newton. Vérifier qu'ils coïncident avec ceux de $A(t)$ pour $N = 50$. [1]

(12) Calculer une équation implicite $\Gamma(T, t) = 0$ de la courbe paramétrée
$$\begin{cases} t = (u + 2)/u^3, \\ T = -u(u + 6)/8. \end{cases}$$
Quel rapport y a-t-il entre Γ et le polynôme de la question (9) ? [`resultant`]

1. Question à sauter dans un premier temps.

2.3. **Conjectures sur les excursions de Gessel, et sur les excursions royales** [2]**.**

(13) Conjecturer une récurrence, puis une forme explicite pour $g(n; 0, 0)$.

(14) Conjecturer une équation différentielle pour $G(t; 0, 0)$, la résoudre et examiner ses p-courbures. Est-il plausible que $G(t; 0, 0)$ soit algébrique ?

(15) Mêmes questions pour $r(n; 0, 0)$ et pour $R(t; 0, 0)$. Est-il plausible que $R(t; 0, 0)$ soit algébrique ?

2.4. **Conjectures sur les marches de Kreweras arbitraires.** Pour aller plus loin, on part de l'observation que la récurrence satisfaite par la suite $k(n; i, j)$, se traduit en termes de séries génératrices par le fait que $K(t; x, y)$ vérifie l'équation

$$\text{(N)}\qquad \begin{aligned} N(t;x,y)K(t;x,y) &= xy - xtK(t;x,0) - ytK(t;0,y), \\ \text{avec}\ \ N(t;x,y) &= xy - t(x+y+x^2y^2). \end{aligned}$$

L'égalité (N) s'appelle *l'équation du noyau* ; la fonction $N(t; x, y)$ est son *noyau.*

(16) Écrire trois procédures, permettant le calcul des séries tronquées :

$$K(t;x,y) \bmod t^n, \quad K(t;x,0) \bmod t^n, \quad K(t;0,y) \bmod t^n.$$

Pour vérification, le début de la série $K(t; x, 0)$ est

$$1 + xt^2 + 2t^3 + 2x^2t^4 + 8xt^5 + (16+5x^3)t^6 + 30x^2t^7 + (96x+14x^4)t^8 + (192+112x^3)t^9 + O(t^{10}).$$

La symétrie de $\{\downarrow, \leftarrow, \nearrow\}$ par rapport à la diagonale $\{(i,i) \,|\, i \in \mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}^2$ entraîne $k(n; i, j) = k(n; j, i)$ pour $(n, i, j) \in \mathbb{N}^3$; en termes de séries génératrices, cela se traduit par l'égalité $K(t; x, y) = K(t; y, x)$.

(17) À partir des 80 premiers termes de la série $K(t; x, 0)$, deviner un polynôme $P_{x0}(T, t, x)$ qui l'annule [3].

(18) Vérifier que $P_{x0}(T, t, 0)$ coïncide, à normalisation près, avec le polynôme deviné en question (9) et annulant conjecturalement la série génératrice des excursions de Kreweras.

(19) Expliquer pourquoi il est raisonnable de conjecturer à ce stade que la fonction $K(t; x, y)$ est algébrique, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[T, t, x, y]$ tel que $P(K(t; x, y), t, x, y) = 0$.

Cependant, pour des questions de taille, nous n'allons pas calculer explicitement ce polynôme P. C'est pourquoi, dans la section suivante, nous allons nous servir uniquement du polynôme candidat P_{x0} afin de *prouver* que $K(t; x, y)$ est en effet algébrique.

2.5. **Preuve des conjectures sur les marches de Kreweras.** Soit

$$y_0(t,x) = t + \frac{1}{x}t^2 + \frac{1+x^3}{x^2}t^3 + \frac{1+3x^3}{x^3}t^4 + O(t^5)$$

l'unique racine dans $\mathbb{Q}[x, x^{-1}][[t]]$ du polynôme $N(t; x, y)$. En remplaçant $y = y_0$ dans l'équation du noyau (N) (cela fait sens, car la valuation de y_0 est strictement positive !) on obtient l'égalité suivante dans $\mathbb{Q}[x, x^{-1}][[t]]$:

$$0 = xy_0 - xtK(t;x,0) - y_0tK(t;0,y_0).$$

Cette égalité et la symétrie de $K(t; x, y)$ en (x, y) impliquent que l'équation fonctionnelle

$$\text{(M)}\qquad U(t,x) = \frac{y_0}{t} - \frac{y_0}{x}\,U(t,y_0).$$

admet la solution $U(t, x) = K(t; x, 0)$ dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$.

(20) Prouver que l'équation (M) admet exactement une solution dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$, à savoir $U(t, x) = K(t; x, 0)$.

(21) Montrer que le polynôme P_{x0} deviné en Section 2.4 admet au plus une racine dans $\mathbb{Q}[[x, t]]$.

2. Section à sauter dans un premier temps.

3. Pour cette question, il faut une version récente de `gfun`, à télécharger à l'url http://algo.inria.fr/libraries/papers/gfun.html.

L'existence d'une racine $H(t,x)$ dans $\mathbb{Q}[[x,t]]$ est plus délicate à prouver. Nous reportons cette preuve en section 2.6.

(22) Prouver que cette racine $H(t,x)$ vérifie l'équation (M) à l'aide d'un résultant.

(23) Conclure la preuve de l'algébricité de $K(t;x,y)$.

(24) Prouver la forme explicite trouvée en question (5).

2.6. **Compléments.**

2.6.1. *Preuve de l'existence d'une racine série de P_{x0}.*

(25) Montrer que les fractions rationnelles $R_1(u,x)$ et $R_2(u,x)$ définies par :

$$R_1(u,x) = \frac{u(1+u)(1+2u+u^2+u^2x)^2}{h(u,x)},$$

$$R_2(u,x) = \frac{(u^4x^2+2u^2(u+1)^2x+1+4u+6u^2+2u^3-u^4)h(u,x)}{(1+u)^2(1+2u+u^2+u^2x)^4},$$

avec

$$h(u,x) = u^6x^3+3u^4(u+1)^2x^2+3u^2(u+1)^4x+1+6u+15u^2+24u^3+27u^4+18u^5+5u^6,$$

vérifient les propriétés :

(*i*) $P_{x0}(R_2(u,x),R_1(u,x),x) = 0$;

(*ii*) il existe une unique série formelle

$$u_0(t,x) = t+t^2+(x+1)t^3+(2x+5)t^4+(2x^2+3x+9)t^5+\dots$$

dans $\mathbb{Q}[[x,t]]$ telle que $R_1(u_0,x) = t$ et $u_0(0,x) = 0$.

(26) En déduire que $H(t,x) := R_2(u_0(t,x),x)$ est l'unique racine dans $\mathbb{Q}[[x,t]]$ de P_{x0}.

2.6.2. *D'autres formes closes.*

(27) Exprimer par radicaux la série $K(t;1,1)$.

(28) Conjecturer puis prouver une forme close pour $k(n;0,1)$.