Algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées

Bérénice Delcroix-Oger

Institut de Mathématiques de Toulouse

Séminaire de l'équipe CALIN, 15 Mars 2016

Sommaire

Sommaire

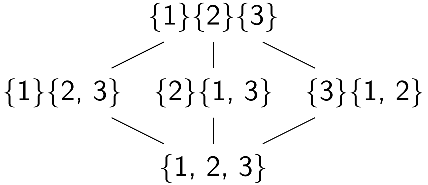
Sommaire

Quelques rapides rappels !

- poset = partially ordered set

Quelques rapides rappels !

- poset = partially ordered set



-

Qu'est-ce qu'une partition ?

Définition

Une partition d'un ensemble I est un ensemble de parties non vides de I deux à deux disjointes et qui recouvrent I.

Ensemble des partitions de $\{1, 2, 3, 4\}$

$$\{1, 2,3, 4\}$$
$$\{1\}\{2, 3, 4\}, \{2\}\{1, 3, 4\},\{3\}\{1, 2, 4\}, \{4\}\{1, 2, 3\}$$
$$\{1, 2\}\{3, 4\}, \{1, 3\}\{2, 4\}, \{1, 4\}\{2, 3\}$$
$$\{1, 2\}\{3\}\{4\}, \{1, 3\}\{2\}\{4\}, \{1, 4\}\{2\}\{3\},$$
$$\{2, 3\}\{1\}\{4\}, \{2, 4\}\{1\}\{3\}, \{3, 4\}\{1\}\{2\}$$
$$\{1\}\{2\}\{3\}\{4\}$$

Un ordre partiel sur les partitions

Soit n, un entier naturel,

Définition

Le poset des partitions sur n éléments Π_n est le poset dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des partitions de n muni de l'ordre partiel suivant : $p_1 \leq p_2 \iff$ toute part de p_1 est union de parts de p_2

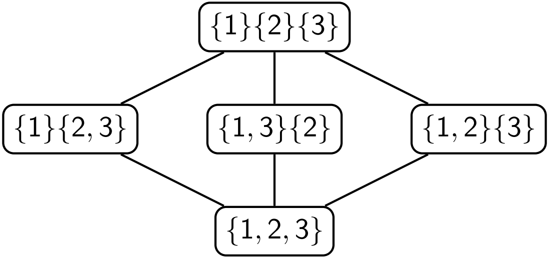
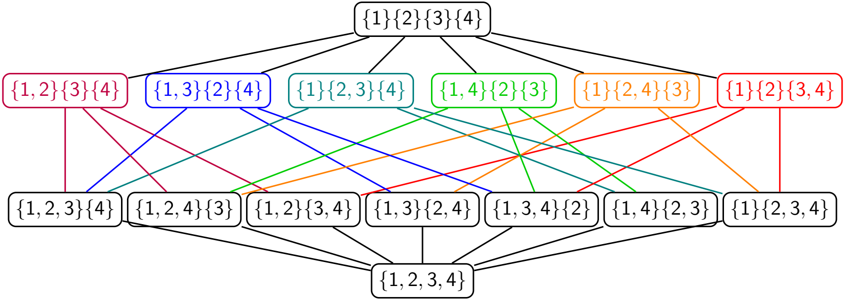


Figure: Le poset Π_3

Poset des partitions Π_4



Construction de l'algèbre de Hopf d'incidence associé à une famille d'intervalles [Rota, 79 ; Schmitt, 87]

Considérons une famille $\mathcal{P}$ d'intervalles (posets bornés)

- close par intervalles ($\forall P \in \mathcal{P}, x \leq y \in P, [x, y] \in \mathcal{P}$)
- close par produit direct

Alors, le $\mathbb{C}$-ev $C(\mathcal{P})$ muni du produit direct de posets, (d'un antipode) et du coproduit suivant :

$$\Delta[P] = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

est une algèbre de Hopf appelée *algèbre de Hopf d'incidence*.

Exemple (cf. [Schmitt,87])

$\mathcal{P}$, la famille des produits directs de posets de partitions vérifie les hypothèses requises. Le coproduit est alors donné par :

$$\Delta\left(\frac{\Pi_n}{n!}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Pi_k}{k!} \otimes \sum_{\substack{(j_1,\dots,j_n)\in\mathbb{N} \\ \sum_{i=1}^n j_i = k, \sum_{i=1}^n i j_i = n}} \binom{k}{j_1,\dots,j_n} \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\Pi_i}{i!}\right)^{j_i}.$$

$$\Delta\left(\Pi_n\right) = \sum_{k=1}^{n} \Pi_k \otimes B_{n,k}(\Pi_1, \Pi_2, \dots).$$

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions : la bigèbre de Faà di Bruno [Joni, Rota, 1982]

Proposition (Rota, Joni, 79 ; Schmitt, 87)

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions est isomorphe à la structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a_k)_{k\geq 1}$ donnée par la composition de séries formelles de la forme suivante :

$$F = \sum_{k\geq 1} a_k \frac{x^k}{k!}, avec a_1 = 1.$$

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" (●) et un ensemble de "non pointable" (●) vérifiant :

Partitions semi-pointées

Définition

Une partition semi-pointée est une partition sur un ensemble de "pointable" ($\bullet$) et un ensemble de "non pointable" ($\bullet$) vérifiant :

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow \quad \blacksquare$ *(pointée en un pointable)*

$\{\bullet\ \bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow \quad \blacksquare$ *(pointée en un pointable)* ou $\blacksquare$ *(non pointée)*

$\{\bullet\ \bullet\} \quad \rightarrow \quad \blacksquare$ *(non pointée)*

Partitions semi-pointées

$$1,\ 2,\ 3 \qquad\qquad 1,\ 2,\ 3,\ 4 \qquad\qquad 1,\ 2$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\{\dot{1},2,3\} \qquad \{\dot{1},2,3,4\} \qquad \{1,2\}$$

$$\{1,\dot{2},3\} \qquad \{1,\dot{2},3,4\} \qquad \{1\}\ \{2\}$$

$$\{1,2,\dot{3}\} \qquad \{1,2,3,4\}$$

$$\{\dot{1},2\}\{\dot{3}\} \qquad \{1,\dot{2}\}\{3,4\}$$

$$\{\dot{1}\}\{\dot{2},3\} \qquad \{\dot{2},4\}\{\dot{1},3\}$$

$$\{\dot{1}\}\{\dot{2}\}\{\dot{3}\} \qquad \{2,4\}\ \{1,3\}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition (BDO, 2015)

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ *et un ensemble de "non pointable" de taille* p *est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :*

$$p_1 \leq p_2 \Longleftrightarrow \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

Un ordre sur les partitions semi-pointées

Définition (BDO, 2015)

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ et un ensemble de "non pointable" de taille p est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :

$$p_1 \leq p_2 \iff \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

Et si

Un ordre sur les partitions semi-pointées

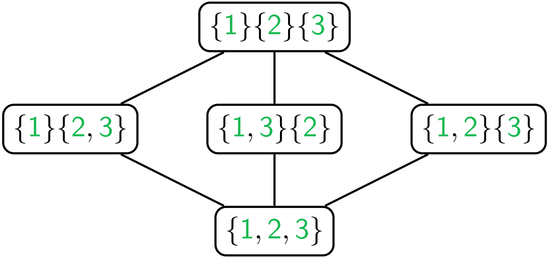
Définition (BDO, 2015)

Le poset des partitions semi-pointées sur un ensemble de "pointable" de taille ℓ *et un ensemble de "non pointable" de taille* p *est l'ensemble des partitions semi-pointées sur ces deux ensembles, muni de l'ordre partiel suivant :*

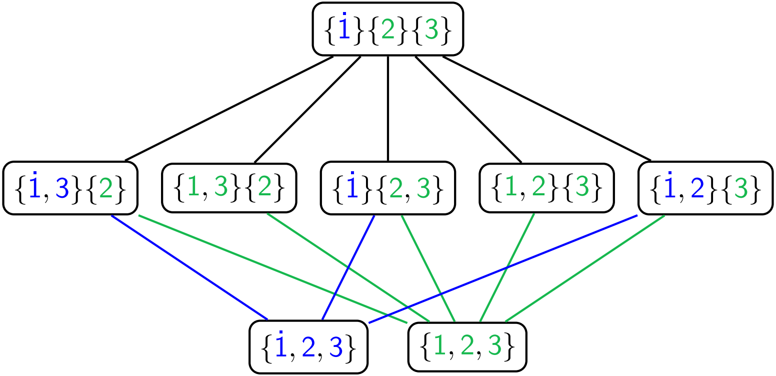
$$p_1 \leq p_2 \iff \text{toute part de } p_1 \text{ est union de parts de } p_2$$

Et si une part de p_1 *est pointée en un élément* x *seulement si l'élément* x *était pointé dans une part de* p_2.

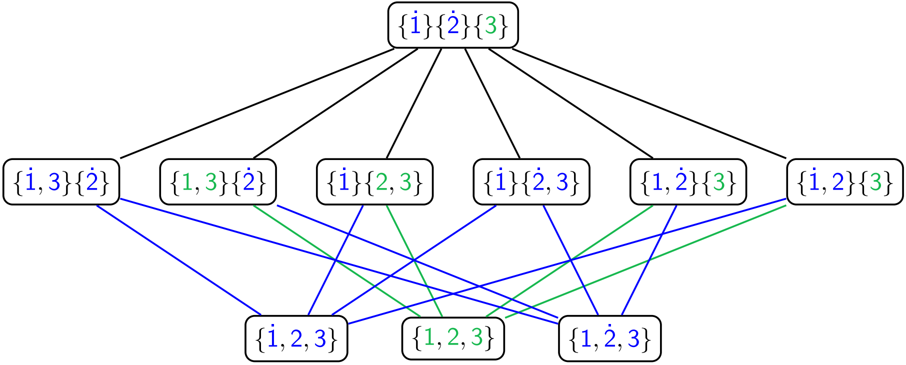
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_3 = \Pi_{3,0}$



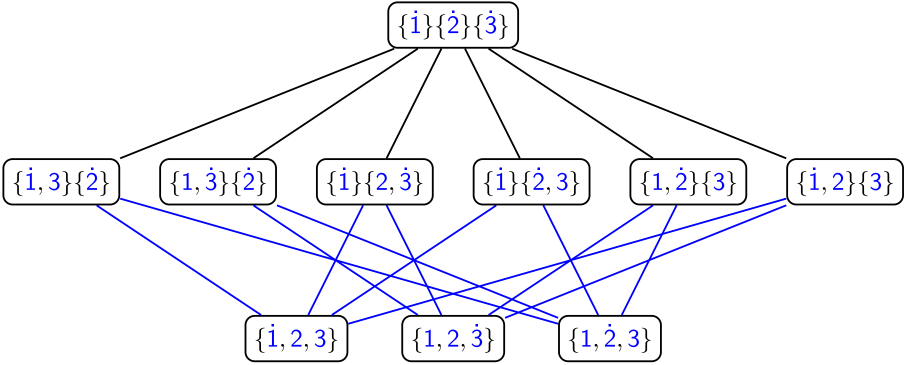
Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,1}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,2}$



Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,3}$



L'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées

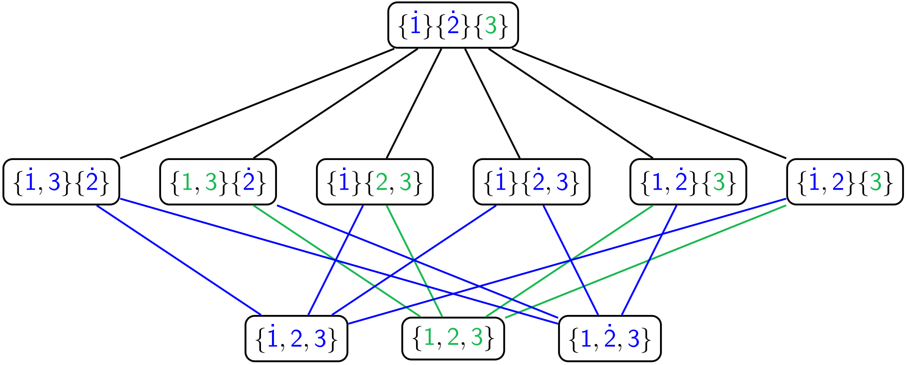
Considérons la famille $\mathcal{P}$ des produits directs d'intervalles maximaux dans les posets de partitions pointés, $\pi^1_{n,p}$ et $\pi^0_{n,p}$.

Proposition (BDO, 2015)

Soit $p \in \pi^o_{n,p}$.
$[m^o_{n,p}; p] \sim \pi^o_{j,l}$, où j (resp. l) est le nombre de parts (resp. de parts pointées) de p.
$[p; \pi_{n,p}] \sim \prod \pi^1_{n_j,p_j} \times \prod \pi^0_{n_j,p_j}$ avec un facteur pour chaque part de p à n_j éléments et p_j éléments pointés (et le pointage correspondant).

$\rightarrow$ Famille héréditaire (close par intervalles et par produit direct)

Poset des partitions semi-pointées $\Pi_{3,2}$



Calcul du coproduit

$$\Delta[P] = \sum_{x \in P} [0_P, x] \otimes [x, 1_P]$$

$$\Delta(\pi^o_{n,p}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\substack{n_1,\dots,n_j \geq 1, \\ \sum_{i=1}^j n_i = n}} \sum_{\substack{p_1,\dots,p_j \geq 0 \\ \sum_{i=1}^j p_i = p}} \sum_{\substack{o_1,\dots,o_j \in \{0;1\} \\ o_i \leq p_i, \\ o \leq \sum_{i=1}^j o_i \leq j-1+o}} c^{\mathbf{o}}_{\mathbf{n},\mathbf{p}} \pi^o_{j, \sum_{i=1}^j o_i} \otimes \prod_{i=1}^{j} \pi^{o_i}_{n_i,p_i}$$

où $c^{\mathbf{o}}_{\mathbf{n},\mathbf{p}}$ est le nombre de partitions à j parts, de taille $n_1, \dots, n_j$, avec $p_1, \dots, p_j$ éléments dans chaque part pointée de $\pi_{n,p}$ and dont la $i$ème part pointée si $o_i = 1$, non pointée sinon.

Théorème

Le coproduit est donné par :

$$\Delta\left(\frac{\pi^{o}_{k+l,k}}{l!(k-o)!}\right) = \sum_{p+q\geq 1} \frac{\pi^{o}_{p+q,p}}{q!(p-o)!} \otimes \sum_{(l_i,k_i)} \prod_{i=1}^{p} \frac{\pi^{1}_{l_i+k_i,k_i}}{l_i!(k_i-1)!} \prod_{i=p+1}^{p+q} \frac{\pi^{0}_{l_i+k_i,k_i}}{l_i!k_i!}, \quad (1)$$

où la deuxième somme court sur l'ensemble des $(l_1,\dots,l_{p+q})$ *et* $(k_1,\dots,k_{p+q})$ *vérifiant* $l_1,\dots,l_p \geq 0$, $l_{p+1},\dots,l_{p+q}\geq 1$, $\sum_{i=1}^{p+q} l_i = l$, $k_1,\dots,k_p\geq 1$, $k_{p+1},\dots,k_{p+q}\geq 0$ *et* $\sum_{i=1}^{p+q} k_i = k$.

Identification de cette algèbre de Hopf

Proposition

L'algèbre de Hopf d'incidence des posets de partitions semi-pointées est isomorphe à la structure d'algèbre de Hopf sur l'algèbre des polynômes en les variables $(a^{\theta}_{k,l})_{k,l \geq 1, \theta \in \{0,1\}}$ *donnée par la composition de paires de séries formelles* (F, G) *de la forme suivante :*

$$\begin{cases} F = \sum_{l,k \geq 0} a^0_{k,l} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}, \\ G = \sum_{l,k \geq 0} l a^1_{k,l} \frac{x^k}{k!} \frac{y^l}{l!}, \end{cases}$$

avec $a^0_{0,l} = 0$, $a^0_{1,0} = 1$ *et* $a^1_{0,1} = 1$.

Applications : Caractères sur une algèbre de Hopf d'incidence

Définition

Caractère : $\mathcal{H} \to \mathbb{Q}$ morphisme $\mathbb{Q}$-linéaire.

Étant donnés deux caractères ϕ et ψ, la convolution de ϕ et ψ est définie pour tout P par :

$$\phi * \psi(P) = \sum \phi(P_{(1)})\psi(P_{(2)}),$$

où $\Delta(P) = \sum P_{(1)} \otimes P_{(2)}$. L'unité pour cette loi est la counité de l'algèbre de Hopf d'incidence.

Avec l'identification de la page précédente, un caractère sur l'algèbre de Hopf d'incidence des partitions semi-pointées est alors un couple de séries formelles en deux variables et $*$ est la composition de ces séries.

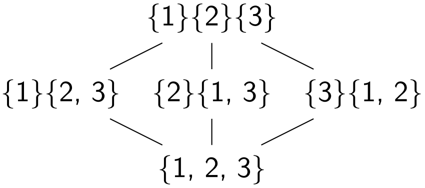
Applications : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, & \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z), & \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0},\hat{1})$



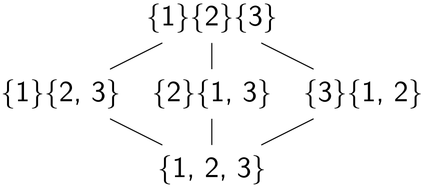
Applications : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$
$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



Applications : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \{1\}\{2\}\{3\} \arrow[dl, no head] \arrow[d, no head] \arrow[dr, no head] & \\ \{1\}\{2,3\} \arrow[dr, no head] & \{2\}\{1,3\} \arrow[d, no head] & \{3\}\{1,2\} \arrow[dl, no head] \\ & {\color{blue}1}\ \{1,2,3\} & \end{tikzcd}$$

Applications : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\begin{aligned} \mu(x,x) &= 1, && \forall x \in P \\ \mu(x,y) &= -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), && \forall x < y \in P. \end{aligned}$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

$\{1\}\{2\}\{3\}$

$-1\{1\}\{2,3\}$ $-1\{2\}\{1,3\}$ $-1\{3\}\{1,2\}$

1 $\{1,2,3\}$

Applications : Nombre de Möbius des posets

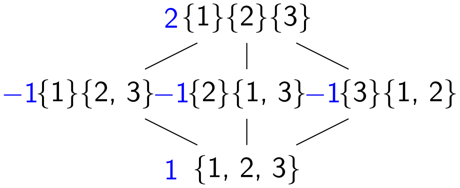
Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$

$$\mu(x,y) = -\sum_{x \leq z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$



Applications : Nombre de Möbius des posets

Définition

On définit récursivement sur les intervalles fermés d'un poset P la fonction de Möbius μ par :

$$\mu(x,x) = 1, \qquad \forall x \in P$$

$$\mu(x,y) = -\sum_{x \le z < y} \mu(x,z), \qquad \forall x < y \in P.$$

Pour un poset borné P, le nombre de Möbius est défini par $\mu(P) := \mu(\hat{0}, \hat{1})$

Nombre de Möbius $\rightarrow$ 2 $\{1\}\{2\}\{3\}$

$-1\{1\}\{2,3\}$ $-1\{2\}\{1,3\}$ $-1\{3\}\{1,2\}$

1 $\{1,2,3\}$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Les caractères ζ et μ sont définis sur tout poset P de l'algèbre par :

$$\zeta : P \mapsto 1$$

et

$$\mu : P \mapsto \mu(P),$$

où $\mu(P)$ est le nombre de Möbius du poset P.
Ces caractères sont inverses l'un de l'autre. D'après le calcul du coproduit, les nombres de Möbius des intervalles $\pi^0_{n,p}$ et $\pi^1_{n,p}$ sont respectivement les coefficients des séries A et B, satisfaisant :

$$\begin{aligned}(e^B - 1)e^A &= x\\ Be^{A+B} &= y.\end{aligned}$$

Application : Calcul des nombres de Möbius

Corollaire

Pour un ensemble de "pointable" de taille ℓ et de "non-pointable" de taille p, Le nombres de Möbius de $\pi^1_{n,p}$ est donné par :

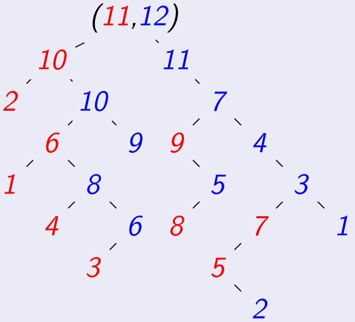
$$(-1)^{\ell+p-1}\frac{(\ell+p-1)!}{(\ell-1)!}(\ell+p)^{\ell-1}$$

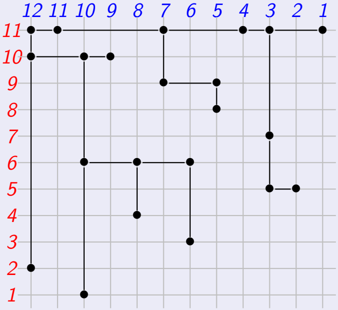
Généralisation des arbres non ambigus

Travail en collaboration avec J.-C. Aval, A. Boussicault, F. Hivert et P. Labord-Zubieta.

Définition

Arbres non ambigus = arbres binaires représentées dans une grille de manière "compacte" mais non ambigus : 





- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début

$$\mathfrak{N}^{(\alpha,\beta)} = e^{\alpha x} e^{\beta y} e^{-\alpha \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))} e^{-\beta \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))}. \qquad (2)$$

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début

$$\mathfrak{N}^{(\alpha,\beta)} = e^{\alpha x} e^{\beta y} e^{-\alpha \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))} e^{-\beta \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))}. \qquad (2)$$

$$\mathcal{NAT}_{w,h} = \sum_{p \geq 1} (p-1)! \cdot (p-1)^{(\alpha+\beta)} \cdot S_{2,\alpha}(w+1,p) S_{2,\beta}(h+1,p) \quad (3)$$

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début

$$\mathfrak{N}^{(\alpha,\beta)} = e^{\alpha x} e^{\beta y} e^{-\alpha \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))} e^{-\beta \ln(1-(e^x-1)(e^y-1))}. \tag{2}$$

$$\mathcal{NAT}_{w,h} = \sum_{p\geq 1} (p-1)! \cdot (p-1)^{(\alpha+\beta)} \cdot S_{2,\alpha}(w+1,p) S_{2,\beta}(h+1,p) \tag{3}$$

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début
- q-analogue de la formule des équerres

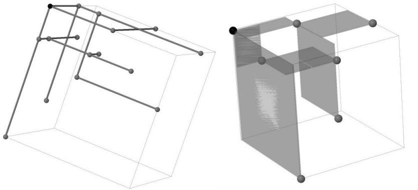
- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début
- q-analogue de la formule des équerres
  $inversions = |i < j <= n : \sigma(i) > \sigma(j)$
  $indice\ majeur =$ nombres de descentes de σ^{-1}.

$$w_S(T) := q_L^{S(\sigma_L(T))} q_R^{S(\sigma_R(T))}. \tag{4}$$

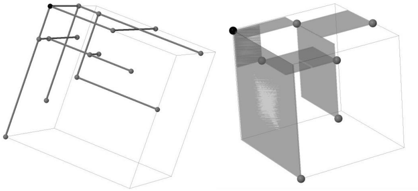
$$\begin{aligned}\sum_{T \in \mathcal{NAT}(B)} w_{\mathrm{Inv}}(T) &= \sum_{T \in \mathcal{NAT}(B)} w_{\mathrm{iMaj}}(T) \\ &= \frac{|V_L(B)|_{q_L}! \cdot |V_R(B)|_{q_R}!}{\prod_{U:\text{left child}} [\mathcal{E}_L(U)]_{q_L} \cdot \prod_{U:\text{right child}} [\mathcal{E}_R(U)]_{q_R}}.\end{aligned}$$

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début
- q-analogue de la formule des équerres
- Généralisation en dimension supérieure

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début
- q-analogue de la formule des équerres
- Généralisation en dimension supérieure

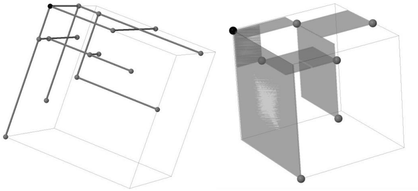


- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début
- q-analogue de la formule des équerres
- Généralisation en dimension supérieure



- ...

- Enumération des NAT $\leftrightarrow$ Enumération des permutations dont les excédences sont au début
- q-analogue de la formule des équerres
- Généralisation en dimension supérieure



$\rightsquigarrow$ Poster à FPSAC 2016

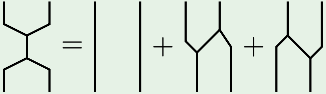
Théorème de structure pour certains types de bigèbres généralisées

Définition

Une bigèbre généralisée est un espace vectoriel muni d'un produit (encodé par une opérade) et d'un coproduit (encodé par une coopérade) satisfaisant chacun des relations et des relations de compatibilité.

Exemples

- Algèbre de Hopf commutative cocommutative
- Bigèbre associative et coassociative (concaténation et déconcaténation sur les mots) Relation de compatibilité :



Théorème (Loday)

Sous certaines hypothèses, une bigèbre généralisée est libre et colibre sur ses primitifs ($\{x|\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}$)

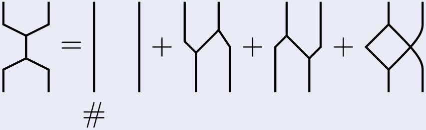
Théorème (Loday)

Sous certaines hypothèses, une bigèbre généralisée est libre et colibre sur ses primitifs ($\{x | \Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\}$)

Ici

- Extension des conditions
- Cas dual
- Application : Liberté de certaines algèbres

  Prelie :

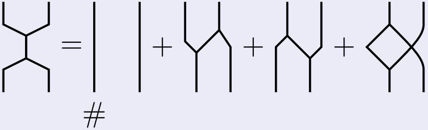


Théorème (Loday)

Sous certaines hypothèses, une bigèbre généralisée est libre et colibre sur ses primitifs $(\{x|\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1\})$

Ici

- Extension des conditions
- Cas dual
- Application : Liberté de certaines algèbres
  Prelie :



$\rightsquigarrow$ Exposé le 7 avril 2016 au LAGA

Merci de votre attention !