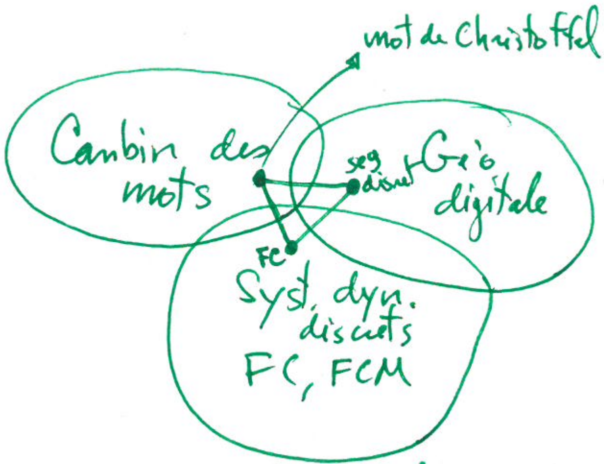
LIPN
10 mars 2015

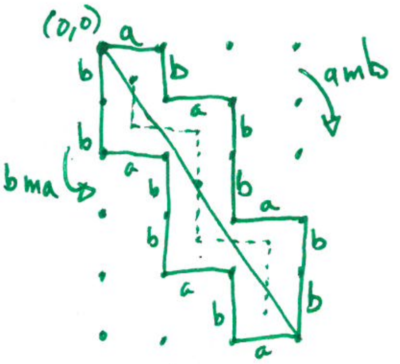
~~[illegible]~~ Une extension d-dimensionnelle des m. de Christoffel

avec C. Reutenauer
Sur arxiv + ~~[illegible]~~ Discr. Comput. Geom



Les mots de Christoffel touchent à trois domaines (à l'image de mon projet de recherche)

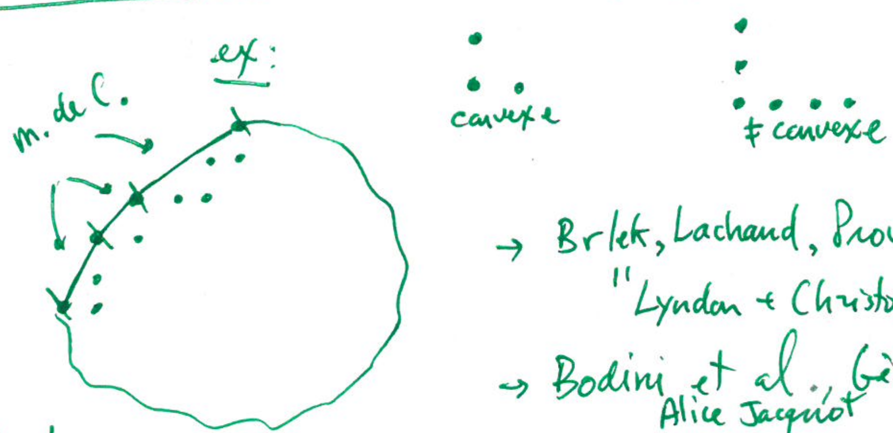
Def Un mot de Christoffel code un "segment discret" de $(0,0)$ à (p,q) où p,q sont copremiers. de la façon suivante :



$$W = a \,.\, babbab \,.\, b$$

Convexité (digitale) $P \subseteq \mathbb{Z}^d$ est convexe si $\mathrm{ENVCONV}_{\mathbb{R}}(P) \cap \mathbb{Z}^d \subseteq P$

ex :



→ Brlek, Lachaud, Provençal, Reutenauer, 2009 "Lyndon + Christoffel = Dig. Convex"

→ Bodini et al., Génération aléatoire de polyominos convexes
Alice Jacquot

Motivation : ~~Généraliser cela en 3D~~ Segmentation de surfaces digitale en dimension supérieure

<u>Def 2</u> (m. de C.) Codage du Cayley graph du groupe $\mathbb{Z}_8$ avec générateur 5.

$$0 \xrightarrow[a]{+5} 5 \xrightarrow[b]{} 2 \xrightarrow[a]{} 7 \xrightarrow[b]{} 4 \xrightarrow[b]{} 1 \xrightarrow[a]{} 6 \xrightarrow[b]{} 3 \xrightarrow[b]{} 0$$

Berstel (2007) "14 caractérisations des m. de C."

<u>Thm (Pirillo, 2001)</u> $amb \in \{a,b\}^*$ est un m. de C. $\Leftrightarrow$ amb et bma sont conjugués

$\boxed{\text{Ex}}$ $(\Rightarrow)$ $amb = ababbabb$

bma

$(\Leftarrow)$ Sp. amb et bma sont conjugués de la façon suivante et $|m| = 6$

$$a\, m_1\, m_2\, m_3\, m_4\, m_5\, m_6\, b$$
$$m_5\, m_6\, a\, b\, m_1\, m_2\, m_3\, m_4$$

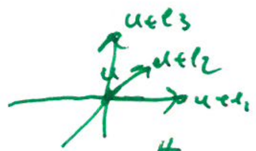
Donc, $m_1 = m_6 = m_3 = b = m_4 = m_1$ $\Rightarrow amb = ababbabb$

$a = m_5 = m_2 = a$

<u>Réseau hypercubique</u>

$$\mathbb{E}_d = \{(u, u+e_i) \mid u \in \mathbb{Z}^d,\ 1 \le i \le d\}$$

$\mathbb{E}_2$



$\mathbb{E}_3$

<u>Graphe de Christoffel</u> $d \geq 2$.

Soit $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{N}^d$ t.q. $\mathrm{pgcd}(\vec{a}) = 1$

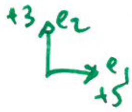
Soit $s = \|\vec{a}\|_1 = \sum a_i$

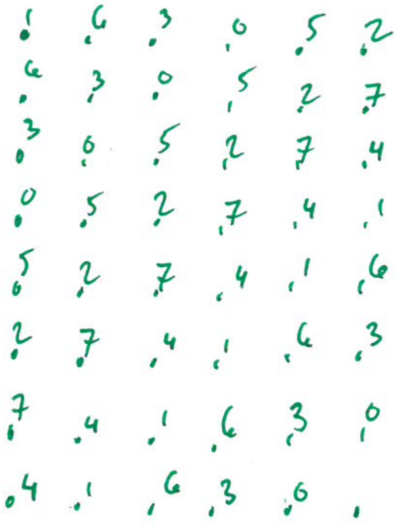
$$F_{\vec{a}} : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}/s\mathbb{Z}$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x} \bmod s = \sum a_i x_i \bmod s$$

Le <u>graphe de Christoffel de vecteur normal $\vec{a}$</u> est

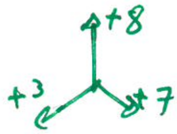
$$H_{\vec{a}} = \{(u, u+e_i) \in \mathbb{E}_d \mid F_{\vec{a}}(u) < F_{\vec{a}}(u+e_i)\}$$

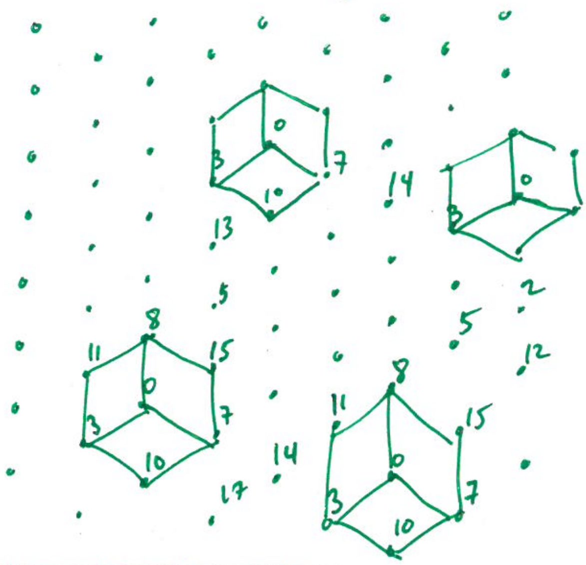
$\boxed{EX}$ $\vec{a} = (5,3)$





$\vec{a} = (3,7,8)$ mod 18





| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |

~~Pattes~~ Biologie

- Arêtes de $\mathbb{E}d$ incidentes à zéro :

$$Q = \{ (u,v) \in \mathbb{E}d \mid F_{\vec{a}}(u)=0 \text{ ou } F_{\vec{a}}(v)=0 \}$$

- Pattes ou Jambes de $X \subseteq \mathbb{E}d$ sont :

$$X \cap Q$$

- Corps de $X \subseteq \mathbb{E}d$:

$$X \setminus Q$$

Opérations $X \subseteq \mathbb{E}d$, $t \in \mathbb{Z}^d$

- Miroir ou Inverse : $-X = \{ (-v,-u) \mid (u,v) \in X \}$
- Translation : $X+t = \{ (u+t, v+t) \mid (u,v) \in X \}$
- $\text{FLIP}(X) = (X \setminus Q) \cup (Q \setminus X)$

$\boxed{EX}$ à faire sur dessins ci-haut

Proposition Soit $t \in \mathbb{Z}^d$ t.q. $F_{\vec{a}}(t) = 1$ (vecteur bezout)

$$H_{\vec{a}} + t = FLIP(H_{\vec{a}})$$

(généralise le fait que amb soit conjugué à bma)

$\boxed{EX}$ sur dessin

Aussi : mais pas caractéristique
- $(H_a \setminus Q) = H_a \setminus Q$
- $H_{\vec{a}} = FLIP(H_{\vec{a}})$
- $H_{\vec{a}} = H_{\vec{a}} + t$

Réciproque

Theorem
- K s/gp d'indice fini de $\mathbb{Z}^d$ t.q. $\Sigma e_i \in K$
- $M \subseteq \mathbb{E}d$ invariant par les translations de K
- $Q = \{(u,v) \in \mathbb{E}d \mid u \in K \text{ ou } v \in K\}$
- jambes de M sont positives comme pr les g. de C.
  i.e. $M \cap Q = \{(0, e_i) \mid 1 \leq i \leq d\} + K$

$(\exists t \in \mathbb{Z}^d)$ s.t. $FLIP(M) = M + t \iff$

$$M = H_{\vec{a},w} \quad \text{où} \quad 0 < s/w < d.$$

Nouvelle def

Soit w, épaisseur, un diviseur de $s = \|\vec{a}\|$

$$F_{\vec{a},w} : \mathbb{Z}^d \longrightarrow \mathbb{Z}/w\mathbb{Z}$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{a} \cdot \vec{x} \mod w$$

$$H_{\vec{a},w} = \{(u, u+e_i) \in \mathbb{E}d \mid F_{\vec{a},w}(u) < F_{\vec{a},w}(u+e_i)\}$$

(peut s'interpréter comme le complément si $d=3$ et $w = \frac{\|\vec{a}\|}{2}$)

Mentionner slabbe-0.1.spkg pour expérimentations sur Christoffel graphes.