Fragmentations Aléatoires

October 18, 2010

Il s'agit d'un processus stochastique dont les applications se trouvent surtout en physique nucléaire, Biologie, Informatique, Géologie...

Il s'agit d'un processus stochastique dont les applications se trouvent surtout en physique nucléaire, Biologie, Informatique, Géologie...
Au départ on a un segment de longueur x, avec une probabilité $p(x)$ (qui peut ne pas dépendre de x), ce segment se fragmente en b morceaux de longueurs $(x\xi_j)_{1\leq j\leq b}$ (Les $(\xi_j)_j$ sont appelés loi de reproduction et ne dépendent pas de x).

Il s'agit d'un processus stochastique dont les applications se trouvent surtout en physique nucléaire, Biologie, Informatique, Géologie...

Au départ on a un segment de longueur x, avec une probabilité $p(x)$ (qui peut ne pas dépendre de x), ce segment se fragmente en b morceaux de longueurs $(x\xi_j)_{1\leq j\leq b}$ (Les $(\xi_j)_j$ sont appelés loi de reproduction et ne dépendent pas de x).

Ce segment reste indéfiniment stable (ne se fragmente jamais) avec la probabilité $q(x) = 1 - p(x)$.

Il s'agit d'un processus stochastique dont les applications se trouvent surtout en physique nucléaire, Biologie, Informatique, Géologie...
Au départ on a un segment de longueur x, avec une probabilité $p(x)$ (qui peut ne pas dépendre de x), ce segment se fragmente en b morceaux de longueurs $(x\xi_j)_{1\leq j\leq b}$ (Les $(\xi_j)_j$ sont appelés loi de reproduction et ne dépendent pas de x).
Ce segment reste indéfiniment stable (ne se fragmente jamais) avec la probabilité $q(x) = 1 - p(x)$.
Ainsi de suite chaque sous-fragment subit, d'une façon indépendante et indépendemment de tout l'historique, le même phénomène.

Il s'agit d'un processus stochastique dont les applications se trouvent surtout en physique nucléaire, Biologie, Informatique, Géologie...

Au départ on a un segment de longueur x, avec une probabilité $p(x)$ (qui peut ne pas dépendre de x), ce segment se fragmente en b morceaux de longueurs $(x\xi_j)_{1\leq j\leq b}$ (Les $(\xi_j)_j$ sont appelés loi de reproduction et ne dépendent pas de x).

Ce segment reste indéfiniment stable (ne se fragmente jamais) avec la probabilité $q(x) = 1 - p(x)$.

Ainsi de suite chaque sous-fragment subit, d'une façon indépendante et indépendemment de tout l'historique, le même phénomène.

On s'intéresse généralement à étudier le nombre $N(x)$ représentant le nombre de segments stables à la fin du processus.

L'idée de la fragmentation a été introduite par Kolmogorov en 1941, on n'a commencé à avoir des résultats qu'à partir de 1961 par Filippov, ensuite par Brennan (1986), Durret (1987), Sibuya et Itoh (1987) dans le cas où $b = 2$.

L'idée de la fragmentation a été introduite par Kolmogorov en 1941, on n'a commencé à avoir des résultats qu'à partir de 1961 par Filippov, ensuite par Brennan (1986), Durret (1987), Sibuya et Itoh (1987) dans le cas où $b = 2$.
Dean et Majumdar (2002), janson et Neininger (2007), ont obtenu des résultats sur $N(x)$ pour $b \geq 3$ et $p(x) = 1\!\mathrm{I}_{\{x \geq 1\}}$.

L'idée de la fragmentation a été introduite par Kolmogorov en 1941, on n'a commencé à avoir des résultats qu'à partir de 1961 par Filippov, ensuite par Brennan (1986), Durret (1987), Sibuya et Itoh (1987) dans le cas où $b = 2$.
Dean et Majumdar (2002), janson et Neininger (2007), ont obtenu des résultats sur $N(x)$ pour $b \geq 3$ et $p(x) = \mathbb{1}_{\{x \geq 1\}}$.
Krapivsky, Ben-Naim et Grosse (2004), Huillet et Ghorbel (2005-2006) ont exposé le problème (sans trop de résultats explicites) dans le cas où l'intervalle initiale est de longueur 1 et la probabilité qu'un segment soit stable ne dépend pas de sa taille.

Présentation

$p = p(x) \in]0,1[, \; q = 1 - p$ et $b \geq 3$. On suppose qu'on est dans le cas conservatif:

$$\sum_{j=1}^{b} \xi_j = 1, \; p.s$$

et que
chaque interval de longueur y est coupé en b morceaux en lancant aléatoirement et uniformément $(b-1)$ points dans l'intervalle $[0, y]$.

Présentation

$p = p(x) \in]0, 1[, \ q = 1 - p$ et $b \geq 3$. On suppose qu'on est dans le cas conservatif:

$$\sum_{j=1}^{b} \xi_j = 1, \ p.s$$

et que
chaque interval de longueur y est coupé en b morceaux en lancant aléatoirement et uniformément $(b - 1)$ points dans l'intervalle $[0, y]$. Vu que le mécanisme de fragmentation ne dépend pas de x, on peut supposer que le segment initial est de taille 1.

Présentation

$p = p(x) \in]0,1[,\ q = 1 - p$ et $b \geq 3$. On suppose qu'on est dans le cas conservatif:

$$\sum_{j=1}^{b} \xi_j = 1,\ p.s$$

et que

chaque interval de longueur y est coupé en b morceaux en lancant aléatoirement et uniformément $(b-1)$ points dans l'intervalle $[0, y]$.
Vu que le mécanisme de fragmentation ne dépend pas de x, on peut supposer que le segment initial est de taille 1.
Krapivsky, Ben-Naim et Grosse (2004) ont donné des résultats heuristiques dans le cas $b = 2$ concernant les variables:
N representant le nombre de segments stables à la fin
$K(t)$ le nombre de segments stables de longueurs inférieurs à t.

Objectif

Mon objectif, dans cette partie, est de donner des démonstrations de ces résultats dans le cas $b \geq 3$. Je me limite dans cet exposé au cas $b = 3$.

Moyenne

$$N = \sum_{j=1}^{3} \mathbb{1}_{\{\xi_j \ stable\}} + \sum_{j=1}^{3} \mathbb{1}_{\{\xi_j \ instable\}} N^{(j)} \tag{1}$$

Moyenne

$$N = \sum_{j=1}^{3} 1\!\mathrm{I}_{\{\xi_j \ stable\}} + \sum_{j=1}^{3} 1\!\mathrm{I}_{\{\xi_j \ instable\}} N^{(j)} \tag{1}$$

Il s'agit bien d'un processus de G.W. avec comme loi de reproduction

$$\rho = p\delta_3 + (1-p)\delta_0.$$

Moyenne

$$N = \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{\xi_j \ stable\}} + \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{\xi_j \ instable\}} N^{(j)} \tag{1}$$

Il s'agit bien d'un processus de G.W. avec comme loi de reproduction

$$\rho = p\delta_3 + (1-p)\delta_0.$$

Imédiatement on conclut que

$$\mathbf{E}(N) = \frac{3q}{1-3p},\ si\ p < 1/3\ et\ \mathbf{E}(N) = +\infty\ si\ p \geq 1/3.$$

Moyenne

$$N = \sum_{j=1}^{3} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\xi_j \ stable\}} + \sum_{j=1}^{3} 1\!\!\mathrm{I}_{\{\xi_j \ instable\}} N^{(j)} \tag{1}$$

Il s'agit bien d'un processus de G.W. avec comme loi de reproduction

$$\rho = p\delta_3 + (1-p)\delta_0.$$

Imédiatement on conclut que

$$\mathbf{E}(N) = \frac{3q}{1-3p}, \ si \ p < 1/3 \ et \ \mathbf{E}(N) = +\infty \ si \ p \geq 1/3.$$

$$\phi_N(t) := \mathbf{E}(e^{Nt}) = \Big(q + p\phi_N(t)\Big)^3.$$

Moyenne du nombre de segments de taille donnée

Pour $t, y \in [0, 1]$, soit $K(y, t)$ le nombre de segments stables de longueurs inférieurs à t provenants d'un segment de longuers y. On s'intéresse à déterminer $M(t) := M(1, t) = \mathbf{E}(K(1, t)) := \mathbf{E}(K(t))$.

Moyenne du nombre de segments de taille donnée

Pour $t, y \in [0,1]$, soit $K(y,t)$ le nombre de segments stables de longueurs inférieurs à t provenants d'un segment de longuers y. On s'intéresse à déterminer $M(t) := M(1,t) = \mathbf{E}(K(1,t)) := \mathbf{E}(K(t))$. On a

$$K(t) = \sum_{j=1}^{3} 1\!\mathrm{I}_{\{j^{th}\ stable\}} 1\!\mathrm{I}_{\{\xi_j \leq t\}} + \sum_{j=1}^{3} 1\!\mathrm{I}_{\{j^{th}\ instable\}} K(\xi_j, t)$$

Moyenne du nombre de segments de taille donnée

Pour $t, y \in [0,1]$, soit $K(y,t)$ le nombre de segments stables de longueurs inférieurs à t provenants d'un segment de longuers y. On s'intéresse à déterminer $M(t) := M(1,t) = \mathbf{E}(K(1,t)) := \mathbf{E}(K(t))$. On a

$$\begin{aligned} K(t) &= \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{j^{th}\ stable\}} 1\!\!1_{\{\xi_j \leq t\}} + \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{j^{th}\ instable\}} K(\xi_j, t) \\ &= \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{j^{th}\ stable\}} 1\!\!1_{\{\xi_j \leq t\}} + \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{j^{th}\ instable\}} 1\!\!1_{\{\xi_j \leq t\}} K(\xi_j, t) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{3} 1\!\!1_{\{j^{th}\ instable\}} 1\!\!1_{\{\xi_j \geq t\}} K(\xi_j, t). \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
M(t) &= 3q\mathbf{P}(\xi_1 \leq t) + 6p\int_0^t M(s,t)(1-s)ds \\
&+ 6pt\int_t^1 M(s,t)(1-s)ds.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} M(t) &= 3q\mathbf{P}(\xi_1 \leq t) + 6p\int_0^t M(s,t)(1-s)ds \\ &+ 6pt\int_t^1 M(s,t)(1-s)ds. \end{aligned}$$

Mais, $\forall s,\ t \in [0,1]$
si $s \leq t,\ M(s,t) = M(1) = \mathbf{E}(N)$.
si $s \geq t,\ M(s,t) = M(1, t/s) = M(t/s)$.

$$\begin{aligned} M(t) &= 3q\mathbf{P}(\xi_1 \leq t) + 6p\int_0^t M(s,t)(1-s)ds \\ &+ 6pt\int_t^1 M(s,t)(1-s)ds. \end{aligned}$$

Mais, $\forall s,\ t \in [0,1]$
si $s \leq t,\ M(s,t) = M(1) = \mathbf{E}(N)$.
si $s \geq t,\ M(s,t) = M(1,t/s) = M(t/s)$.
par conséquent

$$\begin{aligned} M(t) &= 3q\mathbf{P}(\xi_1 \leq t) + 6p\mathbf{E}(N)\int_0^t (1-s)ds + 6p\int_t^1 M(t/s)(1-s)ds \\ &= 3qt(2-t) + 6pt(1-\frac{t}{2})\mathbf{E}(N) + 6pt\int_t^1 \frac{M(y)}{y^2}dy \\ &\quad -6pt^2\int_t^1 \frac{M(y)}{y^3}dy. \end{aligned}$$

Soit $P(y)$ la densité des fragments de longueur y, on a

$$M(t) = \int_0^t P(y)dy.$$

Ainsi

$$P(t) = 6q - 6qt + 6p\int_t^1 \frac{P(s)}{s}ds - 6pt\int_t^1 \frac{P(s)}{s^2}ds. \qquad (2)$$

Soit $P(y)$ la densité des fragments de longueur y, on a

$$M(t) = \int_0^t P(y)dy.$$

Ainsi

$$P(t) = 6q - 6qt + 6p\int_t^1 \frac{P(s)}{s}ds - 6pt\int_t^1 \frac{P(s)}{s^2}ds. \qquad (2)$$

Remarque

le phénomène "conservatif" est vérifié:

$$\int_0^1 tP(t) = 1,$$

le nombre moyen de segments stables:

$$\int_0^1 P(t)dt = \mathbf{E}(N)$$

On applique la transformation de Mellin:

$$\hat{P}(s) := \int_0^{+\infty} P(y) y^{s-1} dy = \frac{6q}{s(s+1) - 6p},$$

et

$$\hat{M}(s) := \int_0^{+\infty} M(y) y^{s-1} dy = \frac{3(q + p\mathbf{E}(N))(s+3)}{(s+1)(s+2) - 6p}.$$

On applique la transformation de Mellin:

$$\hat{P}(s) := \int_0^{+\infty} P(y) y^{s-1} dy = \frac{6q}{s(s+1) - 6p},$$

et

$$\hat{M}(s) := \int_0^{+\infty} M(y) y^{s-1} dy = \frac{3(q + p\mathbf{E}(N))(s+3)}{(s+1)(s+2) - 6p}.$$

la fonction M peut être obtenue grâce à Mellin inverse

Théorème

.

$$M(t) = \frac{\mathbf{E}(N)}{\sqrt{1+24p}} t^{\frac{3+\sqrt{1+24p}}{2}} \left[\frac{3+\sqrt{1+24p}}{2} t^{-\sqrt{1+24p}} + \frac{\sqrt{1+24p}-3}{2} \right].$$

Problèmes:

(1) comportement asymptotique de Y^* (maximum des longuers des segments stables) et Y_* (minimum des longueurs des segments stables).

Problèmes:

(1) comportement asymptotique de Y^* (maximum des longuers des segments stables) et Y_* (minimum des longueurs des segments stables).
Dans le cas où $b = 2$ et si on note par F^* la fonction de répartition de Y^*, alors on vérifie facilement, que pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$F^*(x) = p \int_0^1 F^*(\frac{x}{s}) F^*(\frac{x}{1-s}) ds.$$

Problèmes:

(1) comportement asymptotique de Y^* (maximum des longuers des segments stables) et Y_* (minimum des longueurs des segments stables).
Dans le cas où $b = 2$ et si on note par F^* la fonction de répartition de Y^*, alors on vérifie facilement, que pour tout $x \in]0, 1[$, on a

$$F^*(x) = p \int_0^1 F^*(\frac{x}{s})F^*(\frac{x}{1-s})ds.$$

(2) Le comportement de la hauteur H de l'arbre?

(3) Hauteurs des feuilles ayant le le poids maximal (resp ayant le poids minimal).

(3) Hauteurs des feuilles ayant le le poids maximal (resp ayant le poids minimal).
Soit H^* la hauteur de la feuille ayant le poids maximal, alors on a la relation suivante

$$Y^* = \prod_{j=1}^{H^*} \xi_j,$$

la famille $(\xi_j)_j$ est mutuellement indépendante indépendante de H^*.

Introduction:

On suppose que le segment est de longueur x (assez grand).

Introduction:

On suppose que le segment est de longueur x (assez grand). La probabilité qu'un segment de longueur y est instable est $p(y) = 1 - e^{-y}$.

Introduction:

On suppose que le segment est de longueur x (assez grand).
La probabilité qu'un segment de longueur y est instable est $p(y) = 1 - e^{-y}$.
$b = 2, \xi_1$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Introduction:

On suppose que le segment est de longueur x (assez grand).
La probabilité qu'un segment de longueur y est instable est $p(y) = 1 - e^{-y}$.
$b = 2, \xi_1$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Soient

$$m(x) = \mathbf{E}(N(x)),\ v(x) = \mathbf{V}(N(x))$$

Introduction:

On suppose que le segment est de longueur x (assez grand).
La probabilité qu'un segment de longueur y est instable est $p(y) = 1 - e^{-y}$.
$b = 2, \xi_1$ suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
Soient

$$m(x) = \mathbf{E}(N(x)),\ v(x) = \mathbf{V}(N(x))$$

Comment se comporte en loi $N_*(x) := \frac{N(x) - m(x)}{\sqrt{v(x)}}$ *?*

Comportement de $m(x)$

$$N(x) = 1\!\!\mathrm{I}_{\{x \; stable\}} + 1\!\!\mathrm{I}_{\{x \; instable\}} \sum_{j=1}^{2} N^{(j)}(\xi_j x) \qquad (3)$$

Comportement de $m(x)$

$$N(x) = \mathbb{1}_{\{x \text{ stable}\}} + \mathbb{1}_{\{x \text{ instable}\}} \sum_{j=1}^{2} N^{(j)}(\xi_j x) \tag{3}$$

ainsi, $m(x)$ satisfait

$$m(x) = e^{-x} + \frac{2(1-e^{-x})}{x} \int_0^x m(t)dt \tag{4}$$

Avec la condition initiale $\lim_{x \to 0} m(x) = 1$

$$
\begin{aligned}
m(x) &= e^{-x} - \frac{2(1-e^{-x})}{x} + \varphi(x) \\
&+ \varphi(x)\Big[\int_0^x \Big\{[e^{-t} - \frac{2(1-e^{-t})}{t}]\exp(-\int_0^t \frac{2(1-e^{-s})}{s}ds)\Big\}dt\Big]
\end{aligned}
$$

avec $\varphi(x) = \frac{2(1-e^{-x})}{x}\exp\left(\int_0^x \frac{2(1-e^{-t})}{t}dt\right)$.

$$\begin{aligned} m(x) &= e^{-x} - \frac{2(1-e^{-x})}{x} + \varphi(x) \\ &+ \varphi(x)\Big[\int_0^x \Big\{[e^{-t} - \frac{2(1-e^{-t})}{t}]\exp(-\int_0^t \frac{2(1-e^{-s})}{s}ds)\Big\}dt\Big] \end{aligned}$$

avec $\varphi(x) = \frac{2(1-e^{-x})}{x}\exp\left(\int_0^x \frac{2(1-e^{-t})}{t}dt\right)$.

Asymptotiquement, pour x assez grand

$$m(x) = 2\gamma x + O(1),$$

où

$$\begin{aligned} \gamma &= \exp\Big[\int_0^1 \frac{2(1-e^{-t})}{t}dt\Big]\exp\Big[-2\int_1^{+\infty}\frac{e^{-t}}{t}dt\Big] \\ &+ \int_0^{+\infty}\Big\{\frac{1}{t^2}\Big[e^{-t} - \frac{2(1-e^{-t})}{t}\Big]\exp\Big[-2\int_t^{+\infty}\frac{e^{-s}}{s}ds\Big]\Big\}dt \\ &> 0 \end{aligned}$$

Remarque

Si chaque fragment se coupe d'une façon uniforme en b morceaux avec $b \geq 3$, la fonction $m(x)$ satisfait l'équation différentielle suivante

$$\frac{d^{b-1}}{dx^{b-1}}\left(x^{b-1}m(x)\right) - b!(1 - e^{-x})m(x) = b!e^{-x}. \tag{5}$$

Comportement de $v(x)$

De la même façon que $m(x)$, on montre qu'il existe une constante $\lambda > 0$ telle que

$$v(x) = \lambda x + O(1). \tag{6}$$

Technique de contraction de Janson Neininger(2007)

Contexte général: Soit un processus en temps continu $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini de la façon suivante

$$Y(t) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{b} A(j,t) Y^{(j)}(T(j,t)) + \varepsilon(t), \ t \geq 0 \tag{7}$$

où $\varepsilon(t)$, $T^{(t)} := (T(j,t))_{1\leq j\leq b}$, $(A(j,t))_{1\leq j\leq b}$ sont des processus aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et pour tout $1 \leq j \leq b$, $T(j,t) \in [0,t]$.
Les familles $(Y^1(t))_{t\geq 0}, \cdots, (Y^b(t))_{t\geq 0}$ et $(A(1,t), \cdots, A(b,t), \varepsilon(t), T^{(t)})_{t\geq 0}$ sont des familles de processus aléatoires mutuellement indépendantes.
Pour tous $t \geq 0$, $1 \leq j \leq b$, $Y(t)$ et $Y^{(j)}(t)$ ont la même loi.

Normalisation

Soient $C(t) = \mathbf{V}(Y(t)), M(t) = \mathbf{E}(Y(t))$ et

$$X(t) = C(t)^{-1/2}\Big(Y(t) - M(t)\Big).$$

L'équation (7) s'écrit en terme $X(t)$ sous la forme :

$$X(t) \overset{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{b} A_j^{(t)} X^{(j)}(T(j,t)) + \varepsilon^{(t)}, \quad t > 0,$$

avec

$$\begin{aligned} A_j^{(t)} &= C^{-1/2}(t) A(j,t) C^{1/2}(T(j,t)) \\ \varepsilon^{(t)} &= C^{-1/2}(t)\Big(\varepsilon(t) - M(t) + \sum_{j=1}^{b}\Big[A(j,t) M(T(j,t))\Big]\Big). \end{aligned}$$

Théorème de contraction de Janson Neininger (2007)

Soient les processus $(Y_t)_{t>0}$ et $(X_t)_{t>0}$.

Hypothèses:

(1) Pour tout $t > 0$, $\mathbf{E}\left[|Y(t)|^3\right] < \infty$.

(2) $\forall j \leq b$, $t > 0$,
$\mathbf{E}(|A_j^{(t)}|^3) + \mathbf{E}(|\varepsilon^{(t)}|^3) + \sup_{u \leq t}(\mathbf{E}(|X(u)|^3)) < \infty$

(3) $\left(A_1(t), \cdots, A_b(t), \varepsilon^{(t)}\right) \xrightarrow{L^3} (A_1^*, \cdots, A_b^*, \varepsilon^*)$,

(4) $\sum_{j=1}^{b} \mathbf{E}((A_j^*)^3) < 1$.

Théorème (Théorème de contraction de Janson Neininger (2007))

Sous les hypothèses précédentes

$$X(t) \xrightarrow{\mathcal{D}} X,$$

où la loi de X *est l'unique loi qui vérifie l'équation en loi suivante*

$$X \stackrel{\mathcal{L}}{=} \sum_{j=1}^{b} A_j^* X^{(j)} + \varepsilon^*.$$

Retour à $N_*(x)$

Retour à $N_*(x)$

L'évolution récursive de $N(x)$ s'adapte sous la forme

$$\begin{aligned}
\frac{N(x)-m(x)}{\sqrt{v(x)}} &= \frac{1\!\!1_{\{x\, stable\}} - e^{-x}}{\sqrt{v(x)}} \\
&+ 1\!\!1_{\{x\, instable\}} \frac{N^{(1)}(\xi_1 x) - m(\xi_1 x)}{\sqrt{v(\xi_1 x)}} \sqrt{\frac{v(\xi_1 x)}{v(x)}} \\
&+ 1\!\!1_{\{x\, instable\}} \frac{N^{(2)}(\xi_2 x) - m(\xi_2 x)}{\sqrt{v(\xi_2 x)}} \sqrt{\frac{v(\xi_2 x)}{v(x)}} \\
&+ \frac{\mathbf{E}\left[N^{(1)}(\xi_1 x) + N^{(2)}(\xi_2 x)\right]}{\sqrt{v(x)}} \left[1\!\!1_{\{x\, instable\}} - (1 - e^{-x})\right.
\end{aligned}$$

$$N_*(x) = \frac{1\!\!\mathrm{I}_{\{x\, stable\}} - e^{-x}}{\sqrt{v(x)}} + 1\!\!\mathrm{I}_{\{x\, instable\}} \sum_{j=1}^{2} N_*^{(j)}(\xi_j x) \sqrt{\frac{v(\xi_j x)}{v(x)}} + \varepsilon(x),$$

avec

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{E}\left[N^{(1)}(\xi_1 x) + N^{(2)}(\xi_2 x)\right]}{\sqrt{v(x)}} \left[1\!\!\mathrm{I}_{\{x\, instable\}} - (1 - e^{-x})\right]$$

$$N_*(x) = \frac{1\!\mathrm{I}_{\{x\,stable\}} - e^{-x}}{\sqrt{v(x)}} + 1\!\mathrm{I}_{\{x\,instable\}} \sum_{j=1}^{2} N_*^{(j)}(\xi_j x) \sqrt{\frac{v(\xi_j x)}{v(x)}} + \varepsilon(x),$$

avec

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathbf{E}\left[N^{(1)}(\xi_1 x) + N^{(2)}(\xi_2 x)\right]}{\sqrt{v(x)}} \left[1\!\mathrm{I}_{\{x\,instable\}} - (1 - e^{-x})\right]$$

$$N_*(x) = \sum_{j=1}^{2} N_*^{(j)}(\xi_j x) \sqrt{\frac{v(\xi_j x)}{v(x)}} + D(x), \qquad (8)$$

où

$$D(x) = \frac{1\!\mathrm{I}_{\{x\,stable\}} - e^{-x}}{\sqrt{v(x)}} + 1\!\mathrm{I}_{\{x\,stable\}} \sum_{j=1}^{2} N_*^{(j)}(\xi_j x) \sqrt{\frac{v(\xi_j x)}{v(x)}} + \varepsilon(x)$$

On a les limites suivantes:

Lemme

lorsque $x \to +\infty$,

$$
\begin{aligned}
\sqrt{\frac{v(\xi_1 x)}{v(x)}} &\xrightarrow{p.s.} \sqrt{\xi_1}, \\
\sqrt{\frac{v(\xi_2 x)}{v(x)}} &\xrightarrow{p.s.} \sqrt{\xi_2}, \\
\frac{1\!\mathrm{I}_{\{x\, stable\}} - e^{-x}}{\sqrt{v(x)}} &\xrightarrow{p.s.} 0, \\
1\!\mathrm{I}_{\{x\, instable\}} &\xrightarrow{p.s.} 1, \\
\varepsilon(x) &\xrightarrow{L^3} 0.
\end{aligned}
$$

On a par conséquent les résultats suivants:

Proposition

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(D^3(x)) &\longrightarrow 0 \\
\sum_{j=1}^{2} \mathbf{E}(\xi_j) &= 1 \\
\sum_{j=1}^{2} \mathbf{E}\left[\xi_j^{3/2}\right] &= 4/5 < 1 \\
\mathbf{E}(N(x)^3) &< \infty, \ \forall \ x > 0.
\end{aligned}
$$

Remarque

Une conséquence du théorème de Janson Neininger (2007), est que $N_*(x)$ converge en loi vers une variable aléatoire N_*, qui vérifie l'égalité en loi suivante

$$N_* \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_*^{(1)}\sqrt{\xi_1} + N_*^{(2)}\sqrt{1-\xi_1}, \tag{9}$$

avec $N_*^{(1)}$ et $N_*^{(2)}$ sont des copies indépendantes de N_*.

Remarque

Une conséquence du théorème de Janson Neininger (2007), est que $N_*(x)$ converge en loi vers une variable aléatoire N_*, qui vérifie l'égalité en loi suivante

$$N_* \stackrel{\mathcal{L}}{=} N_*^{(1)}\sqrt{\xi_1} + N_*^{(2)}\sqrt{1-\xi_1}, \tag{9}$$

avec $N_*^{(1)}$ et $N_*^{(2)}$ sont des copies indépendantes de N_*.

Lemme

La loi $\mathcal{N}(0,1)$ est la seule loi qui vérifie l'égalite (9).

Théorème

$N_*(x)$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$.

Perspectives:

(1) $b \geq 3$??, phénomène de transition de phase??

Perspectives:

(1) $b \geq 3$??, phénomène de transition de phase??

(2) Plongement en temps continu

Perspectives:

(1) $b \geq 3$??, phénomène de transition de phase??

(2) Plongement en temps continu

Chaque segment de longueur y a une durée de vie suivant la loi exponentielle de paramètre 1, à sa mort il donne naissance à un nombre $X(y)$ de loi $e^{-y}\delta_0 + (1 - e^{-y})\delta_b$.

Perspectives:

(1) $b \geq 3$??, phénomène de transition de phase??
(2) Plongement en temps continu
Chaque segment de longueur y a une durée de vie suivant la loi exponentielle de paramètre 1, à sa mort il donne naissance à un nombre $X(y)$ de loi $e^{-y}\delta_0 + (1 - e^{-y})\delta_b$.
(3) Comportement asymptotique de $M^*(x)$ et $H^*(x)$ respectivement taille et hauteur du plus grand segment.

MERCI